This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Sw895.48.5

Harvard College Library

FROM

Annals of Mathematics

SCIENCE CENTER LIBRARY

Sci 895.48.5

ANNO IX — NOVEMBRE 1905 — FASC. I

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTO DA

GIULIO LAZZERI

Prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al **Periodico di Matematica**

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Corrispondenza tra il teorema di " Legendre " e quello di " Stewart " e tra i loro contrari. (C. CIAMBERLINI.)
64ª quistione a concorso. (C. CIAMBERLINI.)
Ancora sulla 60ª quistione a concorso.
Risoluzioni delle quistioni 677, 681, 682, 683, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 692, 693 e 697.
Quistioni da risolvere 701-710.

Copertina:

Relaz. del concorso annuale dei giuochi.
Spiegazione del 9° giuoco a concorso.
10° giuoco a concorso.
Spiegazione dei giuochi 222, 228 e 232.
Giuochi proposti 242-246.

LIVORNO
RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE
LIBRAIO-TIPOGRAFO
1905

RELAZIONE DEL CONCORSO ANNUALE DEI GIUOCHI

Anno VIII. — (1904-05).

Durante l'anno 1904-05 furono proposti in questo periodico **47** giuochi. Degli **83** risolutori, i **30** di cui riportiamo i nomi spiegarono ESATTAMENTE *più di un quarto* dei giuochi proposti. (1)

1.	**Signorini**, R. L. di *Arezzo*	giuochi **47**	16.	**Maracci**, R. I. T. di *Ancona*	giuochi 21
2.	**Santarella**, L. P. di *Bitonto*	„ **46**	17.	**Rivera**, R. I. T. di *Venezia*	„ 21
3.	**Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*	„ **45**	18.	**Gergic** di *Trieste*	„ 19
4.	**Vercellin**, R. I. T. di *Torino*	„ **44**	19.	**Belvederi**, R. L. Galvani di *Bologna*	„ 18
5.	**Mammarella**, I. T. P. di *Ravenna*	„ **43**	20.	**Lucaroni**, R. I. T. di *Ancona*	„ 17
6.	**Janora**, R. I. T. di *Bari*	„ 40	21.	**Marzocchi**, R. I. T. di *Venezia*	„ 16
7.	**Brenta**, R. I. T. di *Torino*	„ 31	22.	**Mosca**, R. I. T. di *Torino*	„ 15
8.	**Bifano**, R. L. di *Benevento*	„ 30	23.	**De Lutti**, R. L. Foscarini di *Venezia*	„ 14
9.	**Piscitelli**, R. L. di *Benevento*	„ 30	24.	**Lopez**, R. I. T. di *Bari*	„ 14
10.	**Graziani**, R. I. T. di *Bologna*	„ 27	25.	**Legnani**, R. L. di *Pesaro*	„ 14
11.	**Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*	„ 26	26.	**De Bei**, R. I. T. di *Venezia*	„ 13
12.	**Marranghello**, R. L. di *Arezzo*	„ 25	27.	**Levi**, R. I. T. di *Torino*	„ 13
13.	**Terraccini**, R. L. Cavour di *Torino*	„ 23	28.	**Morbidelli**, R. I. T. di *Jesi*	„ 13
14.	**Savino**, R. I. T. di *Bari*	„ 22	29.	**D'Angelo**, R. S. delle min.ª di *Caltanis.*	„ 12
15.	**Belvedere**, R. I. T. di *Messina*	„ 21	30.	sig.ra **Pellizzari**, R. I. T. di *Cuneo*	„ 12

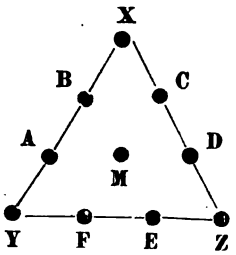
Il PREMIO ANNUALE sarà sorteggiato fra *i primi cinque;* assegnando i numeri da 1 a 20 al 1º, da 21 a 39 al 2º, da 40 a 57 al 3º, da 58 a 74 al 4º e dal 75 al 90 al 5º; il vincitore sarà designato dal 1º estratto del R. Lotto di Roma del 9 decembre 1905.

LA REDAZIONE.

SPIEGAZIONE DEL 9º GIUOCO A CONCORSO

Il giuoco proposto era il seguente:

Disporre i primi 10 numeri naturali ai punti A, B.... *della figura in modo che la somma* s *dei numeri* a, b,... *posti su ciascun lato del triangolo sia costante e sia eguale a quella dei numeri* x, y, z *e posti ai vertici,*



È evidente che, come conseguenza, si ha inoltre:

1º *che la somma di tutti i numeri, eccettuati quelli posti ai vertici e quello posto al centro, è* s, *ossia che la somma di tutti i numeri posti al perimetro è* 2s;

2º *che la somma dei due numeri posti nell'interno di ciascun lato è uguale al numero posto nel vertice opposto* (*per es.* a + b = z).

Trovare i valori possibili di s.

Trovare il numero totale delle soluzioni, indicando il modo per ricavarle effettivamente. G. C.-L.

Inviarono risoluzioni i sigg. **Belvedere, Giacometti** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bifano** e **Piscitelli M.**, R. L. di *Benevento*; **De Muro** e **Targiani**, R. I. T. di *Melfi*; **Giovanelli**, R. I. T. di *Forlì*; **Graziani**, R. I. T. di *Bologna*; **Janora** e **Savino**, R. I. T. di *Bari*; **Mammarella**, I. T. P. di *Ravenna*; **Maraziti** di *Piacenza*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Marelli**, R. I. T. di *Alessandria*; sig.na **Pellizzari**, R. I. T. di *Cuneo*; **Pontifex Solofrano** (?); **Riccioni**, R. I. T. di *Roma*; **Rivera** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*.

Fra queste la migliore ci è sembrata quella del sig.

RAFFAELE VERCELLIN

al quale inviamo il premio promesso.

Sono degne di nota le risoluzioni del sig. **Perez** e della sig.na **Pellizzari**.

Risoluzione.

Si deve avere

$$a+b+x+y=s \quad (1) \qquad c+d+x+s=s \quad (2)$$

$$e+f+y+z=s \quad (3) \qquad x+y+z=s. \quad (4)$$

Sommando membro a membro si ha

$$3(x+y+z)+a+b+c+d+e+f=4s.$$

Tenendo conto della (4) si ha:

$$a+b+c+d+e+f=s \quad (5) \qquad \text{e} \qquad a+b+c+d+e+f+x+y+z=2s. \quad (6)$$

(1) Di alcuni giuochi che presentavano una certa difficoltà abbiamo ammesso anche alcune risoluzioni non del tutto esatte o complete.

CORRISPONDENZA TRA IL TEOREMA DI "LEGENDRE" E QUELLO DI "STEWART"

E TRA I LORO CONTRARI

Annals of Math.

Mi propongo di mostrare come per mezzo della teoria delle figure inverse, tanto feconda di applicazioni, si possono far dipendere l'uno dall'altro i noti teoremi di LEGENDRE e di STEWART, e, quando sussistono, i loro contrari; nello stesso modo che il teorema di TOLOMEO (o il suo contrario) si può far dipendere dalla relazione tra le distanze di tre punti in linea retta (o non in linea retta). (1)

Non ho modo ora di riscontrare se le poche considerazioni che sto per svolgere siano tutte nuove; ritengo però che quella parte di questa nota che è in relazione con quanto esposi nell'articolo *Su una proprietà del quadrangolo convesso*, (2) nel quale diedi maggiore estensione al teorema contrario di quello di LEGENDRE, non sia stata trattata da altri.

Com'è noto, se N è il centro d'inversione; se A, B, C, ..., sono punti di una figura e A', B', C', ..., sono i punti corrispondenti della figura inversa, si ha

$$NA \,.\, NA' = p^2; \qquad NB \,.\, NB' = p^2; \ldots$$

$$A'B' = \frac{p^2 \,.\, AB}{NA \,.\, NB}; \qquad B'C' = \frac{p^2 \,.\, BC}{NB \,.\, NC}; \ldots$$

$$A\widehat{B}N = B'\widehat{A'}N; \ldots$$

e, com'è pur noto, ad una circonferenza corrisponde in generale una circonferenza; ad una circonferenza passante per N corrisponde una retta parallela alla tangente in N alla circonferenza data, e viceversa. (3)

Ciò premesso, sia ABCD un quadrangolo convesso inscritto in una circonferenza, e si costruisca la figura inversa, prendendo il punto A per centro d'inversione. I punti B', C', D' corrispondenti rispettivamente a B, C, D saranno in linea retta (C' sarà compreso tra B' e D') e si avrà

$$AB = \frac{p^2}{AB'}; \qquad AC = \frac{p^2}{AC'}; \qquad AD = \frac{p^2}{AD'};$$

$$BC = \frac{p^2 \,.\, B'C'}{AB' \,.\, AC'}; \qquad CD = \frac{p^2 \,.\, C'D'}{AC' \,.\, AD'}; \qquad BD = \frac{p^2 \,.\, B'D'}{AB' \,.\, AD'}.$$

Ora, nel quadrangolo ABCD, pel teorema di LAGRANGE, si ha

$$AB \,.\, BC \,.\, AC + CD \,.\, AD \,.\, AC = BC \,.\, CD \,.\, BD + AB \,.\, AD \,.\, BD. \text{ (4)}$$

---

(1) V. per es. BALTZER, *Planimetria*, 1867, pag. 192 e 194.

(2) V. "Supplemento al Periodico di Matematica", Anno VI, fasc. IV.

(3) V. BALTZER, *l. c.*, pag. 187 e seg. e LAZZERI, *Teoria geometrica dell'inversione*, "Periodico di Matematica", Anno XV, pag. 137 e seg.

(4) V. nota citata "Supplemento al Periodico di Matematica". Anno VI, fasc. IX.

1294-5

Sostituendo in questa eguaglianza in luogo di AB, BC, ... i valori dati precedentemente, dopo facili riduzioni, si ricava

$$B'C'.AD'^2 + C'D'.AB'^2 = B'D'.AC'^2 + B'C'.C'D'.B'D',$$

che esprime il noto teorema di STEWART.

Reciprocamente, dal teorema di STEWART potrebbe esser ricavato nello stesso modo il teorema di LEGENDRE.

***

Se nel quadrangolo convesso ABCD la somma dei due angoli opposti $A\widehat{B}C$, $C\widehat{D}A$ è maggiore della somma degli altri due, si ha

$$\frac{AC}{BD} > \frac{AB.AD + CB.CD}{AB.BC + DA.DC}, \text{ (1)}$$

ossia

$$AB.BC.AC + CD.AD.AC > BC.CD.BD + AB.AD.BD.$$

Se si costruisce la figura inversa prendendo il punto A per centro d'inversione, dalla precedente relazione si ricava l'altra

$$B'C'.AD'^2 + C'D'.AB'^2 > B'D'.AC'^2 + B'C'.C'D'.B'D'.$$

Ora osserviamo che, poichè per ipotesi la somma $A\widehat{B}C + C\widehat{D}A$ è maggiore di due retti, sarà anche $A\widehat{C'}B' + A\widehat{C'}D'$ maggiore di due retti; perciò il quadrangolo AB'C'D' è concavo (non intrecciato), e C' è il vertice dell'angolo concavo. E poichè, reciprocamente, se AB'C'D' è un quadrangolo concavo qualunque (non intrecciato) e C' è il vertice dell'angolo concavo, il quadrangolo ABCD risulta convesso e la somma dei due angoli ABC, CDA è maggiore di due retti, possiamo concludere:

" Se AB'C'D' è un quadrangolo concavo qualunque (non intrecciato) e C' è il vertice dell'angolo concavo si ha

$$B'C'.AD'^2 + C'D'.AB'^2 > B'D'.AC'^2 + B'C'.C'D'.B'D' \text{ ".}$$

Prof. C. CIAMBERLINI.

64ª QUISTIONE A CONCORSO

Se I è l'incentro d'un triangolo ABC, e A', B', C' sono i centri dei cerchi BIC, CIA, AIB, dimostrare che i punti medi dei segmenti A'I, B'I, C'I, B'C', C'A', A'B' e i punti d'incontro di AA', BB', CC' rispettivamente con B'C', C'A', A'B' sono nove punti di una stessa circonferenza.

C. CIAMBERLINI.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 31 dicembre 1905.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

(1) V. nota citata "Supplemento al Periodico di Matematica". Anno VI, fasc. IV.

ANCORA SULLA 60ª QUISTIONE A CONCORSO

Si divida una circonferenza qualunque in n *parti eguali e si numerino da* 0 *a* n — 1 *i punti di divisione; poscia, a partire dal punto* 0, *si congiungano questi punti, saltandone, alternativamente,* p—1 *e* q—1 *(ossia si congiunga il punto* 0 *col punto* p, *questo col punto* p+q, *questo col punto* 2p+q, *questo col punto* 2p+2q *e così di seguito). Si domandano le condizioni necessarie e sufficienti, cui devono soddisfare* p *e* q, *affinchè colla operazione precedente si ritorni al punto* 0, *dopo essere passati* una volta sola *per tutti gli altri punti. (Nel caso particolare di* p=q>1 *si hanno gli ordinari poligoni stellati, e la condizione necessaria e sufficiente è allora, com'è noto, che* p *sia inferiore ad* n *e primo con esso.)*

Si desidererebbe anche una generalizzazione del problema, supponendo che dei punti se ne saltino prima $p_1 - 1$, *poi* $p_2 - 1$, *poi* $p_3 - 1 \ldots$ *poi* $p_s - 1$ *(ben s'intende che questi* s *salti si debbano succedere sempre nello stesso ordine), e considerando anche l'ipotesi in cui qualcuno dei numeri* $p_1, p_2, \ldots p_s$ *sia negativo.*

G. Pesci.

Non essendo pervenute a questa direzione altre risoluzioni di questa 60ª quistione a concorso, e nemmeno quelle, che avremmo desiderate fossero dai loro autori rese intelligibili, dichiariamo chiuso il concorso, e pubblichiamo la risoluzione del caso particolare, fornitaci dal sig. R. M., che espressamente si dichiara fuori concorso.

Osserviamo in primo luogo che i numeri p, q e $p+q$ si possono supporre sempre minori di n, perchè se gli archi corrispondenti ai numeri p e $p+n$ partono da uno stesso punto di divisione della circonferenza giungono pure evidentemente ambedue in un altro stesso punto di divisione.

Studiamo poi separatamente i due casi di n dispari o pari.

1° Caso. — Sia $n = 2m+1$. Il problema evidentemente equivale a quest'altro, puramente numerico:

Dato $n = 2m + 1$, *determinare gl'interi* p *e* q *(positivi o negativi, ma non nulli) in modo che gli* n *numeri*

$$p,\ p+q,\ 2p+q,\ 2p+2q, \ldots, mp+(m-1)q,\ mp+mq,\ (m+1)p+mq,$$

divisi per n, *diano resti tutti disuguali, e l'ultimo dia per resto* 0.

È necessario dunque, in primo luogo che l'ultimo dei detti numeri sia multiplo di n, cioè che sia

$$(m+1)p + mq = nt,$$

ovvero

$$nt - mq = (m+1)p;$$

ma m ed n sono evidentemente primi fra loro, quindi quest'ultima equazione è soddisfatta solamente (vedi *Analisi indeterminata*) dai valori di t e q dati da

$$t = (m+1)p + m\theta, \qquad q = 2(m+1)p + n\theta$$

con θ intero positivo o negativo. Dovrà dunque essere necessariamente

$$q = p + n(\theta + p),$$

ovvero $p = q$ a meno di un multiplo di n.

Nel caso di n dispari il problema è, dunque, impossibile con p diverso da q; e con $p = q$ è possibile solamente se p è primo con n, perchè in tale ipotesi i

sopra scritti numeri diventano i successivi multipli di p secondo i numeri da 1 ad n, i quali, divisi per n, dànno resti distinti soltanto se è n primo con p. Si ritrova così la condizione per la costruzione dell'ordinario poligono stellato.

2° Caso. — Sia $n = 2m$. In questo secondo caso il problema è identico a quello considerato nel caso precedente, ma l'ultimo dei numeri scritti di sopra è ora $m(p+q)$; dovrà dunque essere necessariamente

$$m(p+q) = 2mt$$

con t intero, ovvero

$$p + q = 2t,$$

e ciò dimostra che p e q devono essere entrambi pari, o entrambi dispari. Ma entrambi pari non possono essere, altrimenti i detti n numeri sarebbero tutti pari e divisi per n, anch'esso pari, darebbero n resti tutti pari, e perciò non tutti disuguali; quindi, affinchè il problema sia possibile, è necessario che p e q siano dispari.

Questa condizione però non è sufficiente, come è facile vedere; dimostriamo perciò il seguente

Teorema. — *Se è* $n = 2m$, *e* p *e* q *sono entrambi dispari, affinchè gli* n *numeri*

$$p,\ p+q,\ 2p+q,\ 2p+2q, \ldots, mp+(m-1)q,\ mp+mq,$$

divisi per n, *diano resti tutti disuguali, è condizione necessaria e sufficiente che sia* m *primo con* $\frac{1}{2}(p+q)$.

La condizione è sufficiente. Infatti, poichè p e q sono dispari, fra i soprascritti numeri quelli della forma $k(p+q)$ sono tutti pari, e quelli della forma $k(p+q)+p$ sono tutti dispari; e perciò i primi, divisi per n pari, dànno sicuramente resti diversi da quelli dati dai secondi. Resta dunque a provare che se m è primo con $\frac{1}{2}(p+q)$, due numeri, ambedue della prima, o ambedue della seconda forma, divisi per n, dànno resti distinti, ovvero che la differenza

$$(k_1 - k_2)(p+q) = 2(k_1 - k_2)\tfrac{1}{2}(p+q),$$

con k_1, k_2, ambedue minori di m, non è mai un multiplo di n. Difatti, se ciò fosse, dovrebbe m dividere il prodotto

$$(k_1 - k_2)\tfrac{1}{2}(p+q);$$

ma m è primo con $\frac{1}{2}(p+q)$, quindi dovrebbe m dividere $k_1 - k_2$, e ciò è impossibile essendo $k_1 - k_2 < m$.

La condizione è necessaria, cioè: se gli n numeri sopra scritti, divisi per n, dànno resti distinti, necessariamente è m primo con $\frac{1}{2}(p+q)$.

Infatti, se ciò si nega, indicando con d un loro divisor comune, si avrebbe

$$\tfrac{1}{2}(p+q) = l_1 d \qquad m = l_2 d$$

con l_1, l_2 interi, e perciò

$$(k_1 - k_2)(p+q) = 2(k_1 - k_2)\tfrac{1}{2}(p+q) = 2(k_1 - k_2)\, l_1 d.$$

Ma $k_1 - k_2$ può assumere tutti i valori da 1 ad $m-1$, quindi per $k_1 - k_2 = l_2 < m$ si avrebbe

$$(k_1 - k_2)(p+q) = 2 l_2 l_1 d = l_1 \,.\, 2m,$$

cioè la differenza fra due dei numeri scritti disopra risulterebbe divisibile per $n = 2m$, ovvero essi due numeri, divisi per n, darebbero resti uguali, contrariamente all'ipotesi.

Concludendo: se n è dispari, il problema è possibile soltanto nell'ipotesi di $p = q$, e p primo con n; e se n è pari, il problema è possibile soltanto se p e q sono ambedue dispari, ed è $\frac{1}{2}n$ primo con $\frac{1}{2}(p+q)$.

R. M.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

677, 681, 682, 683, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 692, 693 E 697

677. *Si consideri un quadrangolo inscrittibile in un circolo e circoscrittibile in un altro; indicando*

con R *ed* r *il raggio del circolo circoscritto e il raggio del circolo inscritto,*
con O *ed* I *i centri rispettivi dei circoli stessi,*
con L *il punto d'intersezione delle diagonali interne,*
con α *e* β *due angoli consecutivi del quadrangolo,*

si ha

$$\text{(I)} \qquad \frac{\overline{OI}^2}{R^2} = \frac{1 - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{1 + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}, \qquad \text{(II)} \qquad \frac{\overline{OL}^2}{R^2} = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\beta,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\overline{IL}^2}{r} = 1 - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

G. Pesci.

Le dimostrazioni pervenute sono state cinque; la più completa è quella del sig. **Vercellin** (R. I. T. *Torino*), che qui riportiamo, con poche modificazioni.

Supponiamo che il lettore abbia presente la soluzione della 58ª quistione a concorso e l'avvertiamo che a questa appartengono i §§ citati in seguito. (¹)

Risoluzione. — Dai quadrangoli omotetici $K_aK_bK_cK_d$, $I_aI_bI_cI_d$ (§ 10) si ricava

$$LI : IJ = K_aK_b : I_aI_b;$$

per cui, essendo

$$\overline{K_aK_b} = 2\,\overline{BK_a} \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta; \qquad \overline{I_aI_b} = \overline{BI_a} + \overline{BI_b} = (\overline{BP_a} + \overline{BP_b}) : \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta,$$

$$\overline{BK_a} = \frac{ab}{a+c}, \qquad \overline{BP_a} = \overline{AK_a} = \frac{ad}{a+c}, \qquad \overline{BP_b} = \overline{CK_b} = \frac{bc}{a+c},$$

si ha

$$\text{(1)} \qquad \frac{LI}{IJ} = \frac{2ab \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\beta}{ad + bc}.$$

Ma dalle note formule che dànno gli angoli in funzione dei lati di un quadrangolo inscrittibile, nel caso che il quadrangolo stesso sia anche circoscrittibile, si ha

$$\text{(2)} \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{bc}{ad+bc}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\dfrac{dc}{ab+cd}}, \end{cases} \quad \text{(3)} \begin{cases} \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{ad}{ad+bc}} \\ \cos\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\dfrac{ab}{ab+cd}}, \end{cases} \quad \text{(4)} \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{abcd}}{ad+bc} \\ \operatorname{sen}\beta = \dfrac{2\sqrt{abcd}}{ab+cd}; \end{cases}$$

quindi la (1) si trasforma nell'altra

$$\frac{LI}{IJ} = \frac{2abcd}{(ad+bc)(ab+cd)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{2},$$

da cui, ricordando che (§ 10, Cor. I)

$$\overline{IJ} = 2\,\overline{IO},$$

(¹) Avremmo desiderata una dimostrazione indipendente sia dalla relazione, poco nota, fra i due raggi e la distanza dei centri, sia dalla conoscenza della retta p; ma tale procedimento (che è appunto quello che ci condusse a rilevare, per la prima volta, l'esistenza della retta p) non è stato seguito da nessuno.

si deduce intanto

(5) $$\overline{\mathrm{LI}} = \overline{\mathrm{OI}} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Si ha pure (§ 5)

$$\cos\varphi_a : \cos\varphi_c = a : c$$

ed anche

$$\cos(\varphi_a - \varphi_c) = \cos(\alpha - \beta),$$

da cui si deduce facilmente

(6) $$\cos^2\varphi_a = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)}{(a+c)^2 - 4ac\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)};$$

ora, si ha

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 = \overline{\mathrm{M_aK_a}}^2 : \cos^2\varphi_a$$

$$\overline{\mathrm{M_aK_a}} = \frac{a}{2} - \overline{\mathrm{BK_a}} = \frac{a}{2} - \frac{ab}{a+c} = \frac{a(d-b)}{2(a+c)},$$

quindi, per la (6),

(7) $$\overline{\mathrm{OI}}^2 = \frac{(d-b)^2\left\{(a+c)^2 - 4ac\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right\}}{4(a+c)^2\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)}.$$

Ma dalle (2) e (3) si ricava

(8) $$\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta) = (b\pm d)\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac}}, \\ \cos\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta) = (a\mp c)\sqrt{\dfrac{bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}; \end{cases}$$

e dalla nota formula che dà R in funzione dei lati di un quadrangolo inscrittibile, nel caso particolare che il quadrangolo sia anche circoscrittibile, si ha

(9) $$\mathrm{R}^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+cb)}{16\,abcd}.$$

sarà dunque [1]

(10) $$\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) = \frac{(ac+bd)(b^2-d^2)^2}{4\mathrm{R}^2(ab+cd)(ad+bc)}.$$

Per cui, sostituendo, nella (7)

$$\frac{\overline{\mathrm{OI}}^2}{\mathrm{R}^2} = \frac{(ab+cd)(ad+bc) - 4abcd}{(ac+bd)(a+c)^2},$$

ma

(11) $$(ac+bd)(a+c)^2 = (ab+cd)(ad+bc) + 4abcd,$$

quindi [2]

(12) $$\frac{\overline{\mathrm{OI}}^2}{\mathrm{R}^2} = \frac{(ab+cd)(ad+bc) - 4abcd}{(ab+cd)(ad+bc) + 4abcd}.$$

Dalla nota formula

$$r^2 = \frac{abcd}{(a+c)^2}$$

e dalla (9) si ha poi

$$\frac{\mathrm{R}^2}{r^2} = \frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)(a+c)^2}{16a^2b^2c^2d^2}$$

quindi, per la (11) e per la (4),

(13) $$\frac{\mathrm{R}^2}{r^2} = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}.$$

---

(1) Alla seconda della (8) e alla (10) il sig. Vercellin arriva con considerazioni geometriche; ma a noi pare che sia meglio dedurle dalla (2) e (3), a cui si è già ricorso per avere la (5).

(2) Il sig. Vercellin dice, senz'altro che, sostituendo nella (7) i valori dati dalla (10) e dalla seconda della (8) si ha la (12); a noi pare che questo passaggio sia troppo sollecito, perchè bisogna ricorrere alla (11), la quale non è evidente e può essere suggerita solo dalla conoscenza del risultato a cui si vuole arrivare.

Posto tutto ciò, dalla (12), ricordando la (4), si ha immediatamente

$$\frac{\overline{OI}^2}{R^2} = \frac{1 - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{1 + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}, \quad \text{che è la (I).}$$

Inoltre dalla (5) si ha

$$\overline{OL} = \overline{OI} + \overline{IL} = \overline{OI}\,(1 + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta),$$

da cui

$$\frac{\overline{OL}^2}{R^2} = \frac{\overline{OI}^2}{R^2}(1 + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta)^2$$

e quindi, per la (I),

$$\frac{\overline{OL}^2}{R^2} = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\beta, \quad \text{che è la (II).}$$

E, finalmente, dalla (5) stessa si ricava

$$\frac{\overline{LI}^2}{r^2} = \frac{\overline{OI}^2 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\beta}{r^2} = \frac{\overline{OI}^2}{R^2} \cdot \frac{R^2}{r^2} \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\beta,$$

e quindi, per la (I) e per la (13),

$$\frac{\overline{LI}^2}{r^2} = 1 - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta, \quad \text{che è la (III).}$$

Dopo questa soluzione viene quella del sig. **Aloysio** (R. I. T., *Aquila*). Egli comincia dal dimostrare, con opportune considerazioni geometriche, la (13); poi, ammessa la relazione fra R, r e OI, che trasforma nell'altra

$$r^2(r^2 + 4R^2) = (R^2 - \overline{OI}^2 + r)^2,$$

asserisce, senz'altro, che, *eliminando* r^2 *fra questa e la* (13) *ed eseguendo i calcoli e le riduzioni, si ha la* (I). Che così debba essere è, evidentemente, certo, ma i calcoli e le riduzioni occorrenti, non sono semplicissimi e non bisognava sottintenderli. Dimostra poscia che si ha

$$\frac{\overline{OL}^2}{R^2} = 1 - \frac{\overline{AL} \cdot \overline{BL}}{R^2}, \tag{14}$$

e da questa, con formule e trasformazioni rapidissimamente accennate, afferma che si deduce la (II). Ammettendo poi l'allineamento più volte ricordato, conclude giustamente, che dalla (I) e dalla (II) si ottiene la (III).

Viene poscia la soluzione del sig. **Semenza** (R. I. T. *Milano*). Egli con un ragionamento, a dir il vero, ingegnoso e breve, ma poco chiaro e molto trascurato anche nella forma, dimostra in sostanza, che

$$\frac{r^2}{\overline{IL}^2}\left[\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) + \cos^2 \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right] = 1,$$

e questa, senz'altro, considera equivalente alla (III). Per la (II), dimostra la (14), *dalla quale è facilissimo dedurre la* (II); così egli dice, senza neppur accennare (come ha fatto il sig. Aloysio) alle varie formule e alle varie trasformazioni cui perciò, bisogna ricorrere. Della (I), che è la meno facile a dimostrare, neppur una parola.

Il sig. **Signorini** (R. L. *Arezzo*) dimostra prima la (13), basandosi sulle espressioni di a, b, c, d in funzione di r, α, β; ma poi, per dimostrare le tre proposte, stabilisce un sistema di tre equazioni a tre incognite, di secondo grado ognuna; e giunto a questo punto lascia al lettore la cura di risolvere il sistema stesso e di fare tutte le trasformazioni necessarie. E questa egli crede che sia una dimostrazione!

E il sig. **Janora** (R. I. T. di *Bari*) dimostra prima, con un procedimento molto semplice, le due formule

$$R^2 = \frac{ac + bd}{4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}, \qquad r = \frac{ab}{b + d} \tan \tfrac{1}{2} \beta;$$

poi osserva che

$$\overline{OI}^2 = \left(\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} - r\right)^2 + \left(r \operatorname{ctn} \frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2}\right)^2; \tag{15}$$

e, giunto a questo punto, conclude, senz'altro: *eseguendo i calcoli e dividendo per* R^2 *si vedrà che* a, b, c, d *scompaiono e si otterrà la* (I). *Analogo procedimento si avrà per la* (II) *e per la* (III). Per convincere l'egregio solutore che quanto egli sottintende è tutt'altro che facile e breve, gli proponiamo la questione 701, che ci si è incidentalmente presentata nel seguire il procedimento da lui indicato soltanto.

G. Pesci.

681. *Tre punti* A_1, B_1, C_1 *sono situati rispettivamente sui lati* BC, CA, AB *d'un triangolo* ABC. *Essendo* A', B', C' *i punti d'incontro delle rette* AA_1, CC_1; AA_1, BB_1; BB_1, CC_1; *si domanda di dimostrare la relazione*

$$AA'.BB'.CC' - AB'.BC'.CA' = \frac{\Delta}{\Delta_1} a'b'c',$$

essendo Δ, Δ_1, a', b', c' *rispettivamente l'area del triangolo* ABC, *quella del triangolo* A'B'C', *e le lunghezze dei lati di quest'ultimo.*

A. Tonali.

Risoluzione del sig. **Brenta**, R. I. T. di *Torino*.

Si ha

$$AA' = c' + AB' \qquad BB' = a' + BC' \qquad CC' = b' + CA',$$

e moltiplicando membro a membro

$$AA'.BB'.CC' = a'b'c' + c'BC'.CA' + a'AB'.CA' + b'AB'.BC' + a'b'AB' + \\ + a'c'CA' + b'c'BC' + AB'.BC'.CA$$

cioè

$$AA'.BB'.CC' - AB'.BC'.CA' = a'b'c' + a'CA'(AB' + c') + b'AB'(BC' + a') + \\ + c'BC'(CA' + b') = a'b'c' + a'CA'.AA' + b'AB'.BB' + c'BC'.CC' = \\ = a'b'c'\left(1 + \frac{CA'.AA'}{b'c'} + \frac{AB'.BB'}{a'c'} + \frac{BC'.CC'}{a'b'}\right).$$

Siccome il triangolo BC'C ha l'angolo in C' supplementare di quello del triangolo A'B'C' si ha

$$\frac{BC'C}{A'B'C'} = \frac{BC'.C'C}{B'C'.C'A'} = \frac{BC'.C'C}{a'.b'}$$

e quindi

$$BC'C = \Delta_1 . \frac{BC'.C'C}{a'.b'}.$$

Ragionando in modo analogo si ha

$$AB'B = \Delta_1 . \frac{AB'.BB'}{a'c'} \qquad CA'A = \Delta_1 . \frac{CA'.AA'}{b'c'}.$$

Poichè $BC'C + AB'B + CA'A = \Delta - \Delta_1$, facendo la somma si ha

$$\Delta - \Delta_1 = \Delta_1 \left(\frac{BC'.CC'}{a'b'} + \frac{AB'.BB'}{a'c'} + \frac{CA'.AA'}{b'c'}\right)$$

e quindi

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = 1 + \frac{BC'.CC'}{a'b'} + \frac{AB'.BB'}{a'c'} + \frac{CA'.AA'}{b'c'}$$

perciò

$$AA'.BB'.CC' - AB'.BC'.CA' = \frac{\Delta}{\Delta'} a'b'c'. \qquad \text{c. v. d.}$$

Altre risoluzioni dei sigg. **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*.

682. *Essendo* A', B', C' *i punti di contatto dei lati d'un triangolo* ABC *col circolo inscritto in esso, dimostrare la relazione*

$$A'B'.B'C'.A'C' = \frac{2r^2S}{R}$$

S, *r*, R *essendo l'area, il raggio del circolo inscritto, e il raggio del circolo circoscritto al triangolo* ABC.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. **Janora**, R. I. T. di *Bari*.

Se α, β, γ sono i tre angoli ed a, b, c i lati ad essi opposti del triangolo ABC, si ha

$$A'B' = 2r\cos\tfrac{1}{2}\gamma, \qquad B'C' = 2r\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad A'C' = 2r\cos\tfrac{1}{2}\beta,$$

e quindi

$$A'B'.B'C'.A'C' = 8r^3\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Ed ora osservando che è

$$S = \frac{abc}{p}\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma, \ (^1)$$

e

$$R = \frac{abc}{4S} \qquad S = rp$$

si deduce

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{pS}{abc} = \frac{p}{4R} = \frac{S}{4Rr}$$

e per conseguenza

$$A'B'.B'C'.C'A' = 8r^3\frac{S}{4Rr} = \frac{2r^2S}{R}.$$

Risolutori i sigg. **Bertoglio**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Mosca**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **De Bei**, **Marzocchi**, **Rivera** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*.

683. *Essendo* H, G *l'ortocentro ed il baricentro di un triangolo* ABC, e A', B', C' *i punti d'incontro della retta* HG *colle rette* BC, CA, AB, *dimostrare la relazione*

$$3HG\left(\frac{1}{HA'} + \frac{1}{HB'} + \frac{1}{HC'}\right) = 8 - \frac{1}{\cos A\cos B\cos C}.$$

E.-N. Barisien.

La formula era errata, poichè il secondo membro era $4 + \frac{1}{\cos A\cos B\cos C}$.

Il sig. **Signorini**, R. L. di *Arezzo* e il sig. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia* hanno corretto l'errore nel modo che qui pubblichiamo. I sigg. **Santarella** e **Vacchi**, si sono limitati a dimostrare l'errore.

Conducendo per G una parallela a BC si ha per il teorema di Talete

$$3\frac{HG}{HA'} = 3\frac{HH_a - \frac{1}{3}AH_a}{HH_a} = 3 - \frac{AH_a}{HH_a}$$

(1) V. *Repertorio di matematiche e fisica*, pag. 81.

e siccome

$$\frac{AH_a}{HH_a} = \frac{AH_a}{BH_a} \cdot \frac{BH_a}{HH_a} = \tan B \tan C,$$

si ricava

$$3\frac{HG}{HA'} = 3 - \tan B \tan C$$

e similmente

$$3\frac{HG}{HB'} = 3 - \tan C \tan A$$

$$3\frac{HG}{HC'} = 3 - \tan A \tan B$$

Sommando queste tre eguaglianze si ha

$$3HG\left(\frac{1}{HA'} + \frac{1}{HB'} + \frac{1}{HC'}\right) =$$

$$= 9 - \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos A + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos C}{\cos A \cos B \cos C} =$$

$$= 9 - \frac{\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C}{2 \cos A \cos B \cos C} = (^1)$$

$$= 8 + \frac{2 \cos A \cos B \cos C - \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C}{2 \cos A \cos B \cos C}.$$

Ma si ha

$$2 \cos A \cos B \cos C - \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C =$$

$$= -2 \cos (B + C) \cos B \cos C - \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B - \operatorname{sen}^2 C =$$

$$= -2 \cos^2 B \cos^2 C + 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos B \cos C - \operatorname{sen}^2 A - 2 + \cos^2 B + \cos^2 C =$$

$$= \cos^2 B \operatorname{sen}^2 C + \operatorname{sen}^2 B \cos^2 C + 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos B \cos C - \operatorname{sen}^2 A - 2 =$$

$$\operatorname{sen}^2 (B + C) - \operatorname{sen}^2 A - 2 = \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 A - 2 = -2,$$

e quindi

$$3HG\left(\frac{1}{HA'} + \frac{1}{HB'} + \frac{1}{HC'}\right) = 8 - \frac{1}{\cos A \cos B \cos C}.$$

685. *Fra tutti i triangoli rettangoli che hanno la stessa ipotenusa qual'è quello nel quale la somma dei cateti è massima.*

De Bei.

Risoluzione del sig. **Marzocchi**, R. I. T. di *Venezia*.

Si ha

$$x^2 + y^2 = a^2$$

essendo x, y i cateti ed a l'ipotenusa. Allora

$$(x + y)^2 = a^2 + 2xy$$

da cui si vede che $(x+y)$ è massimo quando è massimo il prodotto xy oppure x^2y^2. Siccome la somma $x^2 + y^2$ è costante ed eguale ad a^2, il prodotto x^2y^2 è massimo quando $x^2 = y^2$ ossia $x = y$; perciò fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa quello in cui è massima la somma dei cateti è il triangolo rettangolo isoscele.

Risolutori i sigg. **Belvederi**, R. L. Galvani di *Bologna*; **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bertoglio**, **Brenta**, **Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Di Leonardo**, R. I. T. di *Melfi*; **Grampa**, Sem. Arciv. di *Monza*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Pomini** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Rivera** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*; **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*.

(1) Lazzeri G., *Trigonometria piana*, pag. 57, formula (40).

686. *Risolvere il sistema*

$$4x^2 + 5xy + y^2 = 0, \qquad x^2 - 8xy + 4y^2 = 1.$$

De Bei.

La prima equazione si può scrivere

$$4(x+y)(x+\tfrac{1}{4}y) = 0,$$

che si scinde nelle due

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + \tfrac{1}{4}y = 0, \end{cases}$$

da cui rispettivamente

$$\begin{cases} x = -y \\ x = -\tfrac{1}{4}y. \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione ad x il valore $-y$ si ha

$$y^2 + 8y^2 + 4y^2 = 1$$

d'onde

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{13}} \qquad x = \mp\sqrt{\frac{1}{13}}.$$

Sostituendo ad x il valore $-\frac{1}{4}y$ si ha

$$\frac{1}{16}y^2 + 2y^2 + 4y^2 = 1,$$

e quindi

$$97y^2 = 16, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{16}{97}},$$

$$x = \mp\sqrt{\frac{1}{97}}.$$

Risolutori i sigg. **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bertoglio**, **Brenta**, **Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Di Leonardo**, R. I. T. di *Melfi*; **Grampa**, Sem. Arciv. di *Monza*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Pomini** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **De Bei**, **Rivera** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*.

687. *Risolvere il sistema*

$$xy^2 + x^2y = a \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b.$$

De Bei.

Risoluzione del sig. **Vacchi**, R. I. T. *Venezia*.

Il sistema dato diventa

$$\begin{cases} xy(x+y) = a \\ x + y = b\,xy, \end{cases}$$

da cui, moltiplicando membro a membro,

$$x + y = \pm\sqrt{ab},$$

e quindi

$$xy = \pm\sqrt{\frac{a}{b}},$$

ed essendo z l'incognita dell'equazione di secondo grado avente per radici x ed y, le soluzioni del sistema sono date dalle equazioni

$$z^2 \pm \sqrt{ab}\,z \pm \sqrt{\frac{a}{b}} = 0$$

e quindi

$$z = \frac{\pm\sqrt{ab} \pm \sqrt{ab \pm 4\sqrt{\frac{a}{b}}}}{2}.$$

Risolutori i sigg. **Belvederi**, R. L. Galvani di *Bologna*; **Belvedere e Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bertoglio, Brenta, Cernuschi, Mosca**, R. I. T. e **Terraccini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Grampa**, Sem. Arciv. di *Monza*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello e Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **De Bei, Marzocchi, Rivera e Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Mattioli**, I. T. P. di *Treviso*; **Pomini e Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*.

688. *Risolvere il sistema*

$$x^y = y^x \qquad x^p = y^q.$$

De Bei.

Risoluzione del sig. **Bertoglio**, R. I. T. di *Torino*.

Prendendo i logaritmi le equazioni date divengono

$$y \log x = x \log y \qquad (1) \qquad\qquad p \log x = q \log y. \qquad (2)$$

Dividendo a membro a membro

$$\frac{y}{p} = \frac{x}{q}, \qquad px = qy, \qquad x = \frac{qy}{p}, \qquad (3)$$

e applicando i logaritmi

$$\log x = \log q + \log y - \log p.$$

Sostituendo nella (1), essa diventa

$$y(\log q + \log y - \log p) = \frac{qy}{p} \log y$$

e questa si scinde nelle due

$$\begin{cases} y = 0 \\ p \log q + p \log y - p \log p = q \log y \end{cases}$$

la seconda delle quali può scriversi

$$(p - q) \log y = p \log \left(\frac{p}{q}\right)$$

e quindi

$$y = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}$$

e dalla (3)

$$x = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}$$

Risolutori i sigg. **Belvedere e Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bertoglio, Cernuschi, Mosca**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Grampa**, Sem. Arciv. di *Monza*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello e Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Marzocchi, Rivera e Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Mattioli**, R. I. T. di *Treviso*; **Pomini e Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*; **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*.

689. *Costruire un triangolo essendo dati il raggio del cerchio circoscritto, una mediana e la sua distanza dall'ortocentro. Discussione.*

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*.

Sia ABC il triangolo richiesto, H l'ortocentro, O il circumcentro, K ed L le proiezioni dei punti H ed O sulla mediana M*a*.

Per una nota proprietà di geometria elementare è

$$AH = 2\, OM_a$$

e quindi essendo simili i due triangoli rettangoli AKH ed MaOL sarà

$$HK = 2\,OL.$$

Ma HK è noto dunque è noto anche OL ed il triangolo AOMa si potrà facilmente costruire, conoscendosi di esso il lato OA, il lato AMa e l'altezza corrispondente OL. Costruito il triangolo AOMa (e basta perciò fissare la AMa, condurre alla distanza OL la parallela a questa retta e descrivere il cerchio di centro A e raggio AO che incontrando la parallela in O determinerà il terzo vertice del triangolo AOMa) si tracci il cerchio di centro O e raggio OA, e si conduca la corda BC per modo che resti diviso per metà dal punto Ma, e si congiungano i punti A, B, C. Il triangolo ABC è quello domandato. La *dimostrazione* è ovvia.

Si otterranno due, uno o nessun triangolo secondo che si potranno con gli elementi costruire due, uno o nessun triangolo AOMa.

Risolutori i sigg. **Bertoglio, Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*; **De Bei** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*.

690. *Risolvere l'equazione*

$$x^6 + x^5 + x^4 + (1 - a)\,x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 = 0.$$

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.

Divido tutti i termini per x^3

$$x^3 + \frac{a^3}{x^3} + x^2 + \frac{a^2}{x^2} + x + \frac{a}{x} = a - 1.$$

Posto $x + \dfrac{a}{x} = m$, si ha

$$x^2 + \frac{a^2}{x^2} = m^2 - 2a, \qquad x^3 + \frac{a^3}{x^3} = m^3 - 3am,$$

e l'equazione data si trasforma nella seguente

$$m^3 + m^2 - m\,(3a - 1) = 3a - 1;$$

che si può scrivere

$$(m + 1)\,(m^2 - 3a + 1) = 0.$$

Questa è soddisfatta per $m = -1$ e per $m^2 = 3a - 1$, ossia

$$m = \pm\sqrt{3a - 1}.$$

Risolvo ora le equazioni

1°. $x + \dfrac{a}{x} = -1$; ossia $x^2 + x + a = 0.$

2°. $x + \dfrac{a}{x} = \sqrt{3a - 1}$; „ $x^2 - \sqrt{3a - 1}\,x + a = 0.$

3°. $x + \dfrac{a}{x} = -\sqrt{3a - 1}$; „ $x^2 + \sqrt{3a - 1}\,x + a = 0,$

ed ho rispettivamente

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3a - 1} \pm i\sqrt{a + 1}}{2}$$

$$x = \frac{-\sqrt{3a - 1} \pm i\sqrt{a + 1}}{2}.$$

Risolutori i sigg. **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bertoglio, Brenta, Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **De Bei, Marzocchi, Rivera** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Pomini** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*.

692. *Eseguire la somma seguente*

$$\Sigma\, rx^r = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n.$$

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*.

Indicando con S la somma da calcolare, ho

$$S = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n. \tag{1}$$

Moltiplico ambo i membri per x, ed ho

$$Sx = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots + nx^{n+1}. \tag{2}$$

Sottraendo la (2) dalla (1) ho

$$S - Sx = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - nx^{n+1}$$

ossia

$$S + nx^{n+1} - Sx = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n. \tag{3}$$

Moltiplico ancora per x, ed ho

$$Sx + nx^{n+2} - Sx^2 = x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n+1}. \tag{4}$$

Sottraggo inoltre la (4) dalla (3), ed ho

$$S + nx^{n+1} - 2\,Sx - nx^{n+2} + Sx^2 = x - x^{n+1},$$

cioè

$$S\,(1 - 2x + x^2) + nx^{n+1}\,(1 - x) = x\,(1 - x^n)$$

da cui

$$S = \frac{x\,[1 - x^n - nx^n\,(1 - x)]}{(1 - x)^2} = \frac{x\,(1 - x^n)}{(1 - x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1 - x}.$$

Risolutori i sigg. **Bertoglio**, **Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **De Bei**, **Marzocchi** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Pomini**, e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*.

693. *Data l'equazione generale di 4° grado*

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

determinare la relazione che deve legare i suoi coefficienti, affinchè due delle sue radici siano reciproche, e risolvere l'equazione quando ha luogo tale relazione.

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **Marranghello**, R. L. di *Arezzo*.

Siano $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ le radici dell'equazione, e sia $x_2 = \frac{1}{x_1}$. Avremo allora

$$x_1 + \frac{1}{x_1} + x_3 + x_4 = -p; \quad (1) \qquad 1 + \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = q; \quad (2)$$

$$x_3 + x_4 + \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)x_3x_4 = -r; \quad (3) \qquad x_3x_4 = s. \quad (4)$$

Sostituendo nelle (2) e (3) il valore di x_3x_4 dato dalla (4), si ha

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)(x_3 + x_4) = q - s - 1; \quad (\alpha) \qquad x_3 + x_4 + s\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) = -r; \quad (\beta)$$

e allora, sottraendo la (β) dalla (1) e poi dividendo per $1 - s$, si ha

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{r - p}{1 - s}, \qquad \text{e per conseguenza} \qquad x_3 + x_4 = \frac{ps - r}{1 - s}.$$

Moltiplicando membro a membro e confrontando colla (2), si ha

$$\frac{r-p}{1-s}\cdot\frac{ps-r}{1-s}=q-s-1\,; \qquad \text{cioè} \qquad (r-p)(ps-r)=(1-s)^2(q-s-1),$$

e questa è la relazione cercata.

Per trovare le radici, si hanno i due sistemi

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{r-p}{1-s}\,; \\ x_1x_2=1\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3+x_4=\dfrac{ps-r}{1-s}\,; \\ x_3x_4=s\,; \end{cases}$$

che dànno

$$x_1=\frac{r-p+\sqrt{(r-p)^2-4(1-s)^2}}{2(1-s)}, \qquad x_2=\frac{r-p-\sqrt{(r-p)^2-4(1-s)^2}}{2(1-s)}\,;$$

$$x_3=\frac{ps-r+\sqrt{(ps-r)^2-4s(1-s)^2}}{2(1-s)}, \qquad x_4=\frac{ps-r-\sqrt{(ps-r)^2-4s(1-s)^2}}{2(1-s)}.$$

Risolutori i sigg. **Bertoglio, Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **De Bei, Marzocchi** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Pomini** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*.

697. *Essendo* P *la proiezione del baricentro di un triangolo* ABC *sul lato* BC, *dimostrare la relazione*

$$3\,(\overline{CP}^2+\overline{BP}^2)=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione. — (Nell'enunciato erano incorsi degli errori di stampa).

Supposto $c \geqslant b$, si ha

$$c^2-b^2=2\,M_aH_a\,.\,a \tag{1}$$

$$CP+PB=a, \qquad BP-CP=\tfrac{1}{3}\,M_aH_a$$

e quindi

$$\overline{BP}^2-\overline{CP}^2=\tfrac{1}{3}\,M_aH_a\,.\,a. \tag{2}$$

Confrontando le (1), (2), si deduce

$$3\,(\overline{BP}^2-\overline{CP}^2)=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2.$$

Risolutori i sigg. **Bertoglio, Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **De Bei, Marzocchi, Rivera** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*.

QUISTIONI DA RISOLVERE

701. Dimostrare che, se

$$a+c=b+d,$$

l'espressione

$$(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)-4a^2bcd$$

si può mettere sotto la forma di un quadrato.

G. Pesci.

702. Se p è un numero primo >7 del quale indichiamo con d le decine e con u le unità; e se $N=10D+U$ è un numero intero qualunque, N è divisibile per p quando lo sia il numero $Du-Ud$.

U. Fornari.

703. Costruire un poligono in modo che i suoi n vertici sieno situati su altrettante rette $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ed i suoi lati siano paralleli ad n rette $b_1, b_2, \ldots, b_n$ rispettivamente. G. L.

704. Dimostrare geometricamente che in ogni quadrilatero inscritto in un circolo, avente le diagonali perpendicolari, la distanza del centro del circolo da un lato è la metà della lunghezza del lato opposto. E.-N. Barisien.

705. In ogni triangolo la somma dei quadrati dei lati sta al quadrato della loro somma, come la somma delle cotangenti degli angoli sta al prodotto di quelle dei semiangoli. Casi particolari.

706. Essendo A_1 il punto in cui la parallela al lato BC di un triangolo acutangolo ABC, condotta pel vertice A, incontra la perpendicolare al lato medesimo nel suo punto medio, A_2 il simmetrico di A_1 rispetto a BC; B_1, B_2; C_1, C_2 i punti ottenuti nella stessa maniera rispetto ai lati AC, AB; e S, S_1, S_2, S' indicando rispettivamente le aree dei triangoli ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ e dell'ortocentrico di ABC, si ha

$$S_2 - S_1 = 4(S_1 - S') = 3S.$$

Come si modifica la relazione quando il triangolo è ottusangolo?

R. Vercellin.

707. Dimostrare che se i valori a, b, c; a', b', c' dei lati di due triangoli soddisfano alle due relazioni

$$(m^2+n^2+p^2)(a^2+b^2+c^2) = (ma+nb+pc)^2,$$
$$(m^2+n^2+p^2)(a'^2+b'^2+c'^2) = (ma'+nb'+pc')^2,$$

dove m, n, p sono numeri positivi, i due triangoli sono simili.

708. Se ABCD è un quadrangolo convesso inscritto in un cerchio, dimostrare che, se

$$BC \,.\, AD = AB \,.\, CD,$$

è anche

$$AC^2(2AB^2+2AD^2-BC^2) = 4 \,.\, AB^2 \,.\, AC^2,$$

e viceversa. C. Ciamberlini.

709. Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè le tre radici di un'equazione cubica siano in progressione geometrica. Quando tale condizione sia verificata risolvere l'equazione.

710. Risolvere l'equazione

$$\begin{cases} x^3+x^2y-xy^2-y^3=3, \\ 2x^3-3x^2y+3xy^2-2y^3=36. \end{cases}$$

C. De Bei.

N. B. — Le soluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 31 dicembre 1905.

Si pregano vivamente i signori risolutori di *inviare ogni quistione o giuoco in foglio separato, scrivendo su ciascuno il proprio nome e l'istituto al quale essi appartengono.*

Si consiglia d'inviare le risoluzioni come manoscritti aperti, avvertendo che le lettere non francate o insufficientemente francate vengono respinte.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 21 novembre 1905

Inoltre, confrontando le (1) (4) si ha subito

$$a + b = s \tag{7}$$

e per le (2) (4) o (3) (4) si avrebbero le analoghe. Le (5) (6) (7) dimostrano quelle proprietà della figura che avevamo asserito resultare come conseguenza delle altre.

Posto ciò, osserviamo che, poichè è

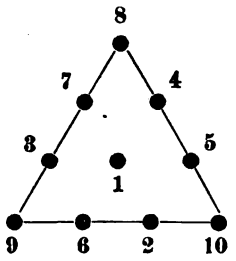
$$a + b + c + d + e + f + x + y + z + m = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55,$$

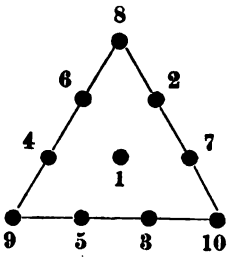
avremo dalla (6): $55 - m = 2s$, e quindi

$$s = \tfrac{1}{2}(55 - m). \tag{8}$$

È chiaro dunque che m deve essere dispari e perciò m potrà asumere i valori 1, 3, 5, 7 e 9 e corrispondentemente s, per la (8), assumerà i valori 27, 26, 25, 24 e 23.

Sia $m = 1$ e quindi $s = 27$. In questo caso x, y, z dovranno avere i valori 8, 9, 10; supponiamo per es. $x = 8$, $y = 9$ e $z = 10$. Con facili considerazioni si trova che e ed f possono avere i valori 2 e 6 oppure 3 e 5 e corrispondentemente c e d i valori 4 e 5 oppure 2 e 7 e finalmente a e b i valori 3 e 7 oppure 4 e 6; cioè avremo le due soluzioni





Ciascuna di queste due soluzioni, come qualunque altra soluzione che troveremo, dà luogo a 8 soluzioni permutando i numeri posti nell'interno di uno stesso lato e ciascuna di queste 8 soluzioni, permutando i numeri posti ai vertici, dà luogo a 6 soluzioni; cosicchè da ognuna delle due soluzioni trovate e che chiameremo fondamentali e che indicheremo rispettivamente con

$$[2 + 6 = 8,\ \ 4 + 5 = 9,\ \ 3 + 7 = 10] \quad \text{e} \quad [3 + 5 = 8,\ \ 2 + 7 = 9,\ \ 4 + 6 = 10]$$

ne abbiamo 48, cioè per $s = 27$ si hanno 96 soluzioni.

Per $m = 3$, e quindi $s = 26$, si troverebbero le 2 soluzioni fondamentali

$$[1 + 6 = 7,\ \ 4 + 5 = 9,\ \ 2 + 8 = 10] \quad \text{e} \quad [2 + 5 = 7,\ \ 1 + 8 = 9,\ \ 4 + 6 = 10].$$

Per $m = 5$, e quindi $s = 25$, si hanno le 2 soluzioni fondamentali

$$[2 + 4 = 6,\ \ 1 + 8 = 9,\ \ 3 + 7 = 10] \quad \text{e} \quad [3 + 4 = 7,\ \ 2 + 6 = 8,\ \ 1 + 9 = 10].$$

Per $m = 7$, e quindi $s = 24$, si hanno le 3 soluzioni fondamentali

$$[1 + 4 = 5, 3 + 6 = 9, 2 + 8 = 10];\quad [2 + 3 = 5, 1 + 8 = 9, 4 + 6 = 10];\quad [2 + 4 = 6, 3 + 5 = 8, 1 + 9 = 10].$$

Finalmente per $m = 9$, e quindi $s = 23$, si hanno le 3 soluzioni fondamentali

$$1 + 4 = 5, 2 + 6 = 8, 3 + 7 = 10];\quad [2 + 3 = 5, 1 + 7 = 8, 4 + 6 = 10];\quad [1 + 5 = 6, 3 + 4 = 7, 2 + 8 = 10].$$

Si hanno dunque 12 soluzioni fondamentali e quindi in tutto se ne hanno $12 \times 48 = 576$.

10° GIUOCO A CONCORSO.

Nel Fasc. V dell'anno passato proponemmo, segnato col n. 230, il seguente giuoco:

Determinare tre numeri differenti di 2 cifre tali che sommandoli due a due si ottengano i tre numeri che si hanno invertendo le cifre di quelli dati. (Quante sono le soluzioni?)

G. C.-L.

Ci pervennero 13 risoluzioni, delle quali 4 errate e le altre 9 incomplete; i risolutori di queste ultime supposero tacitamente inclusa nel problema una condizione che realmente non era stata posta. Se a, b e c indicano i tre numeri e a', b' e c' quelli che hanno rispettivamente le stesse cifre, ma in ordine inverso, essi supposero

$$b + c = a', \qquad c + a = b', \qquad a + b = c'$$

e trovarono così le due soluzioni che in tal caso ha il problema (alcuni però ne trovarono una sola); ma agli altri casi che possono presentarsi

$$b + c = b',\ \ c + a = a',\ \ a + b = c'; \qquad b + c = b',\ \ c + a = c',\ \ a + b = a'$$

nessuno ha pensato. Ed è perciò che proponiamo nuovamente il giuoco ai nostri lettori.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. **Giulio Cardoso-Laynes** *a* **Forlì**, *fuori Barriera Vittorio Emanuele, Villa Minghetti, non più tardi del 31 dicembre 1905.*

La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi e all'autore, il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 222, 228 e 232

222. *L'imperatore Timur, dopo la presa e la distruzione di Bagdad, diede il crudele comando d'innalzare sulle rovine di quella città una piramide (quadrata) con 90000 teste umane. Quanti strati conteneva quella piramide?*

Risoluzione del sig. **Mammarella**, I. T. P. di *Ravenna*.

Lo strato più alto è costituito da 1 testa; quello immediatamente inferiore da $2^2 = 4$ teste; il successivo da $3^2 = 9$ teste e così di seguito; detto x il numero degli strati, il più basso è costituito da x^2 teste e quindi si dovrebbe avere $90000 = x^2 + (x-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2$, ossia per una nota formula

$$90000 = \tfrac{1}{6}\, x(x+1)(2x+1), \qquad \text{cioè} \qquad x^2(x+1) + x(x+1)^2 = 540000.$$

Da ciò, essendo

$$2(x+1)^3 > x^2(x+1) + x(x+1)^2 > 2x^3, \qquad \text{si ha} \qquad (x+1)^3 > 270000 > x^3.$$

La radice cubica, per difetto, di 270000 è 64, dunque è $x = 64$; facendo la pila di 64 strati s'impiegano 89440 teste; ne rimangono quindi 560.

Altre risoluzioni dei predetti sigg. **Janora**, **Marranghello**, **Rivera**, **Santarella**, **Signorini**, **Terraccini** e **Vercellin** e dei sigg. **Brenta** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*, **D'Angelo** e **Marra**, R. S. delle Miniere di *Caltanisetta*, ed una inesatta.

228. *Trovare due numeri di due cifre tali che scrivendoli l'uno di seguito all'altro si ottenga il doppio del loro prodotto.*

G. C.-L.

Risoluzione dei sigg. **Belvederi**, R. L. Galvani di *Bologna*; **Janora**, R. I. T. di *Bari* e **Marranghello**, R. L. di *Arezzo*.

Indicando rispettivamente con x ed y i due numeri, si dovrà avere $100x + y = 2xy$, da cui si ha $y = 100x : (2x-1)$. Poichè x è primo con $2x-1$, dovrà essere 100 divisibile per $2x-1$; i divisori dispari di 100 sono soltanto 5 e 25 e poichè evidentemente $2x-1$ deve essere di due cifre, perchè tale è x, sarà $2x-1 = 25$ e quindi $x = 13$ e perciò $y = 52$. I numeri cercati sono 13 e 52 e infatti $1352 = 2 \times 13 \times 52$.

Altre risoluzioni dei predetti sigg. **Belvedere**, **Bifano**, **Brenta**, **De Bei**, **Graziani**, **Lucaroni**, **Mammarella** **Maracci**, **Piscitelli**, **Santarella**, **Signorini**, **Terraccini**, **Vacchi** e **Vercellin** e del sig. **Gneme** di *Roma*.

232. A e B, *bevendo insieme, hanno due bicchieri di diversa capacità; con un fiasco,* A *può riempire 9 volte il bicchiere e* B *può riempirlo 12 volte. Se dopo avere riempito per varie volte completamente i loro bicchieri, e* B *essendo ricorso più spesso di* A *al fiasco, questo è completamente vuoto, quanto ha bevuto ciascuno dei due?*

G. C.-L.

Risoluzione.

La capacità dei bicchieri di A e B è rispettivamente $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{12}$ di quella del fiasco e quindi, chiamando x ed y i numeri che indicano quante volte A e B hanno riempito il bicchiere, avremo

$$\frac{1}{9}x + \frac{1}{12}y = 1 \qquad \text{cioè} \qquad 4x + 3y = 36$$

e quindi $x = 3k$, $y = 4h$; e perciò la precedente diviene (a) $k + h = 3$. Dovendo essere $y > x$, sarà $h \geqslant k$ e quindi l'unica soluzione della (a) è $k = 1$, $h = 2$ e perciò $x = 3$, $y = 8$, cioè A ha riempito 3 volte il bicchiere e B lo ha riempito 8 volte.

Altre risoluzioni dei predetti sigg. **Belvedere**, **Belvederi**, **Bifano**, **Brenta**, **Cernuschi**, **De Bei**, **Gneme**, **Graziani**, **Janora**, **Lucaroni**, **Mammarella**, **Maracci**, **Marranghello**, **Piscitelli**, **Rivera**, **Santarella**, **Signorini**, **Terracini**, **Vacchi** e **Vercellin** e del sig. **De Giorgio**, R. L. d'*Ivrea*.

GIUOCHI PROPOSTI.

242. Trovare un numero di due cifre che sia uguale alla somma della cifra delle decine e del quadrato di quella delle unità.

243. Trovare un numero di due cifre che sia eguale alla somma dei quadrati di dette cifre e del loro prodotto.

244. Trovare un numero di tre cifre tale che la somma della cifra delle centinaia, del quadrato di quella delle decine e del cubo di quella delle unità sia eguale al numero formato dalle due ultime cifre.

S. Catania.

245. In quanti e quali modi si possono disporre 8 rettangoli di dimensioni a, $2a$ per formare un quadrato?

246. "Quando sposai — diceva una donna ad un giovanotto — io avevo 24 anni e Lei era sempre un bambino, proprio com'è ora il mio Tonino, che ebbi due anni dopo il matrimonio". "Eh! il tempo passa — rispondeva l'altro — e quando Tonino avrà l'età che ho io ora, io avrò l'età che ha ora Lei". Ha capito il lettore quali età avevano donna, giovanotto e bambino?

G. C.-L.

Le risoluzioni si accettano fino al 31 dicembre p. v.; devono essere indirizzate al

prof. **Giulio Cardoso-Laynes** *a* **Forlì**, *fuori Barriera Vitt. Emanuele, Villa Minghetti.*

ANNO IX — DICEMBRE 1905 — FASC. II

HARVARD COLLEGE LIBRARY JAN 24 1906 CAMBRIDGE, MASS.

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - G. BONACCORSI. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al Periodico di Matematica

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Relazione del concorso annuale.
Concorso per l'anno IX (1905-906).
Sulla somma delle potenze simili dei primi n numeri della serie naturale. (R. VERCELLIN.)
Un triangolo rettangolo notevole. (G. CANDIDO.)
65ª quistione a concorso. (G. DE LONGCHAMPS.)
Risoluzioni delle quistioni 631, 678, 680, 684, 694 e 695.
Quistioni da risolvere 711-720.

Copertina:

Il giuoco dei tre oggetti.
11° giuoco a concorso.
Spiegazione dei giuochi 229, 233, 235 e 236.
Giuochi proposti 247-251.

LIVORNO
RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE
LIBRAIO-TIPOGRAFO
1905

IL GIUOCO DEI TRE OGGETTI

Ponete sopra una tavola tre oggetti diversi, per esempio: un anello, uno spillo ed un orologio; prendete poi 24 gettoni e, scelte tre persone della società, date 1 gettone alla 1ª, 2 alla 2ª e 8 alla 3ª, ponendo in tavola i 18 gettoni rimanenti; assentatevi dalla stanza, dopo avere detto alle tre persone alle quali avete dato i gettoni, che durante la vostra assenza prenda ciascuna un oggetto di quelli posti sulla tavola ed inoltre che quella che sceglie l'anello, prenda tanti gettoni quanti ne ha già, quella che sceglie lo spillo, prenda il doppio dei gettoni che ha e finalmente quella alla quale tocca l'orologio, prenda il quadruplo dei gettoni che ha. Al vostro ritorno nella stanza, con un semplice sguardo ai gettoni rimasti sulla tavola, potete indovinare quale oggetto abbia preso ciascuna delle tre persone.

Infatti, indicando con A, B e C le tre persone, alle quali avete dato rispettivamente 1, 2 e 3 gettoni e con *a*, *s* ed *o* i tre oggetti, se A, B e C hanno avuto rispettivamente l'anello, lo spillo e l'orologio, dai 18 gettoni ne saranno stati tolti $1 + 2 \times 2 + 3 \times 4 = 1 + 4 + 12 = 17$ e quindi rimarrà, in quest'ipotesi, un solo gettone. Tutto ciò può riassumersi nella tabella Iª.

Analogamente le altre cinque ipotesi possibili si possono riassumere nelle tabelle II, III, IV, V e VI:

I

persone	oggetti	gettoni		
		1ª distr.	2ª distr.	resto
A	*a*	1	1	
B	*s*	2	4	
C	*o*	3	12	
				1

II

persone	oggetti	gettoni		
		1ª distr.	2ª distr.	resto
A	*a*	1	1	
B	*o*	2	8	
C	*s*	3	6	
				3

III

persone	oggetti	gettoni		
		1ª distr.	2ª distr.	resto
A	*s*	1	2	
B	*a*	2	2	
C	*o*	3	12	
				2

IV

persone	oggetti	gettoni		
		1ª distr.	2ª distr.	resto
A	*s*	1	2	
B	*o*	2	8	
C	*a*	3	3	
				5

V

persone	oggetti	gettoni		
		1ª distr.	2ª distr.	resto
A	*o*	1	4	
B	*a*	2	2	
C	*s*	3	6	
				6

VI

persone	oggetti	gettoni		
		1ª distr.	2ª distr.	resto
A	*o*	1	4	
B	*s*	2	4	
C	*a*	3	3	
				7

È evidente come, essendo i resti diversi per ciascuna ipotesi, conoscendo il resto, si possa sapere quale oggetto abbia preso ciascuna persona.

Questo giuoco fu trattato per la prima volta da N. Chuquet nella sua opera *Triparty en la sciences des nombres*, pubblicata a Parigi nel 1484; si veda anche: Bachet de Méziriac, *Problèmes plaisants et delectables qui se font par les nombres* (Lyon, 1613) e Fourrey, *Récréation arithmétiques* (Paris, 1899). La presente noticina è tratta da quest'ultima opera; vi abbiamo però introdotto alcune modificazioni.

G. C.-L.

11° GIUOCO A CONCORSO

Trovare i quadrati perfetti di 4, 6 e 8 cifre che possono rappresentarsi scrivendo di seguito due numeri consecutivi.

***

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Cardoso-Laynes a Savona, *R. Scuola Tecnica, non più tardi del 31 gennaio p. v.*

La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi e all'autore, il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

JAN 24 1906
CAMBRIDGE, MASS.

RELAZIONE DEL CONCORSO ANNUALE

(Anno VIII)

Secondo le norme stabilite nel N. I Anno VIII, sono stati ammessi al concorso i giovani che hanno risoluto almeno **22** delle **88** quistioni proposte durante lo scorso anno scolastico. Essi sono indicati nel seguente elenco, ove accanto al nome di ciascuno si trova il numero delle quistioni risolute, e fra parentesi il numero delle quistioni a concorso.

1. **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*.	quist.	88 (8)	17. **Cernuschi**, R. I. T. di Torino.	quist.	45 (2)
2. **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*.	„	87 (7)	18. **Bassi**, R. I. T. di *Torino* .	„	43 (2)
3. **Santarella**, L. P. di *Bitonto*.	„	84 (6)	19. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*.	„	43 (2)
4. **Signorini**, R. L. di *Arezzo*.	„	82 (7)	20. **Mammarella**, I. T. P. di Ravenna.	„	33 (2)
5. **De Aloysio**, R. I. T. di Aquila.	„	74 (5)	21. **Legnani**, R. L. di *Pesaro* .	„	31 (2)
6. **Janora**, R. I. T. di *Bari*. .	„	72 (3)	22. **Terraccini**, R. L. Cavour di Torino.	„	30 (6)
7. **Semenza**, R. I. T. di *Milano*.	„	70 (5)	23. **De Lutti**, R. L. Foscarini di Venezia.	„	30 (1)
8. **Bertoglio**, R. I. T. di *Torino*.	„	66 (2)	24. **Mattioli**, I. T. P. di *Treviso*	„	30 (1)
9. **Marranghello**, R. L. di Arezzo.	„	54 (3)	25. **Lopez**, R. I. T. di *Bari*. .	„	27 (2)
10. **Marzocchi**, R. I. T. di Venezia.	„	54 (2)	26. **Lucaroni**, R. I. T. di Ancona.	„	26 (1)
11. **Pomini**, R. I. T. di *Milano*.	„	52 (2)	27. **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*.	„	26
12. **Rivera**, R. I. T. di *Venezia*.	„	51 (2)	28. **Urbani**, di *Ancona* . . .	„	26
13; **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.	„	50 (1)	29. **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*.	„	26
14. **Tonali**, R. I. T. di *Pavia* .	„	48 (1)	30. **Grampa**, Sem. Arc. di Monza.	„	25
15. **Crugnola**, R. I. T. di *Milano*.	„	47 (4)	31. **Gergic** di *Trieste*. . . .	„	22 (2)
16. **Brenta**, R. I. T. di *Torino*.	„	47 (1)	32. **Maraziti**, R. I. T. di Piacenza.	„	22 (1)

Si è distinto sopra tutti per il numero, ma più ancora per la bontà delle risoluzioni inviate, il signor

RAFFAELE VERCELLIN, del R. I. T. di *Torino*,

al quale è stato conferito il *Diploma d'Onore di 1° grado*, ed il PREMIO ANNUALE.

È stato poi conferito il *Diploma d'Onore di 2° grado* ai signori:

VACCHI, SANTARELLA, SIGNORINI, DE ALOYSIO, JANORA e SEMENZA,

e la *Menzione Onorevole* ai signori:

Bertoglio, Marranghello, Marzocchi, Pomini, Rivera, Mosca, Tonali, Crugnola, Brenta, Cernuschi, Bassi e De Bei.

Pubblichiamo infine l'elenco dei giovani che hanno risoluto meno di un quarto e più di un decimo delle quistioni proposte.

1. **D'Angelo**, R. Sc. Miniere di Caltanis.	quist.	20	10. **Bacci**, R. I. T. di *Firenze*.	quist.	11 (1)
2. **Marra**, R. Scuola Miniere di Caltanis.	„	20	11. **Perelli**, R. I. T. di *Bari* .	„	11 (1)
3. **Pery**, R. I. T. di *Messina* .	„	20 (1)	12. **Borioni**, R. I. T. di *Ancona*.	„	11
4. **Graziani**, R. I. T. di *Bologna*.	„	18 (3)	13. **Levi**, R. I. T. di *Torino* .	„	11
5. **Morbidelli**, R. I. T. di *Jesi* .	„	16	14. **Rocci**, R. I. T. di *Torino* .	„	11
6. **Savino**, R. I. T. di *Bari*. .	„	16	15. **Bifano**, R. L. di *Benevento*.	„	10 (1)
7. **Aprile** di *Modica*	„	15 (1)	16. **Belvedere**, R. I. T. di Messina.	„	9 (1)
8. **Artom**, R. I. T. di *Torino* .	„	14	17. **Piscitelli**, R. L. di Benevento .	„	9 (1)
9. **Sordelli**, R. I. T. di *Milano*.	„	13 (1)			

LA REDAZIONE.

CONCORSO PER L'ANNO IX (1905-1906)

Saranno ammessi al concorso per il premio annuale tutti gli studenti di scuole secondarie, abbonati al nostro giornale, purchè risolvano più di *un quarto* delle quistioni proposte durante il presente anno scolastico.

La Redazione assegnerà il Premio Annuale (che consiste in tre libri di matematica o di fisica, scelti dall'editore Giusti nel suo catalogo) a quel concorrente che giudicherà superiore agli altri, tenendo conto del numero delle quistioni risolute e dei pregi di queste risoluzioni.

Tanto il vincitore del premio, come gli altri concorrenti che ne saranno giudicati degni, riceveranno un *Diploma* che attesti la loro diligenza e la loro attitudine agli studi scientifici.

Infine saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori di più di *un decimo* delle quistioni proposte.

La Redazione.

SULLA SOMMA DELLE POTENZE SIMILI DEI PRIMI n NUMERI DELLA SERIE NATURALE

1. È noto che, indicando con S_k la somma delle potenze k^{me} dei primi n numeri della serie naturale, la formola ricorrente

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k} S_1 + n, \qquad (1)$$

permette di calcolare successivamente $S_1, S_2, S_3 \ldots$ Dalla (1) si ricava facilmente che S_k è un polinomio intero e razionale in n, di grado $(k+1)^{mo}$. Siccome per $n = 0$ è evidentemente $S_k = 0$, segue che, in detto polinomio, è nullo il coefficiente del termine in cui n ha l'esponente nullo. Detti pertanto

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1},$$

$k+1$ coefficienti incogniti, possiamo porre

$$S_k = f(n) = \lambda_1 n^{k+1} + \lambda_2 n^k + \lambda_3 n^{k-1} + \ldots + \lambda_{k+1} n. \qquad (2)$$

Mi propongo di studiare le relazioni che legano tra di loro questi coefficienti, e di mostrare come, mediante tali relazioni, si possano determinare, con una certa speditezza, i coefficienti medesimi, in funzione di k, e ottenere di conseguenza una formola generale, la quale ci dà il valore S_k in funzione di n e di k.

2. Se nella (2), al posto di n, poniamo $(n+1)$, per la nota formola di Taylor avremo [1]

$$f(n+1) = f(1) + f'(1)n + \frac{f''(1)n^2}{2!} + \frac{f'''(1)n^3}{3!} + \ldots; \qquad (3)$$

[1] V. p. es., il *Supplemento*, Anno VIII, fasc. IV, pag. 52 e 53.

dove $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$... sono rispettivamen
cendo $n=1$ nella (2) e nelle successive d

$$f(1)=\binom{k+1}{0}\lambda_1+\binom{k}{0}\lambda_2+\binom{k}{}$$

$$f'(1)=\binom{k+1}{1}\lambda_1+\binom{k}{1}\lambda_2+\binom{k}{}$$

$$\frac{f''(1)}{2!}=\binom{k+1}{2}\lambda_1+\binom{k}{2}\lambda_2+\binom{k}{}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f^{(k)}(1)}{k!}=\binom{k+1}{k}\lambda_1.$$

Sottraendo membro a membro la (2)

$$f(n+1)-f(n)=f(1)+[f'(1)-\lambda_{k+1}]\,n+$$

D'altra parte è ovvio che

$$f(n+1)-f(n)=(n+1)^k=\binom{k}{0}+\binom{}{}$$

Affinchè le (4), (5) coesistano dev'ess

$$f(1)=$$

$$f'(1)-\lambda_{k+1}=$$

$$\frac{f''(1)}{2!}-\lambda_k=$$

$$\cdots\cdots$$

ovvero

$$\binom{1}{0}\lambda_{k+1}+\binom{2}{0}\lambda_k+\binom{3}{0}\lambda_{k-1}+\ldots+\binom{k-1}{0}\lambda$$

$$\binom{2}{1}\lambda_k+\binom{3}{1}\lambda_{k-1}+\ldots+\binom{k-1}{1}\lambda$$

$$\binom{3}{2}\lambda_{k-1}+\ldots+\binom{k-1}{2}\lambda$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(k$$

Queste sono le relazioni cercate. In tut
sistema, per mezzo del quale si possono d
$\ldots, \lambda_{k+1}$.

3. È utile avvertire che, nel sistema
numeri del triangolo di Tartaglia e, in ogn

il secondo membro è il coefficiente di λ_2. Con questa osservazione riesce assai facile scrivere il sistema per valori particolari di k. Per es., per $k=4$ il sistema sarebbe:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_5+\lambda_4+\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1&=1\\ 2\lambda_4+3\lambda_3+4\lambda_2+5\lambda_1&=4\\ 3\lambda_3+6\lambda_2+10\lambda_1&=6\\ 4\lambda_2+10\lambda_1&=4\\ 5\lambda_1&=1 \end{aligned}\right\}$$

da cui facilmente:

$$\lambda_1=\frac{1}{5};\qquad \lambda_2=\frac{1}{2};\qquad \lambda_3=\frac{1}{3};\qquad \lambda_4=0;\qquad \lambda_5=-\frac{1}{30};$$

cosicchè

$$S_4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n(n+1)(2n+1)[2n(n+1)-1]}{30}. \tag{6}$$

4. Mediante il sistema (α) possiamo determinare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ in funzione di k. A questo scopo si potrebbe ricavare λ_1 dall'ultima, sostituirlo nelle precedenti e ricavare poscia λ_2 dalla penultima, poi λ_3 dalla precedente, e così di seguito; ma possiamo semplificare assai il calcolo.

Infatti, dalle due ultime equazioni del sistema (α) si ha

$$\lambda_1=\frac{1}{k+1};\qquad \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

Posto poi

$$\lambda_{1+i}=\mu_i\binom{k}{i}\qquad (i=1,2,\ldots,k-1)$$

dove μ_i sono coefficienti da determinare risulta che possiamo in generale scrivere

$$S_k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\mu_1\binom{k}{1}n^{k-1}+\mu_2\binom{k}{2}n^{k-2}+\ldots+\mu_{k-1}\binom{k}{k-1}n. \tag{7}$$

Dev'essere (posto $n=1$)

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}+\mu_1\binom{k}{1}+\mu_2\binom{k}{2}+\ldots+\mu_{k-1}\binom{k}{k-1}=1$$

ossia

$$\mu_1\binom{k}{1}+\mu_2\binom{k}{2}+\ldots+\mu_{k-1}\binom{k}{k-1}=\frac{k-1}{2(k+1)}. \tag{8}$$

La (8) è una formola ricorrente, mediante la quale possiamo ricavare i valori numerici di $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-1}$. Per $k=2$ si ha

$$\mu_1\binom{2}{1}=\frac{1}{6},\qquad \text{da cui}\qquad \mu_1=\frac{1}{12};$$

per $k=3$, risulta

$$\frac{1}{12}\binom{3}{1}+\mu_2\binom{3}{2}=\frac{1}{4},\qquad \text{da cui}\qquad \mu_2=0;$$

e così via di seguito.

Possiamo adunque venire alla seguente conclusione generale:

Teorema. — *Indicando con* S_k *la somma delle potenze* k^{me} *dei primi* n *numeri della serie naturale, si ha*

$$S_k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\sum_{r=1}^{r=k-1}\mu_r\binom{k}{r}n^{k-r};$$

dove $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-1}$ *sono dati dalla formola ricorrente*

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=k-1}\mu_\varrho\binom{k}{\rho}=\frac{k-1}{2(k+1)}.$$

Con calcoli facilissimi si trova

$$\mu_1 = \frac{1}{12}; \quad \mu_3 = -\frac{1}{120}; \quad \mu_5 = \frac{1}{252}; \quad \mu_7 = -\frac{1}{240}; \quad \mu_9 = \frac{1}{132} \cdots$$

$$\mu_2 = \mu_4 = \mu_6 = \mu_8 = \mu_{10} = 0 \ldots$$

cosicchè sarà

$$S_k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \frac{1}{12}\binom{k}{1} n^{k-1} - \frac{1}{120}\binom{k}{3} n^{k-1} +$$

$$+ \frac{1}{252}\binom{k}{5} n^{k-5} - \frac{1}{240}\binom{k}{7} n^{k-7} + \frac{1}{132}\binom{k}{9} n^{k-9} + \ldots \quad (9)$$

5. Dalla (9), per valori particolari di k, si trae:

$$S_1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1}{6},$$

$$S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

$$S_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]}{30},$$

$$S_5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12} = \frac{[n(n+1)]^2[2n(n+1)-1]}{12},$$

. . . . . .

quindi le notevoli relazioni:

$$S_3 = S_1^2; \quad 5S_4 = S_2(6S_1 - 1); \quad 3S_5 = S_3(4S_1 - 1).$$

R. Vercellin.

UN TRIANGOLO RETTANGOLO NOTEVOLE

1. Problema. — *Esiste un triangolo per il quale si abbia*

$$p = S = lmn,$$

dove p *e* S *sono le misure del perimetro e dell'area del triangolo ed* l, m, n, *numeri primi?*

Indichiamo con $2x$, $2y$, $2z$ i lati del triangolo in questione; allora i valori di x, y, z debbono soddisfare al sistema

$$x + y + z = lmn, \quad (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) = l^2m^2n^2.$$

Da ciò resulta che i valori di x, y, z sono dati dall'unico sistema

$$-x + y + z = l,$$
$$x - y + z = m,$$
$$x + y - z = n,$$

dal quale si ricava

$$x = \frac{m+n}{2}, \quad y = \frac{n+l}{2}, \quad z = \frac{l+m}{2}.$$

Questi valori di x, y, z in generale non soddisfano, perchè deve anche aversi

$$l + m + n = lmn. \tag{1}$$

Vediamo pertanto da quali valori è soddisfatta la (1). È chiaro che non può aversi $l = m = n$, perchè in tal caso sarebbe $l = \sqrt{3}$; d'altra parte se $l > m > n$, (e questo possiamo supporre senza alterare per nulla la nostra questione) si ha pure

$$l + m + n < 3l,$$

ed in virtù della (1)

$$mn < 3;$$

dunque dovrà aversi $mn = 1$, ovvero $mn = 2$. Dalla prima di queste due equazioni si ha $m = n = 1$, valori che non convengono, perchè la (1) ci porterebbe alla uguaglianza assurda $l = l + 2$; dalla seconda si ha $m = 2$, $n = 1$, (ovvero $m = 1$ ed $n = 2$) e dalla (1) si ricava $l = 3$. I numeri l, m, n sono dunque 1, 2, 3 ed i valori di x, y, z sono $\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}$, epperò il triangolo domandato è il triangolo rettangolo di cui i lati sono misurati dai numeri 3, 4, 5. In conclusione: *Esiste un solo triangolo, ed è rettangolo, di cui il semiperimetro e la superficie sono espressi da uno stesso numero, prodotto di tre numeri primi.*

Osservazione I. — La questione ora trattata risolve anche la 108, (anno I, pag. 31, del « Supplemento » rimasta insoluta. [1]

Osservazione II. — *La superficie del triangolo in questione è espressa da un numero di cui il cubo è uguale alla somma dei cubi dei numeri da cui sono espressi i lati.*

Infatti si ha

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Osservazione III. — I numeri 3, 4, 5, 6 sono i soli che rispondono alla questione: *Esistono quattro numeri interi consecutivi tali che il cubo del maggiore sia uguale alla somma dei cubi degli altri tre?*

La verifica alla cura dello studioso.

2. Il triangolo rettangolo trovato, ed esso solo, gode di un'altra importante proprietà che andiamo a stabilire, risolvendo il

Problema. — *Esiste un triangolo tale che abbia i suoi lati esprimibili per multipli secondo numeri interi del raggio del cerchio inscritto?*

Poniamo

$$a = rx, \qquad b = ry, \qquad c = rz,$$

essendo a, b, c i lati del triangolo, r il raggio del cerchio inscritto, x, y, z numeri interi.

Ricordiamo ora che in ogni triangolo si ha

$$\Sigma \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad \text{e} \qquad \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{b + c - a}{2r},$$

dimodochè

$$(x + y - z)(-x + y + z)(x - y + z) = 4(x + y + z); \tag{2}$$

e poichè possiamo porre

$$-x + y + z = 2X, \qquad x - y + z = 2Y, \qquad x + y - z = 2Z,$$

la (2) diviene

$$X + Y + Z = XYZ,$$

---

[1] Nell'enunciato della 108 *loc. cit.* v'è un errore tipografico, si deve porre $-a^2b^2c^2$, in cambio di $+a^2b^2c^2$.

da cui (§ 1)

$$X = 1, \qquad Y = 2, \qquad Z = 3,$$

epperò

$$a = 5r, \qquad b = 4r, \qquad c = 3r.$$

In conclusione: *Esiste un solo triangolo, ed è rettangolo, tale che i suoi lati siano esprimibili per multipli interi del raggio del cerchio inscritto.*

La identità dei due triangoli studiati è manifesta.

G. Candido.
Galatina.

65ª QUISTIONE A CONCORSO

Si domanda uno studio del triangolo *notevole* in cui un angolo è doppio di un altro.

Supposto $\beta = 2\gamma$, si dimostrino in particolare le seguenti proprietà:

1. Fra i lati esiste la relazione $ac = b^2 - c^2$. È vera la proposizione reciproca.
2. Essendo l_b la bisettrice di β si ha $b \,.\, l_b = ac$.
3. La distanza del baricentro di ABC dalla altezza uscente da A è uguale ad $\frac{1}{3}c$.
4. La circonferenza che passa pei punti A, C, O′ (essendo O′ il centro del circolo inscritto) ha il suo centro sul circolo circoscritto ad ABC ed ha il raggio eguale ad AB.
5. Si ha $BO' = b - c$.
6. Essendo L_a, L_b, L_c i punti d'incontro delle bisettrici coi lati opposti, e T il punto d'incontro di BC colla parallela ad AC per O′, i punti L_a, T sono isotomici.
7. Il circolo ex-inscritto interno all'angolo α tocca BC nel punto di mezzo del segmento che ha per estremi C, L_a.
8. Il circolo che passa per B, C, O′ taglia AC e AB in due punti P, Q in modo che il quadrilatero BO′PC è un trapezio isoscele in cui $BO' = O'P = PC$. Inoltre i punti P, Q sono allineati col punto L_a e $PQ = BC$.
9. Detto R il punto d'incontro di PO′ con AB, il segmento PR è eguale alla bisettrice di β.
10. La bisettrice di α è eguale al doppio della distanza di A dalla bisettrice di γ.
11. La distanza CO′ è il doppio della distanza di B dalla bisettrice di α.
12. Essendo O'_a, O'_b, O'_c i centri dei circoli exinscritti si ha $O'O'_b = 2c$.
13. Dedurre dalla proprietà precedente che il problema della trisezione di un angolo si riduce al seguente: " Condurre per un punto una retta tale che la parte intercetta fra due rette ortogonali abbia una lunghezza data ".
14. Il circolo che passa per A, C, O′ taglia BA, BC in due punti che sono in linea retta con L_b e la cui distanza è eguale al lato AC.

G. De Lonchamps.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 31 gennaio 1906.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 631, 678, 680, 684, 694 E 695

631. *Calcolare i cateti di un triangolo rettangolo conoscendone la differenza* d *e la differenza* d_1 *dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa corrispondente.*

LEGNANI.

Risoluzione.

Indicando con x ed y le misure dei cateti, con z e t rispettivamente quelle dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa, dovremo avere:

$$x - y = d \quad (1) \qquad\qquad x^2 + y^2 = z^2 \quad (3)$$
$$z - t = d_1 \quad (2) \qquad\qquad xy = zt\,. \quad (4)$$

Dall'identità $(x-y)^2 = x^2 + y^2 = 2xy$, per le (1) (3) (4), si ha

$$z^2 - 2d_1 z + d^2 = 0$$

da cui $z = d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - d^2}$ e, poichè in virtù della (2) deve essere $z > d_1$, tralasciando il $(\pm)$:

$$z = d_1 + \sqrt{d_1^2 - d^2} \quad (5)$$

e quindi (2):

$$t = \sqrt{d_1^2 - d^2}. \quad (6)$$

Dall'identità $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ si ha per le (3) (4)

$$x + y = \pm\sqrt{z^2 + 2zt}\,.$$

Per le (5) (6) si ha poi da quest'ultima, tralasciando il $(\pm)$

$$x + y = \sqrt{4d_1^2 - 3d^2 + 4d_1\sqrt{d_1^2 - d^2}}. \quad (7)$$

Sommando e sottraendo membro a membro le (1) (7), si ha facilmente:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(d + \sqrt{4d_1^2 - 3d^2 + 4d_1\sqrt{d_1^2 - d^2}}\right);$$
$$y = \tfrac{1}{2}\left(-d + \sqrt{4d_1^2 - 3d^2 + 4d_1\sqrt{d_1^2 - d^2}}\right).$$

Da quest'ultime, come anche dalle (5) (6), si ha come condizione di possibilità

$$d_1 > d\,.$$

Quando sia soddisfatta questa condizione facilmente si vede che i valori trovati sono reali e positivi.

Inviarono *risoluzioni* i sigg. **Aprile** di *Modica*; **Artom, Bassi, Bertoglio, Botte, Brenta, Levi, Mosca, Rocci** e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **Bacci**, R. I. T. di *Firenze*; **Bifano, Piscitelli A.** e **Piscitelli M.**, R. L. di *Benevento*; **Casalasco** e **Lucca**, R. L. di *Cuneo*; **Crugnola, Pomini** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **D'Angelo** e **Marra**, R. S. delle Miniere di *Caltanissetta*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **De Lutti**, R. L. Foscarini, **Marzocchi** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Gergic** di *Trieste*; **Janora, Lopez** e **Savino**, R. I. T. di *Bari*; **Lepri**, R. L. di *Pisa*; **Lucaroni** e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Mammarella**, I. T. P. di *Ravenna*; **Maraziti**, R. I. T. di *Piacenza*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Mattioli**, I. T. P. di *Treviso*; **Micheli**, R. I. T. di *Como*; **Morbidelli**, R. I. T. di *Jesi*; **Perelli**, R. I. T. di *Roma*; **Ravajoli**, R. L. di *Forlì*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*; **Totaro**, R. I. T. di *Messina*.

(G. C.-L.)

678. *Se* M, N, P *e* Q *sono rispettivamente i punti medi dei lati* AB, BC, CD *e* DA *di un parallelogrammo* ABCD, *dimostrare che le rette* AP, BQ, CM *e* DN *determinano un parallelogrammo che è la quinta parte di quello dato.* (1)

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione.

Poichè i quadrilateri AMCP e BNDQ hanno ciascuno due lati opposti eguali e paralleli, sono parallelogrammi e quindi è AP || MC e BQ || DR. Perciò, indicando con I, J, K, L rispettivamente i punti d'incontro di AP e BQ, BQ e CM, CM e DN, DN ed AP, il quadrilatero IJKL è un ▱.

Osserviamo poi che per la nota proprietà della retta condotta dal punto di mezzo di un lato di un triangolo parallelamente ad un altro lato del triangolo stesso, si ha

$$CK = KJ, \quad AI = IL, \quad 2MJ = AI, \quad 2PL = CK,$$

e quindi, essendo anche per le ragioni già dette, IL = JK, sarà

$$AI = IL = JK = CK = 2MJ = 2PL. \qquad (1)$$

Si conduca da A la parallela a BQ che incontra in R il prolungamento di CM; i parallelogrammi IJHL e AIJR, aventi basi eguali (1) e compresi fra rette parallele, sono equivalenti, ma per l'eguaglianza manifesta dei triangoli ARM e JMB, il parallelogrammo AIJR è equivalente al △ AIB e quindi il ▱ IJKL e il △ AIB sono equivalenti,

Nello stesso modo si dimostra che lo stesso ▱ IJKL è equivalente a ciascuno dei triangoli BJC, CKD e DLA e quindi il ▱ IJKL è la quinta parte del ▱ dato, c. d. d.

Osservazione. — Dopo avere stabilite le (1), si può procedere anche nel modo seguente: I due parallelogrammi IJKL e AMCP, aventi la stessa altezza, stanno fra loro come le basi IL e AP e quindi, poichè è AP = AI + IL + LP, il rapporto fra le aree dei due parallelogrammi è, per le (1), 2 : 5 e poichè evidentemente il ▱ AMCP è metà di ABCD, il rapporto fra le aree dei parallelogrammi IJKL e ABCD è 1 : 5. c. d. d.

Inviarono risoluzioni i sigg. **Bacci** e **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **Bassi**, **Bertoglio**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Levi**, **Mosca** e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*: **Borioni**, **Lucaroni**, **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*: **Casalasco**, R. L. e sig.na **Pellizzari**, R. I. T. di *Cuneo*; **Crugnola**, **Pomini** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **De Aloysio**, R. I. T di *Aquila*; **De Bei**, **Marzocchi** e **Vacchi**, R. I. T. e **De Lutti**, R. L. Foscarini di *Venezia*; **Grampa**, L. del Sem. Arciv. di *Monza*; **Graziani**, R. I. T. di *Bologna*; **Janora** e **Lopez**, R. I. T. di *Bari*; **Maraziti**, R. I. T. di *Piacenza*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di di *Arezzo*; **Masella**, R. I. T. di *Melfi*; **Mattioli**, I. T. P. di *Treviso*; **Perelli**, R. I. T. di *Roma*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Renna** e **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*. (G. C.-L.)

680. *Una circonferenza* c′ *di centro* O′ *rotola sopra una circonferenza* c *di centro* O. *Dimostrare che il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da* O *ed* O′ *rispettivamente a* c′ *e* c *è composto di due circonferenze concentriche alla* c. *Si trovino le misure dei raggi di queste circonferenze in funzione delle misure* r *ed* r′ *dei raggi delle circonferenze date.*

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzioni del sig. **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*.

Risoluzione geometrica. — Siano H, H′ i punti di contatto delle tangenti condotte da O alla c′; K, K′ quelli delle tangenti condotte da O′ alla c; D e D′ i punti in cui la retta OH incontra le O′K, O′K′. Indichiamo con R una qualunque delle distanze OD, OD′ e poniamo OD = ρ, OD′ = ρ′. Si ha

$$\frac{DH}{D'H} = \pm (OH - R) = \pm \left(\sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{O'H}^2} - R\right) = \pm \left[\sqrt{r(r + 2r')} - R\right]. \qquad (1)$$

(1) Generalizzazione della quist. 197.

Ora

$$DO' : OD = O'D' : OD' = r' : r,$$

da cui

$$\frac{O'D}{O'D'} = \frac{r'}{r} R. \tag{2}$$

Inoltre

$$\overline{O'D}^2 - \overline{DH}^2 = \overline{O'D'}^2 - \overline{D'H}^2 = r'^2.$$

e quindi, mediante le (1), (2)

$$\frac{r'^2}{r^2} R^2 - \left[\sqrt{r(r+2r')} - R\right]^2 = r'^2.$$

Quest'equazione, che si può scrivere

$$(r^2 - r'^2) R^2 - 2r^2 \sqrt{r(r+2r')}\, R + r^2 r'^2 + r^3 (r + 2r') = 0,$$

ammette due radici, che sono le misure cercate; risolvendo si ha

$$\begin{matrix} \rho \\ \rho' \end{matrix} = \frac{r^2 \sqrt{r(r+2r')} \pm rr' \sqrt{r'(r'+2r)}}{r^2 - r'^2}. \tag{3}$$

da cui si ricava anche che ρ e ρ' sono costanti.

Risoluzione trigonometrica. — Siano M, M' i punti in cui le tangenti condotte per O alla c' incontrano una tangente condotta per O' alla c. $OM = \rho$, $OM' = \rho'$ sono i raggi delle circonferenze richiesti; poniamo $O'\widehat{O}H = \omega$, $O'\widehat{O}M = \omega'$; si ha

$$\cos\omega = \frac{r}{r+r'}; \qquad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{r'(r'+2r)}}{r+r'};$$

$$\operatorname{sen}\omega' = \frac{r'}{r+r'}; \qquad \cos\omega' = \frac{\sqrt{r(r+2r')}}{r+r'}.$$

Ora

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{r}{\cos(\omega \mp \omega')} = \frac{r}{\cos\omega\cos\omega' \pm \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\omega'} =$$

$$= \frac{r(r+r')^2}{r\sqrt{r(r+2r')} \pm r'\sqrt{r'(r'+2r)}}, \tag{1}$$

ovvero

$$\begin{matrix} OM \\ OM' \end{matrix} = \frac{r\left[r\sqrt{r(r+2r')} \mp r'\sqrt{r'(r'+2r)}\right]}{r^2 - r'^2},$$

da cui ci vede anche che OM e OM' sono costanti qualunque sia la posizione di c'.

Se $r = r'$ allora la (1) dà

$$\left.\begin{matrix} OM \\ OM' \end{matrix}\right\} = \frac{4r}{\sqrt{3} \mp \sqrt{3}}$$

ossia uno dei raggi OM e OM' diviene infinito, come è facile vedere anche geometricamente, l'altro a $\frac{2}{3} r\sqrt{3}$.

Altre risoluzioni dei sigg. **Bassi, Bertoglio, Brenta, Mosca**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **De Bei, Marzocchi, Vacchi**, R. I. T. e **Lutti**, R. L. Foscarini di *Venezia*; **Janora** e **Lopez**, R. I. T. di *Bari*; **Legnani**, R. L. di *Pesaro*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Mattioli**, I. T. P. di *Treviso*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*.

684. *Risolvere l'equazione*

$$\sec 4x - \csc 5x = \cos 4x - \operatorname{sen} 5x.$$

G. Pesci.

Soluzione. — L'equazione proposta si trasforma subito nell'altra equivalente

$$(\operatorname{sen} 5x - \cos 4x)(1 + \operatorname{sen} 5x \cos 4x) = 0, \tag{1}$$

che si scinde nelle due

(2) $\operatorname{sen} 5x - \cos 4x = 0,$ (3) $1 + \operatorname{sen} 5x \cos 4x = 0,$

La prima di queste si può scrivere sotto la forma

$$\cos(90^\circ - 5x) = \cos 4x, \tag{4}$$

da cui

$$90^\circ - 5x = 360^\circ k \pm 4x, \tag{5}$$

e quindi

(6) $x = 40^\circ k_1 + 10^\circ$ e (7) $x = 360^\circ k_2 + 90^\circ;$

ma le soluzioni rappresentate dalla (7) sono, evidentemente, comprese in quelle rappresentate dalla (6), dunque tutte e sole le soluzioni della (2) sono rappresentate dalla (6).

Per risolvere la (3) si cominci dall'osservare che essa non può essere soddisfatta altro che da valori di x che soddisfino contemporaneamente all'una o all'altra coppia di equazioni

(8) $\begin{cases} \operatorname{sen} 5x = +1 \\ \cos 4x = -1, \end{cases}$ (9) $\begin{cases} \operatorname{sen} 5x = +1 \\ \cos 4x = -1. \end{cases}$

Ora, affinchè siano soddisfatte le (8), si deve avere contemporaneamente

$$5x = 360^\circ h_1 + 90^\circ \quad \text{e} \quad 4x = 360^\circ h_2 + 180$$

ossia

(10) $x = 72^\circ h_1 + 18^\circ$ e (11) $x = 90^\circ h_2 + 45^\circ;$

quindi deve poter essere

$$72\, h_1 + 18 = 90\, h_2 + 45,$$

ossia

$$8h_1 - 10h_2 = 3.$$

Ma, non essendo 8 e 10 primi fra loro, questa eguaglianza, per h_1 e h_2 interi, è impossibile, quindi non esiste nessun valore di x che soddisfi alla coppia (8). Affinchè siano soddisfatte le (9) si deve avere contemporaneamente

$$5x = 360^\circ h_3 + 270^\circ \quad \text{e} \quad 4x = 360^\circ h_4 + 180^\circ,$$

ossia

(12) $x = 72^\circ h_3 + 54^\circ$ e (13) $x = 90^\circ h_4;$

quindi deve poter essere

$$72h_3 + 54 = 90h_4,$$

ossia

$$5h_4 - 4h_3 = 3.$$

Questa è soddisfatta per

$$h_4 = 3 + 4\theta \quad \text{e} \quad h_3 = 5 + 5\theta,$$

quindi esistono dei valori di x che soddisfano alla coppia (8) e questi son dati dalle due espressioni

(14) $x = 72^\circ(3 + 5\theta) + 54^\circ$ e (15) $x = 90^\circ(3 + 4\theta)$

le quali coincidono, tutt'e due, nella sola

(16) $$x = 360^\circ\theta + 270^\circ.$$

Concludendo: l'equazione proposta ha tutte le radici comprese nelle due espressioni

$$x = 40^\circ k_1 + 10^\circ \quad \text{e} \quad x = 360^\circ\theta + 270^\circ,$$

e nessun'altra.

Osservazione. — La (2) si può, meno semplicemente, risolvere anche osservando che essa equivale all'altra

(17) $$2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(9x - 90^\circ) \cos \tfrac{1}{2}(x + 90^\circ) = 0,$$

la quale si scinde nelle due

(18) $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(9x - 90^\circ) = 0$ e (19) $\cos \frac{1}{2}(x + 90^\circ) = 0$

da cui

(6) $x = 40^\circ k_1 + 10^\circ$ e (7) $x = 360^\circ k_2 + 90^\circ$.

Le soluzioni pervenute sono *quattordici*; tutte però o incomplete, o errate (specialmente nella ricerca delle espressioni generali degli archi aventi una data funzione trigonometrica), come ora brevemente diremo.

Le soluzioni dei sigg. **Casalasco** (R. L. *Cuneo*), **Janora** (R. I. T. *Bari*) coincidono, nel procedimento, colla precedente. Il primo, invece della (6), da l'altra meno generale $x = 360^\circ k + 10^\circ$; inoltre si ferma alla (14) e alla (15), senza dedurne la (16). Il secondo, invece della (14) dà l'altra, certamente errata, $x = 180^\circ \theta - 36^\circ$. Il terzo erra nel risolvere la (2), che, invece della (6) e della (7), egli trova sima $x = 10^\circ$; e invece della (7), da soltanto l'altra particolarissima $x = 20^\circ k_1 + 10^\circ$ e $x = 180^\circ k_2 + 90^\circ$. Il quarto, invece della (6) e della (7), egli trova membro della (3); erra (non si capisce come) quando da $5x = 360^\circ h_2 + 180^\circ$ deduce $x = 360^\circ h_2$ deduce $x = 360^\circ h_1 - 90^\circ$ e $3x = 360^\circ h_1 + 90^\circ$ e $4x = 360^\circ h_3 + 90^\circ$. Il quarto, invece della (6) e della (7), da solo i valori particolarissimi $x = 10^\circ$ e $x = 30^\circ$, dei quali due valori il primo non è generale e il sa come, $x = 270^\circ$ e $x = 90^\circ$; e dalla (3), invece della (16), deduce, non si secondo è errato, Il quinto si limita a risolvere la (2) ed esclude esplicitamente il caso in cui si verifichi la (3).

Le soluzioni dei sigg. **Semenza** (R. I. T. *Milano*), **Bertoglio** (R. I. T. *Torino*), **Brenta** (R. I. T. *Torino*) differiscono dalle precedenti solo in ciò che in esse, invece di passare immediatamente dalla (2) alla (4), si passa dalla (2) alla (17). Il **Mosca** (R. I. T. *Torino*) **Cernuschi** (R. I. T. *Torino*), **Perez** (R. I. T. *Messina*), primo, invece della (7), da l'altra certamente errata $x = 360^\circ k - 90^\circ$; e un altro errore più grave commette quando asserisce che non c'è nessun valore di x che soddisfi le (9). Il secondo erra quando $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + 90^\circ) = 0$ deduce $x = 360^\circ k \pm 180^\circ - 90^\circ$ dove comparisce il coseno; erra quando dall'equazione $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + 90^\circ) = 0$ deduce $x = 360^\circ k \pm 180^\circ - 90^\circ$; e un altro erra quando risolve la (3), e quest'ultimo errore deriva da ciò che dalle espressioni generali degli archi che soddisfano la prima della (8) e la prima della (9)

$$x = 36^\circ n + (-1)^n 18^\circ, \qquad x = 35^\circ m + (-1)^m 54^\circ,$$

egli deduce, rispettivamente,

$$x = 360^\circ n \pm 18^\circ, \qquad x = 36^\circ m \pm 54^\circ,$$

invece della (10) e della (12). Il terzo commette, nella (17), lo stesso errore del secondo; non dà le espressioni generali delle corrispondenti soluzioni; ed erra nel dichiarare impossibile la coppia (9). Il quarto erra quando dalla (19) deduce $x = 360^\circ . 2h \pm 180^\circ - 90^\circ$, invece della (7); e in quanto alla (3) egli si limita a dire che essa *è assurda, a meno che non vi siano soluzioni comuni alle due equazioni* (8), *o alle due equazioni* (9). Il quinto erra quando dalla (18), invece della (6), deduce $x = 10^\circ (1 - 4k)$ *con k nullo o dispari*; erra quando dalla (19) deduce $x = 360^\circ . 2h + 90^\circ$ ed $x = 360^\circ . 2h - 270^\circ$, perchè la prima non è generale e la seconda è sbagliata; erra poi tutta la soluzione della (3), sbagliando le espressioni generali degli archi che soddisfano separatamente a ciascuna delle quattro equazioni (8) e (9), e asserendo che ciascuna di queste espressioni soddisfa alla (3).

Il sesto osserva che, se

$$\cos 4x \gtrless \operatorname{sen} 5x,$$

si ha, corrispondentemente,

$$\frac{1}{\cos 4x} \lessgtr \frac{1}{\operatorname{sen} 5x},$$

e che quindi la equazione proposta non può essere soddisfatta altro che quand si verifichi la (2), della quale egli trova benissimo le soluzioni generali (6) e (7) non ha pensato che l'equazione proposta è soddisfatta anche se si verificano co temporaneamente la (8), o la (9).

Nelle soluzioni dei sigg. **Santarella** (L. P. *Bitonto*), **Maranghella** (R. L. *Arezzo*), **Pomini** (R. I. T. *Milano*) si ricorre alle espressioni che danno sen $5x$ e cos $4x$ in funzione di sen x. Il primo erra quando asserisce che l'equazione proposta si scinde in quattro equazioni, che sono la (2), la (3), $\cos 4x = 0$ e sen $5x = 0$; risolve bene la (2), passando per la (4); poi, sostituite nella (3) le espressioni accennate, giunge a un'equazione numerica di nono grado in sen x, delle cui nove radici, una si vede subito essere data da sen $x = -1$, donde la (16), e le altre otto (come egli asserisce) non sono calcolabili colla matematica elementare. Il secondo comincia a sostituire le espressioni accennate fino nella (2), giungendo così a un'equazione numerica di quinto grado in sen x, che si scinde in due di primo e una di terzo; ma poi nel risolvere queste equazioni trova $x = 180^\circ k \pm 90^\circ$ e $x = 180^\circ k \pm 30^\circ$, invece della (6) e della (7); in quanto alla (3), egli giunge, come il primo a un'equazione di nono grado (la quale però è errata nei coefficienti) e si limita a concludere che, risolvendo questa equazione, si hanno le altre radici della proposta. Il terzo comincia col commettere il grave errore di scindere la equazione proposta in due equazioni, una delle quali è la (2) e l'altra è

$$\operatorname{sen} 5x + \cos 4x + 1 = 0, \tag{3$'$}$$

invece delle (3); erra poscia nel risolvere la (2), perchè, invece della (6) e della (7), trova $x = \pm (20^\circ k_1 + 10^\circ)$ e $x = \pm (180^\circ k_2 + 90^\circ)$; sostituendo poi nella (3)$'$ le espressioni accennate, giunge ad un'equazione numerica di quinto grado in sen x, che egli risolve laboriosissimamente col metodo d'approssimazione di Newton (!), concludendo che la (3)$'$ non ammette nessuna radice.

G. Pesci.

694. *Discutere l'equazione*

$$x^2(1 + \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma) + x(1 - \tan\alpha)(\tan\beta + \tan\gamma) + \\ + (\tan\alpha + \tan\beta \tan\gamma) = 0,$$

e mostrare che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè essa abbia le sue radici reali, è che $\tan\alpha$ *non sia compresa fra* $\tan^2 \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ *e* $\operatorname{ctn}^2 \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

Elgé.

Soluzione. — Indicando con Δ il discriminante della equazione proposta, si ha

$$\begin{aligned}
(1)\quad \Delta &= (1 - \tan\alpha)^2(\tan\beta + \tan\gamma)^2 - 4(1 + \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma)(\tan\alpha + \tan\beta \tan\gamma), \\
&= (1 + \tan^2\alpha)(\tan\beta + \tan\gamma)^2 - 2\tan\alpha(\tan\beta + \tan\gamma)^2 - \\
&\qquad - 4(1 + \tan^2\alpha)\tan\beta \tan\gamma + 4\tan\alpha(1 + \tan^2\beta \tan^2\gamma), \\
&= (1 + \tan^2\alpha)(\tan\beta - \tan\gamma)^2 - 2\tan\alpha[(\tan\beta - \tan\gamma)^2 + 2(1 + \tan\beta \tan\gamma)^2], \\
&= (\tan\beta - \tan\gamma)^2\left[\tan^2\alpha - 2\tan\alpha\left\{1 + 2\left(\frac{1 + \tan\beta \tan\gamma}{\tan\beta - \tan\gamma}\right)^2\right\} + 1\right], \\
&= (\tan\beta - \tan\gamma)^2\left\{\tan^2\alpha - 2\tan\alpha[1 + 2\operatorname{ctn}^2(\beta - \gamma)] + 1\right\}.
\end{aligned}$$

Affinchè dunque le radici della equazione proposta siano reali, deve essere

$$\tan^2\alpha - 2\tan\alpha[1 + 2\operatorname{ctn}^2(\beta - \gamma)] + 1 \geqq 0. \tag{1}$$

Ora, risolvendo rispetto a $\tan\alpha$ l'equazione, che si ottiene eguagliando a zero il primo membro, si ha

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= 1 + 2\operatorname{ctn}^2(\beta - \gamma) \pm \operatorname{ctn}(\beta - \gamma)\sqrt{1 + 2\operatorname{ctn}^2(\beta - \gamma)}, \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2(\beta - \gamma) + 2\cos^2(\beta - \gamma) + 2\cos(\beta - \gamma)}{\operatorname{sen}^2(\beta - \gamma)}, \\
&= \frac{1 + \cos^2(\beta - \gamma) \pm 2\cos(\beta - \gamma)}{1 - \cos^2(\beta - \gamma)}, \\
&= \frac{[1 \pm \cos(\beta - \gamma)]^2}{1 - \cos^2(\beta - \gamma)};
\end{aligned}$$

quindi:

$$\tan\alpha = \frac{1+\cos(\beta-\gamma)}{1-\cos(\beta-\gamma)} = \operatorname{ctn}^2\frac{\beta-\gamma}{2}, \text{ e } \tan\alpha = \frac{1-\cos(\beta-\gamma)}{1+\cos(\beta-\gamma)} = \tan^2\frac{\beta-\gamma}{2}$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione proposta abbia le sue radici reali è dunque che $\tan\alpha$ non sia compresa tra queste due radici, gli estremi esclusi.

Le dimostrazioni pervenute sono *nove*.

Quelle dei sigg. **Vacchi** (R. I. T. *Venezia*), **De Aloysio**) (R. I. T. di *Aquila*), **Signorini** (R. L. *Arezzo*), **Maranghello** (R. L. *Arezzo*), **Janora** (R. I. T. *Bari*), coincidono, meno qualche differenza nella successione delle trasformazioni, colla precedente.

Quella del sig. **Santarella** (L. P. *Bitonto*) è meno semplice e meno chiara, perchè in essa, dopo esser giunti con laboriose trasformazioni alla diseguaglianza

$$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \leqq \frac{1-\cos^2(\beta-\gamma)}{1+\cos^2(\beta-\gamma)},$$

che è equivalente alla (2), si asserisce senz'altro che questa non può essere verificata da nessun valore di $\tan\alpha$ compreso fra i limiti indicati nel dato.

Nella dimostrazione del sig. **Mosca** (R. I. T. *Torino*) si mette Δ sotto la forma

$$\tan^2\alpha(\tan\beta+\tan\gamma)^2 - 2\tan\alpha\,[(\tan\beta+\tan\gamma)^2 + 2(1+\tan^2\beta\tan^2\gamma)] + \\ + (\tan\beta-\tan\gamma)^2,$$

si risolve rispetto a $\tan\alpha$ l'equazione che si ottiene eguagliando questa espressione a zero, senza eseguire nessuna semplificazione, e poi si fa vedere che $\tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ e $\operatorname{ctn}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, espresse in funzione di $\tan\beta$ e di $\tan\gamma$, coincidono colle radici precedentemente trovate. Questa è quindi una verificazione piuttosto che una dimostrazione, ed è molto meno semplice di quella suindicata.

Le soluzioni dei sigg. **Bertoglio** e **Cernuschi** (R. I. T. *Torino*), coincidenti nella sostanza e nella forma, sono analoghe a quella del sig. **Mosca**, però il ragionamento è assai meno completo, e in esso pare che si ammetta che due equazioni di secondo grado, aventi lo stesso discriminante, abbiano le stesse radici.

G. Pesci.

695. *Discutere l'equazione*

$$x^2(r\tan\alpha\tan\beta - p\tan\beta - q\tan\alpha) + x[(p+q)(1-\tan\alpha\tan\beta) - r(\tan\alpha+\tan\beta)] + \\ + (p\tan\alpha + q\tan\beta + r) = 0,$$

e mostrare in particolare, che le radici sono reali quando p *e* q *sono dello stesso segno.* Elgé.

Soluzione. — Indicando con Δ il discriminante della equazione proposta, si ha

$$(1)\qquad \Delta = [(p+q)(1-\tan\alpha\tan\beta) - r(\tan\alpha+\tan\beta)]^2 - \\ - 4[r\tan\alpha\tan\beta - p\tan\beta - q\tan\alpha][p\tan\alpha + q\tan\beta + r], \\ = (p^2+q^2)(1+\tan\alpha\tan\beta)^2 + r^2(\tan\alpha-\tan\beta)^2 + \\ + 2pq[(1+\tan\alpha\tan\beta)^2 + 2(\tan\alpha-\tan\beta)^2] - \\ - 2r(p+q)(\tan\alpha+\tan\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta) + \\ + 4rp\tan\beta(1-\tan^2\alpha) + 4rq\tan\alpha(1-\tan^2\beta),$$

da cui

$$(2)\qquad \Delta = (p^2+q^2)(1+\tan\alpha\tan\beta)^2 + r^2(\tan\alpha-\tan\beta)^2 + \\ + 2pq[(1+\tan\alpha\tan\beta)^2 + 2(\tan\alpha-\tan\beta)^2] - \\ - 2r(p-q)(\tan\alpha-\tan\beta)(1+\tan\alpha\tan\beta), \\ = (\tan\alpha-\tan\beta)^2[(p^2+q^2)\operatorname{ctn}^2(\alpha-\beta) + \\ + r^2 - 2r(p-q)\operatorname{ctn}(\alpha-\beta) + 4pq\operatorname{ctn}^2(\alpha-\beta) + 4pq],$$

e quindi

$$(3)\qquad \Delta = (\tan\alpha-\tan\beta)^2\left\{[(p-q)\operatorname{ctn}(\alpha-\beta) - r]^2 + 4pq\csc^2(\alpha-\beta)\right\}.$$

Di qui deriva immediatamente che l'essere p e q dello stesso segno è condizione sufficiente affinchè l'equazione proposta abbia le sue radici reali.

Le soluzioni pervenute sono soltanto *quattro*.

In quella del sig. **Vacchi** (R. I. T. *Venezia*) si giunge alla (3) per una via alquanto diversa da quella qui indicata: essa è un po' più lunga, ma è forse più diretta.

Il sig. **Signorini** (R. I. *Arezzo*), nel giungere alla (2), erra il segno nel fattore $p - q$ dell'ultimo termine, quindi Δ si riduce, erroneamente, alla forma

$$A^2 + 4pqB^2,$$

dalla quale però deriva egualmente la conclusione che si vuole.

In quella del sig. **De Aloysio** (R. I. T. *Aquila*) si asserisce, senza mostrare come, che dalla forma data dalla (1) si può passare all'altra.

$$pq - A^2;$$

come si vede, il sig. De Aloysio ha probabilmente commesso l'errore del sig. Signorini e un altro ancora; ma un errore ben più grave commette quando dall'espressione ora accennata crede di poter dedurre la conclusione che si vuole; perchè da essa, se mai, deriva che l'eguaglianza dei segni di p e di q è condizione necessaria e non sufficiente, mentre si deve dimostrare che quella condizione è sufficiente.

Il sig. **Santarella** (L. P. *Bitonto*), giunto alla (2), conclude senz'altro che, se p e q sono dello stesso segno, i primi tre termini sono certamente positivi, e la somma di essi è maggiore del terzo termine: e questo, a dir il vero, non si vede affatto.

Nota. — A proposito della discussione, richiesta in questa questione e nella precedente, si può osservare che (come ha giustamente accennato il sig. De Aloysio, per la prima) essa riesce troppo laboriosa se non si stabilisce che alcuni degli elementi dati (α, β, γ nella prima, p, q, r, α, β nella seconda) siano fissi.

G. Pesci.

QUISTIONI DA RISOLVERE

711. I centri delle facce di un poliedro regolare sono vertici di un secondo poliedro regolare; determinare il rapporto dei volumi dei due solidi.

G. Loria.

712. Dimostrare che la somma delle distanze del centro del cerchio dei nove punti dai centri dei quattro cerchi tangenti ai lati di un triangolo è il triplo del diametro del cerchio circoscritto.

C. Ciamberlini.

713. Siano M_a, M_b, M_c i punti medî dei lati di un triangolo ABC (abc); si conduca da M_a la perpendicolare c' a CA, da M_b la perpendicolare a' ad AB e da M_c la perpendicolare b' a BC; se è

$$A' \equiv (b', c'), \qquad B' \equiv (c', a'), \qquad C' \equiv (a', b'),$$

indicando con Δ e Δ' rispettivamente le aree dei due triangoli ABC ed A'B'C', si ha

$$64 \,.\, \Delta \,.\, \Delta' = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

G. Cardoso-Laynes.

714. A ciascuna estremità dei bracci di una leva di primo genere è sospeso, mediante un filo di peso trascurabile, un corpo omogeneo, il quale viene a immergersi totalmente in un liquido. Trovare in qual rapporto debbono essere i due bracci affinchè la leva resti in equili-

brio, supposto che l'un corpo sia una sfera di raggio r e di peso specifico p, e il liquido in cui è totalmente immerso abbia il peso specifico P; che l'altro corpo sia un cilindro rotondo di altezza h, di peso specifico p' e l'area della sua superficie *totale* abbia il rapporto k con quella della sfera, e il liquido in cui trovasi totalmente immerso abbia il peso specifico P'. Discutere la formola di risoluzione.

G. Garbieri.

715. Trovare i lati d'un triangolo rettangolo, sapendo che la superficie laterale del cono di rotazione avente l'ipotenusa per raggio della base e per apotema la somma dei cateti è equivalente alla superficie del cerchio di raggio a, e sapendo inoltre che il rettangolo contenuto dalle differenze fra l'ipotenusa e ciascuno dei cateti è equivalente al quadrato di lato b.

716. Pel vertice C opposto ad A di un rettangolo ABCD si conduca una retta che seghi nei punti P e Q i prolungamenti dei lati AB ed AD, e si completi il rettangolo APRQ. Determinare i segmenti AP ed AQ in modo che il volume generato dalla rotazione del rettangolo APRQ intorno al lato AP sia eguale al volume di un altro cilindro avente il raggio della base eguale ad un segmento dato k e l'altezza eguale ad AQ. Qual'è il più piccolo valore che si può dare a k? e come si trovano in questo caso i punti P e Q?

717. Trovare quattro numeri in progressione geometrica, data la differenza a degli estremi e quella b dei medî; e provare che se il rapporto tra b ed a è dato dalla

$$\frac{b}{a} = \frac{q^2 - 1}{1 + 3q^2}, \tag{1}$$

dove q è un numero qualunque, le soluzioni diventano razionali in a, b, q.

718. Trovare quattro numeri in proporzione geometrica, conoscendo il rapporto q di un antecedente al rispettivo conseguente, la somma a dei due antecedenti e la somma b^2 dei quadrati dei quattro numeri.

***

719. Dimostrare che la funzione

$$\frac{1 + \operatorname{sen}^2(x+h)}{1 - \operatorname{sen}^2(x+h)} \times \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

dove h è un arco costante, compreso fra 0 e $\frac{1}{2}\pi$, cresce quando x cresce da $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - h)$ a $\frac{1}{2}\pi - h$.

G. Pesci.

720. Dimostrare col metodo d'induzione la nota formula

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

essendo p un numero intero positivo.

Catania.

N. B. — La quist. 714 è stata proposta al concorso per la R. Accademia Navale, sessione di novembre; le quist. 715 e 717 sono state date agli esami di licenza d'istituto tecnico nella sessione estiva, e le quis. 716 e 718 nella sessione autunnale.

N. B. — Le soluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 31 gennaio 1906.

Si pregano vivamente i signori risolutori di *inviare ogni quistione o giuoco in foglio separato, scrivendo su ciascuno il proprio nome e l'istituto al quale essi appartengono.*

Si consiglia d'inviare le risoluzioni come manoscritti aperti, avvertendo che le lettere non francate o insufficientemente francate vengono respinte.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 dicembre 1905

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 229, 233, 235 e 236.

229. *Un numero di tre cifre si scrive tre volte, poi si cancella una volta la 1ª cifra, una volta la 2ª ed una la 3ª e sommando i tre numeri che in tal modo rimangono si ottiene la metà del numero dato. Che numero può essere? (Trovare tutte le soluzioni).*

G. C.-L.

Risoluzione.

Per i dati del problema, indicando rispettivamente con x, y e z le cifre del numero N cercato, si deve avere

$$(10y + z) + (10x + z) + (10x + y) = \tfrac{1}{2}(100x + 10y + z)$$

cioè

$$20x - 4y - z = 0. \qquad (1)$$

Da quest'ultima si vede che z deve essere multiplo di 4, quindi i soli valori che può avere z sono 0, 4 e 8.

Per $z = 0$ la (1) diviene $5x - y = 0$ che ha l'unica soluzione $x = 1$ e $y = 5$

" $z = 4$ " " $5x - y = 1$ " le soluzioni $\begin{cases} x = 1 \text{ e } y = 4 \\ x = 2 \text{ e } y = 9 \end{cases}$

" $z = 8$ " " $5x - y = 2$ " " $\begin{cases} x = 1 \text{ e } y = 3 \\ x = 2 \text{ e } y = 8. \end{cases}$

Riepilogando si ha dunque il seguente prospetto

	x	y	z	N
1ª soluzione	1	5	0	150
2ª "	1	4	4	144
3ª "	2	9	4	294
4ª "	1	3	8	138
5ª "	2	8	8	288

I numeri cercati sono 150, 144, 294, 138, 288.

Inviarono risoluzioni analoghe a quella pubblicata i sigg. **Janora**, R. I. T. di *Bari* e **Marranghello**, R. L. di *Arezzo*.

Inviarono altre risoluzioni i sigg. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Belvederi**, R. L. Galvani e **Graziani**, R. I. T. di *Bologna*; **Bifano** e **Piscitelli**, R. L. di *Benevento*; **Brenta**, **Cernuschi**, **Vercellin**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Dal Re**, R. S. T. di *Forlì*; **De Bei**, **Rivera** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **De Giorgis**, R. L. di *Ivrea*; **Gneme** di *Roma*; **Lucaroni** e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Mammarella**, I. T. P. di *Ravenna*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto* e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*.

(G. C.-L.)

233. *Tre amici si trovano nell'ingresso di un teatro, mentre sono disposti a prendere ciascuno un biglietto per le poltrone. " Se prendessimo un palco — dice uno di essi — si spenderebbe soltanto 1 lira di più ciascuno ... " — " Vediamo piuttosto — risponde un altro — di trovare un quarto compagno, ed allora potremo acquistare il palco senza maggiore spesa " e si mettono in traccia di un quarto compagno. Quanto era il prezzo delle poltrone e quanto quello dei palchi?*

G. C.-L.

Risoluzione.

Indicando rispettivamente con x ed y il prezzo di una poltrona e di un palco (in lire), per i dati del problema, dovremo avere

$$3(x + 1) = y, \qquad 4x = y; \qquad \text{da cui} \qquad x = 3, \qquad y = 12;$$

cioè il prezzo di una poltrona era L. 3 e quello di un palco L. 12.

Inviarono risoluzioni, quasi tutte analoghe a quella pubblicata, i predetti sigg. **Belvedere**, **Belvederi**, **Bifano**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Dal Re**, **De Bei**, **De Giorgis**, **Gneme**, **Graziani**, **Janora**, **Lucaroni**, **Mammarella**, **Maracci**, **Marranghello**, **Piscitelli**, **Rivera**, **Santarella**, **Signorini**, **Terracini**, **Vacchi**, **Vercellin** e il sig. **Masella**, R. I. T. di *Melfi*.

(G. C.-L.)

235. *In una classe, volendo disporre gli alunni 2 per banco mancherebbero 3 banchi e volendoli disporre 3 per banco avanzerebbero 4 banchi; quanti sono i banchi e quanti gli alunni?*

G. C.-L.

Risoluzione dei sigg. **Crugnola**, R. I. T. di *Milano*; **De Giorgis**, R. L. di *Ivrea*; **Franchi** e **Patrignani**, R. S. T. di *Forlì*; **Graziani**, R. I. T. di *Bologna*; **Marranghello**, R. L. di *Arezzo*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*.

Indicando rispettivamente con x ed y il numero degli alunni e quello dei banchi, avremo il sistema

$$2(y + 3) = x; \qquad 3(y - 4) = x.$$

Sottraendo membro a membro si ha $y = 18$ e, sostituendo, $x = 42$; gli alunni sono 42 ed i banchi 18.

Altre risoluzioni dei predetti sigg. **Belvedere**, **Belvederi**, **Bifano**, **Brenta**, **Cernuschi**, **De Bei**, **Gneme**, **Janora**, **Mammarella**, **Maracci**, **Masella**, **Piscitelli**, **Signorini**, **Vacchi** e dei sigg. **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **Levi**, R. I. T. di *Torino*; **Lopez**, R. I. T. di *Bari*; sig.ra **Pellizzari**, R. I. T. di *Cuneo*; **Renna**, L. P. di *Bitonto*; **Zavagli**, R. S. T. di *Forlì*.

(G. C.-L.)

236. *Due fratelli, Giulio e Luigi, hanno ciascuno due figli, un maschio ed una femmina; ogni maschio ha ora $\frac{1}{4}$ dell'età del padre e ciascuna femmina $\frac{1}{7}$ dell'età dello zio. I quattro ragazzi, Elisa, Maria, Cesare e Vittorio hanno insieme 3 anni più di Luigi; Cesare ha 5 anni meno di sua sorella e fra 8 anni l'età di Elisa sarà la metà di quella del padre suo.*

Si domandano le età dei sei individui e si desidera sapere anche quali siano i figli di Giulio e quali i figli di Luigi.

G. C.-L.

Risoluzione.

Indicando rispettivamente con x ed y il numero degli anni di età di Giulio e di Luigi, per i dati del problema, avremo l'equazione $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{7}y + \frac{1}{7}x = y + 3$, dalla quale si ha

$$y = x - 6. \qquad (1)$$

Distinguiamo ora due casi:

α) Cesare è figlio di Giulio.

Si deve avere $\frac{1}{7}x + 5 = \frac{1}{7}(x - 6)$, da cui $x = 42$ e, per la (1), $y = 36$, cioè Giulio avrebbe 42 anni, Luigi 36, Cesare (figlio di Giulio) ne avrebbe 7, Vittorio (figlio di Luigi) ne avrebbe 6; la figlia di Giulio avrebbe 12 anni e quella di Luigi ne avrebbe 14.

β) Cesare è figlio di Luigi.

Si deve avere $\frac{1}{7}(x - 6) + 5 = \frac{1}{7}x$, da cui $x = 24$ e, per la (1), $y = 18$, cioè Giulio avrebbe 24 anni, Luigi 18, Cesare (figlio di Luigi) ne avrebbe 3, Vittorio (figlio di Giulio) ne avrebbe 4; la figlia di Giulio avrebbe 6 anni e quella di Luigi ne avrebbe 8.

Il caso *β)* è da escludersi perchè, fra le altre ragioni, fra Luigi e sua figlia vi sarebbe una differenza di soli 10 anni (!); considerando il caso *α)* possono farsi due ipotesi:

a) *che Elisa sia figlia di Giulio e quindi abbia 12 anni.*

In tal caso si dovrebbe avere

$$12 + 8 = \frac{1}{4}(42 + 8),$$

ma questo è assurdo, quindi l'ipotesi è inammissibile.

b) *che Elisa sia figlia di Luigi e quindi abbia 14 anni.*

In tal caso si dovrebbe avere

$$14 + 8 = \frac{1}{4}(36 + 8),$$

cioè $22 = 22$ e quindi l'ipotesi è ammissibile, cioè Elisa ha 14 anni ed è figlia di Luigi.

Riepilogando dunque può dirsi che le due famiglie sono così costituite:

LUIGI (anni 36)		GIULIO (anni 42)	
Elisa (anni 14)	Vittorio (anni 6)	Maria (anni 12)	Cesare (anni 7)

Sono infatti verificate tutte le condizioni del problema, come mostrano le seguenti identità:

$$7 = \frac{1}{4}.42; \quad 6 = \frac{1}{7}.36; \quad 12 = \frac{1}{7}.36; \quad 14 = \frac{1}{4}.42; \quad 12 + 7 + 14 + 6 = 36 + 3;$$
$$7 = 12 - 5; \quad 14 + 8 = \frac{1}{4}(36 + 8).$$

Inviarono risoluzioni i predetti sigg. **Belvedere, Belvederi, Bifano, Brenta, Cerauschi, De Bei, De Giorgis, Gnome, Graziani, Janora, Levi, Lopez, Mammarella, Marranghello, Pellizzari, Piccitelli, Roma, Santarella, Signorini, Vacchi, Vercellin** ed il sig. **Rayaioli** (R. L. di *Forlì*). (G. C.-L.)

GIUOCHI PROPOSTI.

247. Trovare tre numeri dispari consecutivi tali che la somma dei loro quadrati sia un numero di 4 cifre uguali.

248. Trovare un quadrato perfetto di 4 cifre che abbia le prime due cifre uguali fra loro ed uguali fra loro le ultime due.

249. I membri di una società pagano ciascuno un'eguale quota per avere un fondo di m lire. L'anno passato, la società avendo p membri meno, ciascuno pagava n lire di più per lo stesso fine. Quanti sono gli attuali soci e quant'è la quota di ciascuno?
(Caso particolare: $m = 150$, $p = 5$, $n = 1$). *(Da varie raccolte)*

250. Trovare due numeri razionali tali che la somma dei loro quadrati sia 2.

C. Ciamberlini.

251. Una bicicletta che ha la velocità v_1 parte dalla città A per la città B, che ha una distanza d da quella; dopo un certo tratto di strada incontra una automobile che ha la velocità v_2 ed è diretta verso A. Questa, giunta in A, si trattiene in città un tempo t e riparte per B con la stessa velocità v_2, sorpassa la bicicletta prima di giungere in B ed arriva in questa città un tempo τ prima della bicicletta. Si domanda in quali punti della strada AB si siano incontrati ciascuna volta i due veicoli. G. C.-L.

Le risoluzioni si accettano fino al 31 gennaio p. v.; devono essere indirizzate al

prof. **Giulio Cardoso-Laynes** *q* **Savona**, *R. Scuola Tecnica.*

ERRATA-CORRIGE. — Ai nomi dei risolutori della quistione **665** si aggiunga quello del sig. **Janora**, R. I. T. di *Bari*. Nel Fasc. I, pag. 16, quist. **708**, nella seconda formola al posto di BC^2 deve esser posto BD^2.

ANNO IX — GENNAIO 1906 — FASC. III

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1º luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al Periodico di Matematica

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1º novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Alcune relazioni tra gli elementi d'un triangolo. (R. VERCELLIN.)

Sempre a proposito della 60ª quistione a concorso. (R. MAZZOLA.) *(Continua)*

66ª quistione a concorso.

Risoluzione della 64ª quistione a concorso.

Risoluzioni delle quistioni 679, 698, 702, 703, 704, 705 e 708.

Quistioni da risolvere 721-730.

Copertina:

Sofisma.

Spiegazione dei giuochi 199, 234, 240 e 242.

Giuochi proposti 252-253.

LIVORNO

RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE

LIBRAIO-TIPOGRAFO

1906

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, alla quale destiniamo tre pagine della copertina rivolgersi al redattore

Dott. **Giulio Cardoso-Laynes**, prof. nella R. Scuola Tecnica di *Savona*

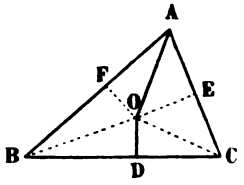
(Via Luigi Corsi - Villa Garroni)

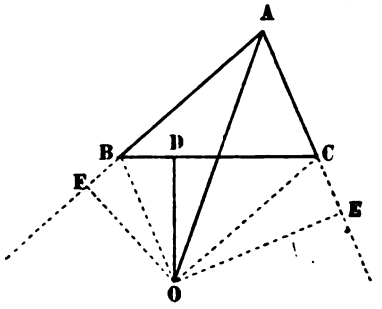
SOFISMA.

Ogni triangolo è isoscele.

Dato un triangolo ABC qualsivoglia, si innalzi nel punto di mezzo D di BC la perpendicolare e si conduca la bisettrice dell'angolo opposto $\widehat{A}$.

Se codesta bisettrice e codesta perpendicolare sono parallele il triangolo è isoscele. Se esse s'incontrano in un punto O questo è o interno o esterno al triangolo.





Se O è interno al triangolo, si abbassino da O le perpendicolari OF e OE su AC, AC rispettivamente. Poichè

$$OF = OE, \qquad \widehat{FAO} = \widehat{EAO},$$

i due triangoli rettangoli AFO, AEO sono uguali ed è

$$AF = AE. \tag{1}$$

Parimente è OB = OC e i due triangoli rettangoli OBF, OCE, aventi uguali l'ipotenusa e un cateto sono uguali. Ne risulta

$$FB = EC \tag{2}$$

e quindi, sommando membro a membro le (1) (2),

$$AB = AC$$

e il triangolo dato è isoscele.

Se poi il punto O è esterno al triangolo, basta ripetere la medesima costruzione. Si dimostra similmente l'uguaglianza dei due triangoli rettangoli AFO, AEO, onde risulta

$$AE = AF.$$

Così dall'uguaglianza dei triangoli OBF, OCE si ricava

$$EB = EC$$

e, sottraendo membro a membro,

$$AB = AC$$

onde si conclude che anche in questo caso il triangolo è isoscele.

Questo sofisma, insieme ad altri, è riportato nei pregevolissimi *Elementi di Geometria* di F. Enriquez ed U. Amaldi, dalla quale opera l'abbiamo trascritto letteramente.

Invitiamo i nostri lettori a scoprire quale sia l'errore che conduce ad un résultato evidentemente assurdo.

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 199, 234, 240 e 242.

199. *Trovare* m *numeri consecutivi dei quali nessuno sia primo.*

Risoluzione del sig. **Lucca**, R. L. di *Cuneo*.

Chiamando P il prodotto di tutti i numeri interi da 2 sino ad $m+1$, sarà P multiplo di ciascuno dei numeri interi 2, 3, 4, ... m, $m+1$ e per conseguenza gli m numeri

$$P+2, \quad P+3, \quad P+4, \ldots, P+m, \quad P+(m+1)$$

sono rispettivamente multipli di 2, 3, 4, ..., m, $(m+1)$ e perciò non sono numeri primi.

Risoluzione analoga del sig. **Mammarella**, I. T. P. di *Ravenna*; altre risoluzioni dei sigg. **Gergic** di *Trieste*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Talentoni**, R. L. di *Forlì*; **Vacchi**, R. I. T. *Venezia*.

ALCUNE RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI D'UN TRIANGOLO

FEB 20 1906

1. Gli elementi d'un triangolo qualunque sono legati fra loro da molte relazioni assai interessanti, alcune delle quali sono assai note. Mi propongo di raccogliere in questa noticina parecchie relazioni semplici e notevoli, di cui alcune, forse, non furono mai osservate, e di mostrare come di esse ci si possa utilmente giovare, quando si vuol costruire un triangolo, dati tre elementi, che non siano tutti lati ed angoli.

Sia ABC il triangolo fondamentale; indicherò con α, β, γ, gli angoli opposti ai lati a, b, c; con h_a, h_b, h_c le altezze relative ai lati a, b, c; con r_a, r_b, r_c i raggi dei cerchi exinscritti; con δ_a, δ_b, δ_c le distanze dell'ortocentro dei vertici; con R, r i raggi dei circoli circoscritto e inscritto; con p, S il semiperimetro e l'area del triangolo.

2. Le note formule

$$p-b=\frac{S}{r_b}, \qquad p-c=\frac{S}{r_c},$$

sommate membro a membro dànno

$$a=S\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right),$$

da cui

$$\frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right). \tag{1}$$

Formole analoghe si hanno per h_b, h_c; avremo dunque il

Teorema. — *In ogni triangolo l'altezza relativa a uno dei lati è media* armonica *fra i raggi dei cerchi exinscritti relativamente agli altri due lati.*

Corollario — *In ogni triangolo si ha*

$$\frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right). \tag{2}$$

Questa, ed analoghe si ricavano facilmente dalla (1) mediante la

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}. \tag{3}$$

3. Moltiplicando fra loro membro a membro le (1), (2), risulta

$$\frac{1}{h_a^2}=\frac{(r_a-r)(r_b+r_c)}{4rr_ar_br_c}$$

ossia

$$\left.\begin{array}{ll} a^2=(r_a-r)(r_b+r_c); & \\ b^2=(r_b-r)(r_a+r_c); & c^2=(r_c-r)(r_a+r_b) \end{array}\right\}. \tag{4}$$

poichè

$$S^2=rr_ar_br_c. \tag{5}$$

Queste formole esprimono il seguente

TEOREMA. — *In ogni triangolo un lato è medio proporzionale fra la somma dei raggi dei circoli exinscritti relativamente agli altri due lati, e l'eccesso del raggio del cerchio exinscritto ad esso relativo su quello del cerchio inscritto.*

Le (4) moltiplicate fra loro membro a membro porgono

$$(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = a^2b^2c^2 \qquad (6)$$

ed essendo (V. " Supplemento „ Anno VIII, Fasc. V)

$$(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r) = 4Rr^2, \qquad (7)$$
$$a^2b^2c^2 = 16R^2S^2,$$

sostituendo risulterà

$$S = \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)}{R}}. \qquad (8)$$

Questa, essendo $S = pr$, porge a sua volta

$$p = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)}{R}}. \qquad (9)$$

4. Dalle (4) consegue

$$(b + c)(b - c) = (r_b - r)(r_a + r_c) - (r_c - r)(r_a + r_b)$$

ossia, sviluppando, semplificando e raccogliendo

$$(b + c)(b - c) = (r + r_a)(r_b - r_c). \qquad (10)$$

Avremo perciò:

TEOREMA. — *In ogni triangolo il rettangolo che ha per lati la somma di due lati, e la loro differenza è equivalente al rettangolo i cui lati sono la somma dei raggi dei circoli inscritto e exinscritto relativamente al terzo lato del triangolo, e la differenza dei raggi degli altri due circoli exinscritti.*

Si ha poi

$$\frac{r_a + r}{r_a - r} = \frac{1 + \frac{r}{r_a}}{1 - \frac{r}{r_a}} = \frac{1 + \frac{p - a}{p}}{1 - \frac{p - a}{p}};$$

$$\frac{r_b + r_c}{r_b + r_c} = \frac{1 + \frac{r_c}{r_b}}{1 - \frac{r_c}{r_b}} = \frac{1 + \frac{p - b}{p - c}}{1 - \frac{p - b}{p - c}};$$

dalle quali scende

$$\frac{r_a + r}{r_a - r} = \frac{b + c}{a} \qquad (11) \qquad\qquad \frac{r_b + r_c}{r_b - r_c} = \frac{a}{b - c} \qquad (11)'$$

sicchè

TEOREMA. — *In ogni triangolo la somma di due lati sta al terzo lato, come la somma dei raggi dei circoli inscritto e exinscritto al terzo lato sta alla differenza dei medesimi; un lato sta alla differenza degli altri due, come la somma dei raggi dei cerchi exinscritti loro relativi sta alla differenza dei medesimi raggi.*

Corollario. — *In ogni triangolo si ha*

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{(r_a+r)(r_b+r_c)}{(r_a-r)(r_b-r_c)}. \tag{12}$$

5. La nota relazione

$$r_a+r_b+r_c-r=4R \tag{13}$$

e la prima delle (4) mostrano che tanto r_a-r, quanto r_b+r_c soddisfano l'equazione quadratica

$$X^2-4RX+a^2=0. \tag{μ}$$

Perciò sussistono le relazioni

$$a^2=(r_b+r_c)(4R-r_b-r_c), \quad (14) \qquad a^2=(r_a-r)(4R-r_a+r). \quad (14)'$$

Ma dalla (μ) si desume

$$\left.\begin{matrix} r_b+r_c \\ r_a-r \end{matrix}\right\}=2R\pm\sqrt{4R^2-a^2}. \tag{15}$$

Supponendo di prendere δ_a negativamente quando è $\widehat{A}>\frac{1}{2}\pi$, siccome

$$\delta_a=\sqrt{4R^2-a^2}, \tag{16}$$

risulta

$$\delta_a=r_b+r_c-2R=r_a+r+2R; \tag{17}$$

la (17), ed analoghe dànno

$$\delta_a+\delta_b+\delta_c=2(r_a+r_b+r_c-3R),$$

ossia, per la (13),

$$\delta_a+\delta_b+\delta_c=2(R+r). \tag{18}$$

Potremo, in conclusione, dire:

Teorema. — *In ogni triangolo la somma delle distanze dell'ortocentro dai vertici è uguale alla somma dei diametri dei circoli inscritto e circoscritto.*

6. Essendo

$$\delta_a=2OM_a=2R\cos\alpha, \tag{19}$$

la (17) dà

$$r_b+r_c=4R\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha, \quad (20) \qquad r_a-r=4R\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha. \quad (20)'$$

Queste, per la (3) forniscono

$$\frac{r_a-r}{r_b+r_c}=\frac{rr_a}{r_br_c}=\tan^2\tfrac{1}{2}\alpha. \tag{21}$$

La (21), avuto riguardo alla (5), dà

$$S=rr_a\,\mathrm{ctn}\,\tfrac{1}{2}\alpha=r_br_c\tan\tfrac{1}{2}\alpha. \tag{22}$$

Poichè

$$S=\tfrac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

dalla (22) scende

$$r_br_c=bc\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha, \quad (23) \qquad rr_a=bc\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha. \quad (23)'$$

Da queste due, finalmente, si ha la notevole relazione

$$r_br_c+rr_a=bc, \tag{24}$$

che esprime il

TEOREMA. — *In ogni triangolo il rettangolo di due tati è equivalente alla somma dei rettangoli, i cui lati sono rispettivamente i raggi dei cerchi exinscritti ad essi relativi, e quelli dei cerchi inscritto ed exinscritto relativamente al terzo lato.*

Dalle date si ha pure

$$r_b r_c - r r_a = bc \cos \alpha, \tag{25}$$

$$\frac{r_b r_c - r r_a}{r_b r_c + r r_a} = \cos \alpha. \tag{26}$$

Dalla (4) e dalla (11) si ricava

$$r_a + r = (b + c) \sqrt{\frac{r_a - r}{r_b + r_c}},$$

ossia per la (21)

$$r_a + r = (b + c) \tan \tfrac{1}{2}\alpha. \tag{27}$$

Si ha analogamente

$$r_b - r_c = (b - c) \operatorname{ctn} \tfrac{1}{2}\alpha. \tag{28}$$

Dalla (27) ed analoghe, per la (13), consegue

$$4(\mathrm{R} + r) = (b + c) \tan \tfrac{1}{2}\alpha + (c + a) \tan \tfrac{1}{2}\beta + (a + b) \tan \tfrac{1}{2}\gamma, \tag{29}$$

ossia

$$(4(\mathrm{R}+r) = a \tan \tfrac{1}{2}\beta + \tan \tfrac{1}{2}\gamma) + b(\tan \tfrac{1}{2}\gamma + \tan \tfrac{1}{2}\alpha) + c(\tan \tfrac{1}{2}\alpha + \tan \tfrac{1}{2}\beta) =$$
$$= a \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma} + b \frac{\cos \frac{1}{2}\beta}{\cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\alpha} + c \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\beta};$$

da cui, applicando le notissime formole che esprimono $\cos \frac{1}{2}\alpha$, $\cos \frac{1}{2}\beta$, $\cos \frac{1}{2}\gamma$, in funzione di a, b, c, si ha facilmente

$$4(\mathrm{R} + r) = \frac{a^2}{p \tan \frac{1}{2}\alpha} + \frac{b^2}{p \tan \frac{1}{2}\beta} + \frac{c^2}{p \tan \frac{1}{2}\gamma}, \tag{30}$$

ossia, per formole note

$$4(\mathrm{R} + r) = \frac{a^2}{r_a} + \frac{b^2}{r_b} + \frac{c^2}{r_c}.$$

PROBLEMA I. — *Costruire un triangolo, dati* $\mathrm{r_b} + \mathrm{r_c}$; $\mathrm{r_a} - \mathrm{r}$; $\mathrm{h_a}$.

Dalla (13) ricaviamo che R è eguale al quarto della somma

$$(r_b + r_c) + (r_a - r);$$

e dalle (4) che a è medio geometrico tra i segmenti $r_b + r_c$, $r_a - r$. Siamo così condotti al problema facilissimo e noto di costruire un triangolo, dati R, a, h_a.

PROBLEMA II. — *Costruire un triangolo, dati* $\mathrm{r_b}$; $\mathrm{r_c}$; R (*oppure* $\mathrm{r_a}$, r, R).

Mediante la (14) si trova subito a; mediante la (1) possiamo costruire h_a come quarta proporzionale dopo $\frac{1}{2}(h_b + h_c)$, r_b e r_c. Siamo quindi condotti al caso in cui i dati sono R, a, h_a. Se i dati sono r_a, r, R, si ricorre alle (14)′ e (2).

PROBLEMA III. — *Costruire un triangolo, dati* $\mathrm{b} - \mathrm{c}$; $\mathrm{r_b} - \mathrm{r_c}$; r.

Osservando la formola (28) scorgesi che l'angolo α può ottenersi come angolo al vertice d'un triangolo isoscele di base $2(b - c)$ e altezza $r_b - r_c$. Ottenuti così l'angolo α di vertice A, inscriviamoci la

circonferenza di raggio r che toccherà i lati di α in due punti B′, C′ e sarà, come è noto

$$AB' = AC' = p - a\,.$$

Ciò posto abbiamo

$$\frac{2(p-a)}{b-c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} - \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} =$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} - \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)},$$

quindi

$$\frac{2\,AB'}{b-c}\tan\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) - \cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = -\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha$$

ossia, per la (28)

$$\frac{2\,AB'}{r_b - r_c}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) - \cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = -\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Da questa, posto

$$\frac{2\,AB'}{r_b - r_c} = \operatorname{ctn}\varphi$$

si ricava

$$\operatorname{sen}\left[\varphi - \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\right] = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{sen}\varphi\,.$$

Si può quindi costruire l'angolo φ, poscia $\varphi - \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, indi ricavare $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ e finalmente β, γ.

R. Vercellin.

SEMPRE A PROPOSITO DELLA 60ª QUISTIONE A CONCORSO

In questa nota espongo le conclusioni, a cui sono giunto circa la generalizzazione del problema espresso nella 60ª quistione a concorso, proposta nel fasc. V del passato anno di questo Supplemento, del quale problema la risoluzione fu da me esposta nel fasc. I del corrente anno.

Ritenendo le notazioni indicate nell'enunciato della quistione, al quale mi riferisco, suppongo i numeri $p_1, p_2, \ldots p_s$ tutti minori di n, com'è lecito, ed $n = sm + i$ con i intero, positivo e minore di s, e, posto

$$P_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_i\,, \qquad P_s = p_1 + p_2 + \ldots + p_s\,,$$

formo il seguente quadro di numeri

$$\begin{array}{lllll}
p_1 & P_s+p_1 & 2P_s+p_1 & \ldots(m-1)P_s+p_1 & mP_s+p_1 \\
p_1+p_2 & P_s+p_1+p_2 & 2P_s+p_1+p_2 & \ldots(m-1)P_s+p_1+p_2 & mP_s+p_1+p_2 \\
p_1+p_2+p_3 & P_s+p_1+p_2+p_3 & 2P_s+p_1+p_2+p_3 & \ldots(m-1)P_s+p_1+p_2+p_3 & mP_s+p_1+p_2+p_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & mP_s+P_i \\
P_s & 2P_s & 3P_s & \ldots mP_s &
\end{array} \qquad (A$$

i quali si debbano leggere in colonna e successivamente le diverse colonne.

S'intende di leggieri che il problema generale si traduce in quest'altro puramente numerico:

Determinare le condizioni necessarie e sufficienti, alle quali debbano soddisfare i numeri p, *affinchè gli* n *numeri del quadro* (A, *divisi per* n, *diano resti tutti distinti e l'ultimo dia per resto zero,*
e per il suo studio distinguo il caso, in cui sia $i = 0$, ovvero n divisibile per s, dall'altro, in cui sia i diverso da zero e minore di s.

1. Primo caso, cioè $n = sm$. — In questo caso il quadro (A perde l'ultima sua verticale, diventando

$$\begin{array}{llll} p_1 & P_s + p_1 & 2P_s + p_1 & \dots (m-1)P_s + p_1 \\ p_1 + p_2 & P_s + p_1 + p_2 & 2P_s + p_1 + p_2 & \dots (m-1)P_s + p_1 + p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_s & 2P_s & 3P_s & \dots m P_s \end{array} \qquad \text{(B}$$

e dimostro il seguente

Teorema. — *Se gli* n *numeri del quadro* (B, *divisi per* n, *dànno resti tutti distinti, e l'ultimo dà per resto* 0, *necessariamente è* P_s *divisibile per* s, *ma non è divisibile per* s *veruno dei numeri* p, *nè veruna delle somme di alcuni consecutivi di essi.*

Infatti, poichè l'ultimo dei numeri del quadro (B è divisibile per n, si ha

$$m P_s = nt$$

con t intero, e quindi

$$P_s = st.$$

Inoltre, poichè i numeri del quadro (B, divisi per n, dànno resti tutti distinti, ovvero dànno per resti i numeri da 1 ad n, salvo l'ordine, essi sono congrui coi numeri naturali da 1 ad n secondo il modulo n, e quindi pure secondo il modulo s, che è un divisore di n per ipotesi; ma i numeri di una stessa orizzontale del quadro (B sono congrui tra loro secondo il modulo s, essendo la differenza tra due qualunque di essi divisibile per s, quindi necessariamente i numeri di una stessa colonna del quadro (B devono essere congrui coi numeri da 1 ad s secondo il modulo s, salvo l'ordine. Considerando perciò la prima colonna del quadro, e ricordando che P_s è divisibile per s, si deduce che nessuno degli altri nnmeri di essa colonna e nessuna delle differenze fra due numeri della stessa colonna devono essere divisibili per s; cioè non dev'essere divisibile per s veruno dei numeri p, nè veruna delle somme di alcuni consecutivi di essi.

2. Le condizioni espresse dal teorema precedente non sono però sufficienti affinchè i numeri del quadro (B divisi per n diano resti tutti distinti; così, per es., essendo

$$n = 30, \quad s = 5, \quad p_1 = 17, \quad p_2 = 11, \quad p_3 = 18, \quad p_4 = 13, \quad p_5 = 16,$$

si verificano le condizioni di essere $P_s = P_5 = 75$ divisibile per s, e di non essere divisibili per s veruno dei numeri p e veruna delle somme di alcuni consecutivi di essi; eppure divisi per $n = 30$ dànno resti uguali

$$2P_5 = 150, \qquad 4P_5 = 300, \qquad 6P_5 = 450$$

appartenenti all'ultima orizzontale del quadro (B. Dimostro invece il seguente

Teorema. — *Se non sono divisibili per* s *veruno dei numeri* p *e veruna delle somme di alcuni consecutivi di essi, ad eccezione di* P_s, *affinchè i numeri del quadro* (B, *divisi per* n, *diano resti tutti distinti e l'ultimo dia per resto* 0, *è condizione necessaria e sufficiente che sia* $\frac{1}{s} P_s$ *primo con* m.

La condizione è necessaria. Infatti, suppongasi che i numeri del quadro (B divisi per n diano resti tutti distinti e l'ultimo dia per resto 0, e si neghi che m ed $\frac{1}{s} P_s$ siano primi tra loro. Indicando allora con d un divisore comune di questi due numeri e con q e q' i quozienti delle divisioni di essi per d, si ha

$$m = dq, \qquad \frac{1}{s} P_s = dq',$$

e la differenza fra due numeri di una stessa orizzontale del quadro (B, cioè $(K_2 - K_1) P_s$, in cui è $K_1 < K_2 < m$, diventa

$$(K_2 - K_1) P_s = s (K_2 - K_1) . \frac{1}{s} P_s = s (K_2 - K_1) dq' ;$$

ma $K_2 - K_1$ può assumere qualunque valore da 1 ad $m - 1$, quindi preso $K_2 - K_1 = q < m$, si trova

$$(K_2 - K_1) P_s = sq . dq' = smq' = nq';$$

risulterebbe così divisibile per n la differenza di due numeri del quadro (B, i quali perciò, divisi per n, darebbero resti uguali, contrariamente all'ipotesi.

La condizione è anche sufficiente. Infatti, consideriamo due qualunque dei numeri del quadro (B non appartenenti alla stessa orizzontale, cioè

$$K_1 P_s + p_1 + p_2 + \dots + p_i$$
$$K_2 P_s + p_1 + p_2 + \dots + p_j$$

dove K_1, K_2 siano due numeri, uguali oppur no, da 0 ad $m - 1$, ed i, j due numeri distinti da 1 ad s. Secondo che è $i > j$, oppure $i < j$, la differenza di essi numeri è

$$(K_1 - K_2) P_s + p_{j+1} + p_{j+2} + \dots + p_i ,$$

oppure

$$(K_2 - K_1) P_s + p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_j ,$$

ma queste differenze non sono divisibili per n, perchè non divisibili per s, essendo $(K_1 - K_2) P_s$ divisibile per s e non divisibili per s le due somme

$$p_{j+1} + p_{j+2} + \dots + p_i , \qquad p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_j$$

per ipotesi; dunque due numeri del quadro (B non appartenenti alla stessa orizzontale, divisi per n, non possono dare resti uguali.

Consideriamo poi la differenza di due numeri del quadro (B appartenenti alla stessa orizzontale, cioè

$$(K_1 - K_2) P_s = s (K_1 - K_2) . \frac{1}{s} P_s ;$$

questa nemmeno è divisibile per n, perchè $(K_1 - K_2) . \frac{1}{s} P_s$ non è divisibile per m, essendo $\frac{1}{s} P_s$ primo con m per ipotesi, e $K_1 - K_2$ non divisibile per m perchè minore di m. Dunque concludendo, due qualunque dei numeri del quadro (B divisi per n non possono mai dar resti uguali.

Osservazione. — Nel teorema dimostrato si ritrovano le condizioni date nella risoluzione del caso particolare, in cui è $n = 2m$, ovvero $s = 2$, cioè: dover essere i due numeri p_1, p_2 non divisibili per 2, ossia dispari, e dovere essere $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ primo con m.

Similmente per $n = 3m$, cioè $s = 3$, si hanno le condizioni: dover essere i numeri $p_1, p_2, p_3, p_1 + p_2, p_2 + p_3$ non divisibili per 3, dover essere $p_1 + p_2 + p_3$ divisibile per 3, ed $\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$ primo con m. Etc.

3. Secondo caso, cioè $n = sm + i$ $(0 < i < s)$. — Le conclusioni, alle quali giungemmo nel caso particolare, in cui è $n = 2m + 1$, cioè: essere possibile il problema soltanto se $p_1 = p_2$ e p_3 primo con n (nelle quali ipotesi si ottiene l'ordinario poligono stellato) non sono generalizzabili nel caso di $s > 2$; ovvero, se è $s > 2$ si può avere qualche soluzione diversa dall'ordinario poligono stellato.

Così, per es., nel caso di $n = 4m + 1$, scelto un numero p primo con n, i numeri

$$p_1 = p , \qquad p_2 = 2p , \qquad p_3 = -p , \qquad p_4 = 2p$$

risolvono il problema, perchè formando con essi il solito quadro, cioè

p	$5p$	$9p \dots (4m - 3) p$	$(4m + 1) p$
$3p$	$7p$	$11p \dots (4m - 1) p$	
$2p$	$6p$	$10p \dots (4m - 2) p$	
$4p$	$8p$	$12p \dots 4m p$	

i numeri, che lo compongono, essendo tutti i multipli di p primo con n secondo i numeri da 1 ad n, dànno resti distinti quando si dividono per n.

4. L'esempio citato or ora ci induce a stabilire alcune condizioni *sufficienti* per avere soluzioni del problema nel caso, che si considera.

Infatti, formata una permutazione dei numeri da 1 ad s, che indicheremo con

$$r_1, \quad r_2, \ldots r_i, \quad r_{i+1} \ldots r_s,$$

in cui sia però

$$r_i = i, \qquad r_s = s,$$

ed i numeri $r_1, r_2, \ldots r_{i-1}$ tutti minori di i, e scelto p primo con n, il quadro

$$\begin{array}{lllll}
r_1 p & (r_s + r_1)p & (2r_s + r_1)p \ldots & [(m-1)r_s + r_1]p & (mr_s + r_1)p \\
r_2 p & (r_s + r_2)p & (2r_s + r_2)p \ldots & [(m-1)r_s + r_2]p & (mr_s + r_2)p \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
r_i p & (r_s + r_i)p & (2r_s + r_i)p \ldots & [(m-1)r_s + r_i]p & (mr_s + r_i)p \\
r_{i+1} p & (r_s + r_{i+1})p & (2r_s + r_{i+1})p \ldots & [(m-1)r_s + r_{i+1}]p & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
r_s p & 2r_s p & 3r_s p \ldots\ldots\ldots & mr_s p &
\end{array} \qquad (C$$

è formato dagli n multipli di p secondo i numeri da 1 ad n, e quindi essi numeri, divisi per n, dànno resti tutti distinti e l'ultimo dà per resto 0. Posto quindi

$$p_1 = r_1 p, \quad p_2 = (r_2 - r_1)p, \quad p_3 = (r_3 - r_2)p \ldots p_i = (r_i - r_{i-1})p \ldots p_s = (r_s - r_{s-1})p,$$

coi numeri $p_1, p_2, \ldots p_s$ secondo le condizioni del problema si ricostituisce il quadro (C, e perciò essi costituiscono una soluzione del problema. Possiamo dunque enunciare il seguente

TEOREMA. — *Se è* $n = sm + i$ $(0 < i < s)$, *affinchè gli* s *numeri* $p_1, p_2 \ldots p_s$ *costituiscano una soluzione del problema, è sufficiente che essi siano tutti multipli di un numero* p *primo con* n *secondo i numeri*

$$r_1, \quad r_2 - r_1, \ldots r_i - r_{i-1}, \ldots r_s - r_{s-1},$$

dove $r_1, r_2, \ldots r_i, \ldots r_s$ *formino una permutazione dei numeri da* 1 *ad* s, *con* $r_i = i$, $r_s = s$ *ed* $r_1, r_2, \ldots r_{i-1}$ *distinti e minori di* i.

In questo teorema è compreso il caso dell'ordinario poligono stellato se si suppone che la permutazione dei numeri da 1 ad s sia proprio la permutazione principale 1, 2, 3, ... s.

5. Ma le condizioni espresse dal teorema precedente sono poi anche necessarie per la possibilità del problema nel caso in esame? Ecco ciò che non possiamo asserire. Una condizione, però, necessaria, a cui debbono soddisfare i numeri p per la possibilità del problema, ci è data dal fatto di dover essere divisibile per n l'ultimo numero del quadro (A relativo al caso, che si studia, cioè $mP_s + P_i$. Infatti, da

$$mP_s + P_i = nt$$

con t intero deriva

$$nt - mP_s = P_i, \qquad (1$$

e quindi, supponendo n ed m primi tra loro, ed indicando con $\frac{n_1}{m_1}$ la penultima delle ridotte della frazione continua, in cui si può svolgere la frazione $\frac{n}{m}$, si avrà necessariamente, per la nota teoria dell'Analisi indeterminata,

$$t = \pm m_1 P_i + m\theta$$
$$P_s = \pm n_1 P_i + n\theta$$

con θ arbitrario intero, ovvero dovrà essere necessariamente

$$P_s = n_1 P_i,$$

a meno di un multiplo di n, dove n_1 sia preso positivamente o negativamente secondo che la ridotta $\frac{n_1}{m_1}$ è di posto dispari o pari.

Ma se n ed m non sono primi tra loro, e d è il loro m. c. d., dovrà essere necessariamente anche P_i divisibile per d, altrimenti l'equazione (1 non ha soluzioni intere per t e P_s. Ammettendo quindi che sia P_i divisibile per d, ed indicando con n', m', P'_i i quozienti delle divisioni per d di n, m, P_i, l'equazione (1 diventa

$$n't - m'P_s = P'_i$$

ed è soddisfatta dalle soluzioni intere di t e P_s date da

$$t = \pm m'_1 P'_i + m'\theta$$
$$P_s = \pm n'_1 P'_i + n'\theta$$

dove n'_1, m'_1 siano i termini della penultima ridotta della frazione continua, in cui si sviluppa la frazione $\frac{n'}{m'}$; ovvero, moltiplicando per d il valore di P_s, possiamo dire che dev'essere necessariamente $dP_s = n'_1 P_i$ a meno di un multiplo di n, dove n'_1 sia preso positivamente o negativamente secondo che $\frac{n'_1}{m'_1}$ è una ridotta di posto dispari o pari nello sviluppo di $\frac{n'}{m'}$ in frazione continua.

Osservazione. — Nel caso contemplato dal teorema del n. 4 si verifica la condizione necessaria ora trovata. Difatti è ivi $P_s = sp$, $P_i = ip$; per cui, se n è primo con m, in virtù della condizione trovata dovrà essere

$$P_s - n_1 P_i = sp - n_1 ip = \text{multiplo di } n,$$

ovvero

$$s - n_1 i = \text{multiplo di } n,$$

perchè per ipotesi è p primo con n. Ma da $n = sm + i$ si ricava $i = n - sm$, quindi risulta

$$s - n_1 i = s - nn_1 + n_1 sm = s(n_1 m + 1) - nn_1,$$

in cui n_1 dev'essere positivo o negativo secondo che la ridotta $\frac{n_1}{m_1}$ è di posto dispari o pari; e poichè d'altra parte è

$$nm_1 - mn_1 = \pm 1, \qquad \text{ovvero} \qquad nm_1 = mn_1 \pm 1,$$

in cui il segno + o — corrisponde al posto dispari o pari della ridotta $\frac{n_1}{m}$ ne deriva quindi in ambedue i casi che $s - n_1 i$ è un multiplo di n.

Se invece non è n primo con m, il loro m. c. d. δ dividerà anch quindi ip; e dovrà dunque essere un multiplo di n la differenza

$$\delta P_s - n'_1 P_i = \delta sp - n'_1 ip = \delta sp - n'_1 (n - sm'\delta) p = \delta sp (1 + m'n'_1)$$

e ciò è vero per le stesse ragioni dette di sopra.

R. M

(Continua).

66ª QUISTIONE A CONC

1. Determinare il volume V di una
la distanza dei centri d ed i raggi R
che limitano la lente.
2. Determinare i raggi R, R' cor

Le risoluzioni devono essere inviate al r
La migliore risoluzione sarà pubblicat
fra le proprie edizioni, manderà in prem

RISOLUZIONE DELLA 64ª QUISTIONE A CONCORSO

Se I *è l'incentro d'un triangolo* ABC, *e* A', B', C' *sono i centri dei cerchi* BIC, CIA, AIB, *dimostrare che i punti medi dei segmenti* A'I, B'I, C'I, B'C', C'A', A'B', *e i punti d'incontro di* AA', BB', CC' *rispettivamente con* B'C', C'A', A'B' *sono nove punti di una stessa circonferenza.*

C. Ciamberlini.

Hanno preso parte a questo concorso i sigg. **A. P.** di *Pavia*; **Arata**, R. L. di *Voghera*; **Bertola**, R. L. Visconti di *Roma*; **Brenta**, **Levi**, **Mosca**, **Vercellin**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Fortunato** e **Sosso** L. P. di *Caserta*; **Longo** di *Napoli*; **Pomodoro**, R. L. di *Molfetta*; **Sadun**, di *Livorno*, e un anonimo.

Quasi tutti i concorrenti hanno dimostrato che I è l'ortocentro del triangolo A'B'C', e hanno così ridotto subito la questione proposta alla proprietà classica relativa al cerchio dei nove punti. Le dimostrazioni che tra le altre si distinguono per semplicità e per esattezza sono quelle di Vercellin, De Castro, Mosca, Terracini, Longo, Sadun; tra queste, la migliore è indubbiamente quella presentata dal signor De Castro che aggiunge alcune notevoli osservazioni sui cerchi determinati da due qualunque dei vertici del triangolo ABC, e da uno qualunque dei centri dei cerchi inscritto ed ex-inscritti. Ritengo perciò che il premio per questa questione sia dovuto al signor

DE CASTRO, R. L. Beccaria di *Milano*.

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Siano I_a, I_b, I_c rispettivamente gli ex-centri corrispondenti ad A, B, C. Poichè gli angoli IBI_a, ICI_a sono retti, la circonferenza di diametro II_a passa per B e C; perciò A' è il punto medio di II_a. Analogamente, B' e C' sono i punti medi di II_b, e II_c. I triangoli $I_aI_bI_c$, A'B'C' sono quindi omotetici rispetto al centro I, e perciò il punto I, centro ortico del primo triangolo, è anche il centro ortico del secondo. I nove punti indicati nell'enunciato della questione sono dunque ordinatamente i punti medi dei segmenti compresi tra l'ortocentro e i vertici, i piedi delle mediane e delle altezze del triangolo A'B'C', e quindi appartengono ad una stessa circonferenza (circonferenza di Feuerbach relativa al triangolo A'B'C').

Osservazione. — I punti A', B', C' sono, com'è noto, le ulteriori intersezioni di AI, BI, CI colla circonferenza ABC, che coincide quindi colla circonferenza A'B'C'. Ora è noto anche che il cerchio di Feuerbach d'un triangolo ha il centro nel punto medio del segmento compreso tra il circocentro e l'ortocentro, e raggio eguale alla metà di quello del circumcircolo; perciò, se O è il centro e R il raggio del cerchio ABC, la circonferenza di Feuerbach del triangolo A'B'C' ha il centro nel punto medio di OI e raggio eguale a $\frac{1}{2}$ R.

C. Ciamberlini.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 679, 698, 702, 703, 704, 705 E 708

679. *Si indichi con* $r_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ *la retta condotta dal vertice* A_i *di un triangolo* $A_1A_2A_3$, *perpendicolarmente al lato* A_iA_j *e con* B_i *il punto d'incontro delle rette* $r_{i,j}$ *ed* $r_{k,j}$; *si dimostri che il triangolo* $B_1B_2B_3$ *è uguale ad* $A_1A_2A_3$; *e che i due triangoli sono simmetrici rispetto al centro del loro comune cerchio circoscritto.*

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del sig. **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*.

I quadrangoli

$$A_3A_1A_2B_1, \quad A_1A_2A_3B_2, \quad A_2A_3A_1B_3,$$

sono evidentemente inscrittibili, avendo ciascuno due angoli opposti retti; perciò risulta che i due triangoli $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ sono inscrittibili in una stessa circonferenza di centro O. Da ciò segue che i quadrangoli

$$A_1A_2B_1B_2, \quad A_2A_3B_2B_3, \quad A_3A_1B_3B_1$$

sono rettangoli; perciò i punti B_1, B_2, B_3 sono rispettivamente i simmetrici di A_1, A_2, A_3 rispetto ad O; i triangoli $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ sono adunque figure simmetriche rispetto al punto O, quindi sono eguali.

Altre risoluzioni dei sigg. **Bertoglio, Brenta, Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Borioni, Lucaroni, Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Crugnola, Pomini** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **De Bei, Marzocchi, Vacchi**, R. I. T. e **De Lutti**, R. L. Foscarini di *Venezia*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; sig.na **Pellizzari**, R. I. T. di *Cuneo*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*. Tre soluzioni inesatte.

(G. C.-L.)

698. *In un triangolo* A, B, C *i vertici* A, B *sono fissi ed il terzo vertice si sposta colla condizione che sia*

$$\frac{\tan\gamma}{\tan\alpha} = m.$$

Trovare il luogo del vertice C.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. **Marranghello**, R. L. di *Arezzo*.

La condizione data equivale all'altra

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{c}{ma},$$

poichè

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{a};$$

si deve avere cioè

$$c\cos\alpha = ma\cos\gamma.$$

Ma $c\cos\alpha$ e $a\cos\gamma$ sono appunto i segmenti in cui l'altezza corrispondente a B divide il lato opposto; si tratta dunque di trovare il luogo geometrico dei punti che, congiunti con α, determinano dei segmenti che vengono divisi in parti proporzionali ad m e a 1 dalla circonferenza che ha per diametro AB; e questo luogo è precisamente la circonferenza avente per diametro AM, ove M è un punto allineato con A e con B, tale che $\frac{AM}{MB} = m$.

Risolutori i sigg. **Bertoglio** e **Brenta**, R. I. T. di *Torino*; **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*.

702. *Se* p *è un numero primo* >7 *del quale indichiamo con* d *le decine e con* u *le unità, e se* $N = 10D + U$ *è un numero intero qualunque,* N *è divisibile per* p, *quando lo sia il numero* $Du - Ud$.

U. Fornari.

Risoluzione dei sigg. **Cutore** e **La Spina** del R. I. T. di *Catania*.

Dall'enunciato della questione si ha

$$N = 10D + U \qquad p = 10d + u. \tag{1}$$

Moltiplicando ambo i membri della prima per d, della seconda per D, e sottraendo, si ha

$$Dp - dN = Du - Ud,$$

da cui si ricava che dN dev'essere divisibile per p.

E poichè p è primo con d [giacchè per la seconda della (1), se p dividesse d, dovrebbe dividere anche u, ciò che non può essere perchè è $p > 7$], ne segue subito che p divide N.

Il sig. **Vercellin** di *Torino* osserva che non è necessario che p sia primo in sè, ma bensì che p sia primo con u, ossia con la cifra delle sue unità, e quindi enuncia il teorema di cui quello dato è un caso particolare: " Qualunque numero $p = 10d + u$ che sia primo colla cifra delle sue unità, divide un altro numero $N = 10D + U$, quando è divisore di $Du - Ud$ ".

Mandarono inoltre soluzioni i sigg. **Brenta**, **Cernuschi**, **Mosca**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Casalasco** e **Chiesa**, R. L. di *Cuneo*; sig.^{na} **Castiglioni**, R. I. T. di *Varese*; **Cera**, **Formato**, **Salonia** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **Cirillo**, **Lucaroni**, **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Ferri**, R. L. Petrarca di *Arezzo*; **Manzi**, L. P. di *Domodossola*; **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **Papa**, R. I. T. di *Napoli*.

I sigg. **Cirillo** e **Lucaroni**, hanno mandato due lavori ne' quali è seguita press'a poco la via sopra esposta. Il sig. **Ferri** pone la differenza $Du - Ud$ sotto la forma $p\left(\frac{N-U}{10}\right) - Nd$ e ne deduce subito il teorema, poichè necessariamente $\frac{N-U}{10}$ è un numero intero. La risoluzione del sig. **Naccarati** è incompleta. I sigg. **Casalasco** e **Chiesa** hanno stabilito l'eguaglianza $Nd = Dp + Ud - Du$ eseguendo effettivamente la divisione di $Nd = (10D + U)d$ per $p = 10d + u$, mentre ciò si otteneva subito. Il sig. **Terracini** è giunto al risultato ottenendo l'eguaglianza $\frac{u}{d} = \frac{U + 10q}{D - q}$ (q numero intero), provando che la frazione $\frac{u}{d}$ è irriducibile e servendosi poi della nota proprietà delle frazioni equivalenti ad una frazione irriducibile.

In generale ho notato alquanta trascuratezza nell'esposizione, e pochi si sono veramente resi conto perchè debba essere $p > 7$.

E. Nannei.

703. *Costruire un poligono in modo che i suoi* n *vertici sieno situati su altrettante rette* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ed i suoi lati siano paralleli ad* n *rette* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *rispettivamente.*

G. L.

Risoluzione del sig. **Vercellin** di *Torino*.

Per un punto qualunque P_1 di a_1 si conduca la retta b'_1 parallela alla b_1; per $(b'_1 a_2)$ si conduca la b'_2 parallela alla b_2; per $b'_2 a_3$ si conduca la parallela alla $b_3 \ldots$; finalmente per $(b'_{n-1} a_n)$ conducasi b'_n parallela alla b_n, e sia $(b'_n a'_1) \equiv P_2$. In generale P_2 non coincide con P_1.

Ciò posto è evidente che, mentre P_1 si muove sulla a_1, i punti $(b'_1 a_2), (b'_2 a_3) \ldots P_2$ si muovono sulle rette $a_2, a_3, \ldots, a_1$ descrivendo altrettante punteggiate simili fra loro e a quella descritta da P_1. Ne segue che P_1, P_2 descrivono due punteggiate simili e sovrapposte: se A è il centro di similitudine, ripetendo la costruzione indicata precedentemente partendo da A, si ricadrà evidentemente in A, e rimarrà così costruito il poligono richiesto.

Per trovare A si eseguisca, partendo da due punti P'_1, P''_1 presi comunque sulla a_1, la costruzione precedente; si otterranno come risultati rispettivamente

P'_2, P''_2; si divida $P'_1P'_2$ (o $P''_1P''_2$) in parti proporzionali a $P'_1P''_1$ e $P'_2P''_2$ e si otterrà A come punto di divisione.

Altre risoluzioni simili dei sigg. **Algranati**, R. L. di *Livorno*; **De Castro**, R. L. **Beccaria** di *Milano*. G. L.

704. *Dimostrare geometricamente che in ogni quadrilatero inscritto in un circolo, avente le diagonali perpendicolari, la distanza del centro del circolo da un lato è metà della lunghezza del lato opposto.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. **La Spina**, R. I. T. di *Catania*.

Sia ABCD il quadrilatero, AD, BC le diagonali ed I il loro punto comune: conduciamo il diametro COE, essendo O il centro del circolo. Essendo gli angoli in I retti, è *arco* AC + *arco* BD = *semicirconferenza*, per cui,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4R^2, \qquad \tfrac{1}{4}\overline{AC}^2 + \tfrac{1}{4}\overline{BD}^2 = R^2. \tag{1}$$

Sia OM la perpendicolare da O su AC; poichè AOC è isoscele, è M il punto medio di AC: condotta ON perpendicolare su BD, sarà N il punto medio di BD. È dunque per la (1)

$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = R^2.$$

Dal triangolo rettangolo AOM si ha

$$\overline{AM}^2 + \overline{MO}^2 = R^2,$$

per cui

$$\overline{AM}^2 + \overline{MO}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2,$$

e quindi

$$MO = BN.$$

Le risoluzioni inviate sono 41 e sono dei sigg. **Algranati**, **De Cardenas**, **Ruglioni** e **Sadun**, R. L. di *Livorno*; **Arata**, L. di *Voghera*; **Belvedere** e **Perez** del R. I. T. di *Messina*; **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa**, **Levi**, **Mosca**, **Testoni**, **Vercellin** del R. I. T. e **Terracini** del L. di *Torino*; **Casalasco** e **Chiesa** del L. di *Cuneo*; **Castaldi** del R. I. T. di *Firenze*; **Castiglioni** del R. I. T. di *Varese*; **Cera**, **Fortunato**, **Salonia** e **Sasso** del L. di *Caserta*; **Cirillo**, **Lucaroni**, **Maracci** e **Urbani** del R. I. T. di *Ancona*; **Cutore** e **La Spina** del R. I. T. di *Catania*; **De Castro** e **Valagussa** del L. di *Milano*; **Ferrara**, del R. I. T. di *Melfi*; **Ferri** del L. di *Arezzo*; **Longo** e **Papov** del R. I. T. di *Napoli*; **Manzi** del L. di *Domodossola*; **Naccarati** del L. di *Benevento*; **Querio** del L. di *Biella*; **Scopinich** del R. I. T. di *Venezia*; **Renna** del L. di *Bitonto*.

Le risoluzioni dei sigg. **Cutore** e **Querio** sono simili a quella riportata: quelle dei sigg. **Bongini**, **Costa**, **Scopinich** e **Vercellin** sono molto eleganti per le proprietà del triangolo dalle quali deducono la dimostrazione del teorema proposto; in quelle dei sigg. **Algranati**, **Brenta**, **Sadun** e **Urbani** si potrebbe giungere più direttamente al risultato, pur sono tra le migliori. Buone sono pure tutte le altre pel metodo di dimostrazione: in alcune però non si ha troppo rigore di linguaggio oppure, come in quella del sigg. **Ferri**, si notano errori che sono dovuti alla troppa fretta nello scrivere. Quest'ultima, senza ciò, sarebbe la migliore. I sigg. **Sasso**, **Fortunato**, **Cera** e **Solonia**, che firmano una stessa risoluzione, non dimostrano direttamente il teorema, ma ne fanno un corollario del teorema di Brahamegupta. Il sig. **Renna** infine non dimostra il teorema qual'è proposto, ma solo il caso particolare nel quale il quadrilatero è un quadrato. C. Alasia.

705. *In ogni triangolo la somma dei quadrati dei lati sta al quadrato della loro somma, come la somma delle cotangenti degli angoli sta al prodotto di quelle dei semiangoli. Casi particolari.* R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*.

Dall'eguaglianza

$$\operatorname{ctn} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \tag{1}$$

ed analoghe, si ricava

$$\operatorname{ctn} A + \operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}. \tag{2}$$

Avendosi poi

$$S = p^2 \tan \tfrac{1}{2} A \tan \tfrac{1}{2} B \tan \tfrac{1}{2} C,$$

dalla (2) si ha subito

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} = \frac{\operatorname{ctn} A + \operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C}{\operatorname{ctn} \tfrac{1}{2} A \operatorname{ctn} \tfrac{1}{2} B \operatorname{ctn} \tfrac{1}{2} C}. \tag{3}$$

Casi particolari. — 1. Se il triangolo è *rettangolo* in A, si ha

$$\frac{2a^2}{(a + b + c)^2} = \operatorname{ctn} B + \tan B.$$

2. Se il triangolo è *isoscele*, $B = C$, $b = c = l$

$$\frac{a^2 + 2l^2}{(a + 2l)^2} = \frac{\operatorname{ctn} A + 2 \tan \tfrac{1}{2} A}{\operatorname{ctn} \tfrac{1}{2} A \operatorname{ctn}^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2} A)}.$$

3. In ogni triangolo di *Longchamps* si ha:

$$\left(\frac{a}{a + b + c}\right)^2 = \frac{\operatorname{ctn} A}{\operatorname{ctn} \tfrac{1}{2} A \operatorname{ctn} \tfrac{1}{2} B \operatorname{ctn} \tfrac{1}{2} C}.$$

Risoluzione analoga ha mandato il sig. **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*.

Altre risoluzioni hanno inviato i sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*. Ambedue notarono il caso particolare del triangolo equilatero, giungendo poi a un risultato inesatto. **Scopinich** del R. I. T. di *Venezia*, nota il caso particolare di un triangolo rettangolo di cui un angolo acuto sia di 30°. **Mosca** e **Cernuschi** del R. I. T. di *Torino* (quest'ultimo nota il caso d'un triangolo isoscele, nel quale la base e uno dei lati eguali, siano legati dalla relazione $a^2 = 2b^2$).

Mandarono anche soluzioni, ma senza la considerazione di verun caso particolare, i sigg. **Brenta**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco** e **Chiesa** R. L. di *Cuneo*; **Cera**, **Formato**, **Solonia** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **Cirillo**, **Lucaroni**, **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Papa**, R. I. T. di *Napoli*; le quali tutte, ma specialmente la prima e l'ultima, hanno il difetto di giungere al risultato con calcoli troppo lunghi e laboriosi. E. Nannei.

708. *Se* ABCD *è un quadrangolo convesso inscritto in un cerchio dimostrare che, se*

$$BC \,.\, AD = AB \,.\, CD,$$

è anche

$$AC^2 (2AB^2 + 2AD^2 - BD^2) = 4 \,.\, AB^2 . AD^2.$$

La proposizione reciproca è sempre vera? [1] C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Sia M il punto d'incontro di BD con la coniugata isogonale di AC rispetto all'angolo BAD. Dai triangoli simili ABM, ACD si trae:

$$AC \,.\, BM = AB \,.\, CD, \qquad (1) \qquad\qquad AC \,.\, AM = AB \,.\, AD. \qquad (2)$$

Dal teorema di Tolomeo e dall'ipotesi si deduce

$$AC \,.\, BD = 2AB \,.\, CD; \tag{3}$$

quindi da (1) e (3)

$$BD = 2BM,$$

cioè AM è mediana del triangolo ABD. Perciò

$$4AM^2 = 2AB^2 + 2AD^2 - BD^2. \tag{4}$$

Da (2) e (4) segue

$$AC^2 (2AB^2 + 2AD^2 - BD^2) = 4AB^2 . AD^2. \tag{5}$$

Reciprocamente, se ha luogo la (5), sia C′ il punto d'incontro della circonferenza con la coniugata isogonale della mediana AM rispetto all'angolo ABD. Dai triangoli simili ABM, AC′D si trae

$$AC' . AM = AB \,.\, AD,$$

[1] Così deve essere enunciata la questione 708 che, come era espressa nel fasc. I, conteneva alcuni errori. C. C.

e quindi

$$AC'^2(2AB^2 + 2AD^2 - BD^2) = 4 \,.\, AB^2 . AD^2;$$

perciò $AC' = AC$. Quindi la diagonale AC del quadrangolo coincide con la coniugata isogonale di AM, oppure è simmetrica di essa rispetto al diametro passante per A. Nel primo caso, dai triangoli simili ABM, ACD si ricava anche

$$AC \,.\, BM = AB \,.\, CD,$$

ossia

$$AC \,.\, BD = 2 \,.\, AB \,.\, CD.$$

Da quest'ultima relazione e dal teorema di Tolomeo risulta subito

$$BC \,.\, AD = AB \,.\, CD;$$

e quindi, nel caso considerato, la reciproca è vera.

Ciò non succede se AC non coincide con la coniugata isogonale di AM.

Osservazione. — La diagonale AC coincide necessariamente con la coniugata isogonale di AM se, avendo luogo la (5) e supposto $AB \geqq AD$, si abbia $AC \leqq AB$, chè altrimenti il quadrangolo ABCD non sarebbe convesso.

Si occuparono di questa questione i sigg. **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Terracini**, R. L. Cavour e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **Valagussa**, R. L. Beccaria di *Milano*. C. Ciamberlini.

QUISTIONI DA RISOLVERE

721. Un serbatoio emette continuamente acqua da un foro di area s praticato nel suo fondo; quest'acqua viene ricevuta da un secondo serbatoio avente anch'essa nel suo fondo un foro di efflusso di area s'.

Il primo serbatoio è alimentato da un getto d'acqua che vi mantiene costante il livello d'acqua, nel secondo serbatoio invece il liquido in principio s'innalza, ma poi assume anch'esso un livello costante h'. Si determini l'area s' del secondo serbatoio in modo che si abbia

$$h + h' = a, \qquad h^2 + h'^2 = q, \qquad ss' = p,$$

essendo h, h' numeri che misurano in metri le altezze di livello ed s, s' i numeri che misurano in c. q. le aree dei fori.

Si consideri il caso particolare in cui $a = 45$, $q = 1377$, $p = 18$.

(Concorso alla R. Accademia Navale di Livorno, agosto 1905.)

722. Stabilire una regola per trovare la più grande frazione avente per numeratore l'unità che sia minore di una frazione data $\frac{a}{b} < 1$.

Applicare questa regola alle frazioni $\frac{7}{22}$ e $\frac{113}{355}$; poi decomporre ciascuna di queste in una somma di frazioni decrescenti aventi per numeratore l'unità.

(Certificato d'attitudine al professorato delle scuole normali in Francia. Concorso del 1905.)

723. Quali sono i valori che si può dare ad x, affinchè esista un angolo α tale che

$$\cos\alpha = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}.$$

(Concorso per l'Istituto nazionale agronomico di Francia, 1905.)

724. Un punto materiale pesante è abbandonato a se stesso in A senza velocità iniziale, e cade nel vuoto liberamente da A in O, punto ove tocca il suolo. Nell'istante in cui parte da A, un altro punto materiale parte da O e si muove sulla orizzontale OX con moto uniforme di cui la velocità è di v metri al secondo. Studiare le variazioni della distanza dei due punti durante la caduta da A.

Se questa distanza passa per un massimo o un minimo, trovare quali sono in quell'istante le distanze rispettive dei due mobili da O e la distanza dei medesimi.

La distanza OA è data ed è eguale ad h metri.

(Concorso alla scuola speciale militare di Francia, 1905.)

725. È dato un triangolo ABC, rettangolo in A, avente per angoli $B = \frac{1}{6}\pi$, $C = \frac{1}{3}\pi$, e per altezza $AH = h$.

Si domanda di determinare un punto P sul lato AB ed uno Q sul lato AC in maniera che le rette HP e HQ facciano con HA due angoli eguali, ed inoltre sia verificata la relazione

$$\frac{1}{HP} + \frac{1}{HQ} = \frac{2m}{h}$$

dove m è un numero dato.

Si prenderà per incognita $x = A\widehat{H}P = A\widehat{H}Q$, e si discuterà tenendo conto che i punti P, Q devono essere sui lati del triangolo e non sui loro prolungamenti.

(Baccalaureato matematico Lione, ottobre, 1905.)

726. Dimostrare, indipendentemente dalla teoria della somiglianza, che il triangolo equilatero avente per lato l'ipotenusa di un triangolo rettangolo qualsiasi, è equivalente alla somma dei triangoli equilateri aventi per lati i cateti. C. Ciamberlini.

727. Eseguire le somme seguenti:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)} =$$

$$= \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Generalizzare. R. Vercellin.

728. Essendo AB la base minore di un trapezio, CD la maggiore, E il punto d'incontro dei lati BC, AD ed F il punto d'incontro delle diagonali AC, BD si domanda quale relazione deve esistere fra gli elementi del trapezio affinchè:

1° il quadrilatero AEBF sia inscrittibile in un circolo;

2° gli angoli in E e in F di questo quadrilatero siano eguali.

729. Risolvere l'equazione

$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0.$$

730. Risolvere l'equazione

$$\frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos^3 \alpha}{\cos x} = 1.$$

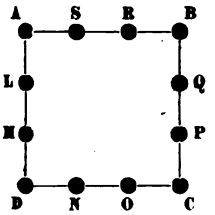
E.-N. Barisien.

N. B. — Le soluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 28 febbraio 1906.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 5 febbraio 1906

234. *Disporre i primi 12 numeri naturali nei punti* A, B, C, D, L, ..., S *della figura, in modo che siano eguali le somme dei numeri*



1) posti su ciascun' lato del quadrato ABCD;
2) posti ai vertici dei quadrati ABCD, SQOM *e* RPNL;
3) posti ai vertici dei rettangoli LMPQ, SRON, RQNM *e* LSPO;
4) posti ai vertici dei parallelogrammi ASCO, RBND, ALCP, MDQB, BPDL, AQCM, ARCN *e* SBOD.

G. C.-L.

Risoluzione.

Indicando con le lettere minuscole corrispondenti i numeri che vanno posti ai punti A, B ... S della figura e con Σ la somma costante, si hanno 19 equazioni lineari con 12 incognite, equazioni che, come facilmente si verifica, possono coesistere; per brevità trascriviamo soltanto le sette seguenti, perchè soltanto di esse ci fa bisogno

$$(1)\quad a+b+c+d=\Sigma \qquad (2)\quad s+q+o+m=\Sigma$$

$$(3)\quad r+p+n+l=\Sigma \qquad (4)\quad l+m+p+q=\Sigma \qquad (5)\quad r+q+n+m=\Sigma$$

$$(6)\quad a+s+c+o=\Sigma \qquad (7)\quad r+b+n+d=\Sigma.$$

Dalle (1) (2) (3) si ha

$$3\Sigma=a+b+\ldots+s=\tfrac{1}{2}.12.13, \qquad \text{da cui} \qquad \Sigma=26.$$

Dalle (2) (3) (4) (5) si ha poi

$$m+q=r+n=l+p=o+s=\tfrac{1}{2}\Sigma=13$$

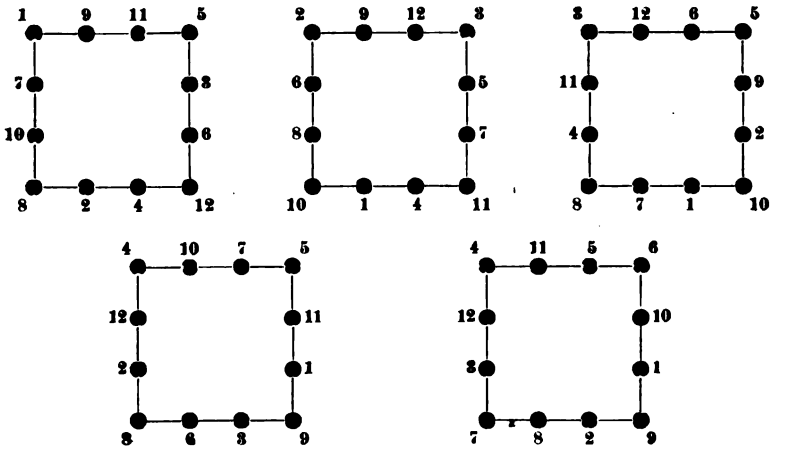
e dalle (6) (7), tenendo conto delle precedenti, si ha

$$a+c=b+d=13.$$

Dunque *nelle coppie di punti simmetrici rispetto al centro del quadrato vanno posti numeri che abbiano per somma* 13. Questa condizione è però necessaria, ma non sufficiente; con ragionamenti che non riportiamo qui per mancanza di spazio, ma che il lettore potrà con facilità ricostruire, tenendo conto che le bipartizioni del 13 sono

1, 12; 2, 11; 3, 10; 4, 9; 5, 8; 6, 7,

si trovano le seguenti cinque soluzioni essenzialmente diverse



Da ciascuna soluzione se ne ha 4 per le permutazioni dei medî, 4 per rotazione della figura di angoli di $\frac{1}{2}\pi$, π e $\frac{3}{2}\pi$, 2 per ribaltamento della figura; in tutto si hanno quindi

$$5\times4\times4\times2=160 \text{ soluzioni.}$$

Fra i risolutori trovarono le *cinque* soluzioni i sigg. **Bifano** e **Piccitelli**, R. L. di *Benevento* e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; *quattro* il sig. **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; *tre* il sig. **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; *una* i sigg. **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Mammarella**, I. T. P. di *Ravenna* e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*.

(Nel numero di queste soluzioni è tenuto conto soltanto di quelle essenzialmente diverse).

G. C.-L.

240. *Trovare due numeri diseguali di due cifre in modo che tanto essi, quanto i loro quadrati, abbiano le stesse cifre, ma scritte in ordine inverso.* ***

Risoluzione.

Siano $N = 10x + y$ ed $N' = 10y + x$ i due numeri cercati. Supponiamo dapprima che i loro quadrati siano numeri di 3 cifre, cioè supponiamo $N < 32$ ed $N' < 32$. (1)

In tal caso dovremo avere

$$(10x + y)^2 = 100\alpha + 10\beta + \gamma; \qquad (10y + x)^2 = 100\gamma + 10\beta + \alpha,$$

e, sottraendo membro a membro e sopprimendo il fattore comune 99

$$x^2 - y^2 = \alpha - \gamma.$$

Poichè α e γ debbono essere diseguali e minori di 10, sarà $1 \leqslant \alpha - \gamma \leqslant 8$ e quindi anche

$$1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 8. \qquad (2)$$

La (2) ammette le soluzioni intere

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 4 \\ y_4 = 3, \end{cases}$$

ma le due ultime coppie non sono accettabili, a causa della (1) e quindi si hanno le sole soluzioni

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 1 \quad \text{cioè} \quad N_1 = 21, \quad N'_1 = 12 \quad \text{e} \quad N_2 = 31, \quad N'_2 = 13.$$

(Infatti: $12^2 = 144$, $21^2 = 441$, e $13^2 = 169$, $31^2 = 961$).

Se poi è $N \geqslant 32$ e $N' \geqslant 32$, cioè se i quadrati di N ed N' sono numeri di 4 cifre, dovremo avere

$$(10x + y)^2 = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta; \qquad (10y + x)^2 = 1000\delta + 100\gamma + 10\beta + \alpha$$

e sottraendo membro a membro e sopprimendo il fattore comune 9

$$11\,(x^2 - y^2) = 111\alpha + 10\beta - 10\gamma - 111\delta$$

cioè

$$11\,(x^2 + y^2) + 110\,(\delta - \alpha) + 11\,(\gamma - \beta) = \alpha - \beta + \gamma - \delta.$$

Poichè il 1° membro è divisibile per 11, anche il 2° membro deve essere divisibile per 11, cioè il numero $N^2 = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta$ deve essere un multiplo di 11 e quindi deve essere multiplo di 11 anche N; ma i multipli di 11 di due cifre non possono avere le cifre diseguali, e perciò in questo caso non si hanno soluzioni del problema

Le sole soluzioni sono dunque: ($12^2 = 144$, $21^2 = 441$) e $13^2 = 169$, $31^2 = 961$).

Risoluzione analoga del sig. **Brenta**, R. I. T. di *Torino*; altre risoluzioni dei sigg. **Belvederi**, R. L. Galvani di *Bologna*; **Cernuschi** e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **Grampa**, L. del Sem. di *Monza*; **Janora**, R. I. T. di *Bari*; **Mammarella**, I. T. P. di *Ravenna*; **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*. (G. C.-L.)

242. *Trovare un numero di due cifre che sia uguale alla somma della cifra delle decine e del quadrato di quella delle unità.* S. Catania.

Risoluzione.

Sia $N = 10x + y$ il numero cercato; si dovrà avere

$$10x + y = x + y^2 \quad \text{cioè} \quad 9x = y\,(y - 1).$$

Poichè il prodotto di due numeri interi consecutivi $y - 1$ ed y deve essere multiplo di 9 uno di questi numeri deve essere multiplo di 9, e poichè inoltre deve essere $y < 10$, sarà evidentemente $y = 9$ e quindi $x = 8$. Dunque $N = 89$; infatti è $89 = 8 + 9^2$.

Inviarono risoluzioni, quasi tutte analoghe a quella pubblicata, i predetti sigg. **Belvederi**, **Cernuschi**, **Maracci** e **Vercellin** e dei sigg. **Abati** e **Naccarati**, R. L. e **Fusco** di *Benevento*; **Abbrescia**, **Carlucci**, **Cristini**, **Giardina** e **Priore**, R. I. T. di *Bari*; **Arata** e **Passalacqua**, R. L. di *Voghera*; **Beltrani**, R. S. T. e **Cellini** di *Forlì*; **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini**, **Brenta**, **Costa**, **Galleano** e **Levi**, R. I. T. e **Terraccini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Cera**, **Formato**, **Salonia** e **Sasso**, L. P. di *Caserta*; **Cirillo** e **Lucaroni**, R. I. T. e **Miozzi**, R. L. di *Ancona*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei** e **Scopinich**, R. I. T. e **Giacometti**, R. L. Polo di *Venezia*; **De Cardenas** e **Ruglioni**, R. I. T. e **Sadun** di *Livorno*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Fiachetti**, R. L. di *Cuneo*; **Gneme** di *Roma*; **Guerrini**, R. L. e **Lattanzi**, R. I. T. di *Pesaro*; **Minguzzi** e sig.na **Montanari**, L. P. di *Ravenna*; **Orsaria** di *Varese*; **Renna** e **Ventola**, L. P. di *Bitonto*; **Serano**, R. I. T. di *Chieti*; **Zaglia** (?) (G. C.-L.)

GIUOCHI PROPOSTI.

252. Per indovinare un numero pensato si può fare nel modo seguente:

1° far triplicare il numero;
2° „ sottrarre 1 dal resultato;
3° „ triplicare il nuovo resultato;
4° „ aggiungere il numero pensato e dire il resultato.

Aggiungendo 3 a quest'ultimo numero, le diecine del numero che resulta rappresentano il numero pensato. (Dare la spiegazione di questo giuoco.) ***

253. Dimostrare che il prodotto di tutti i numeri della tavola pitagorica, estesa fino a 100, è un numero di 132 cifre, la 92ª delle quali (a partire da sinistra) è 6.

C. Ciamberlini.

ANNO IX — FEBBRAIO 1906 — FASC. IV

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al **Periodico di Matematica**

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Sempre a proposito della 60ª quistione a concorso. (R. MAZZOLA.) *(Continuaz. e fine v. fasc. prec.)*

67ª quistione a concorso.

Risoluzione della 62ª quistione a concorso.

Risoluzioni delle quistioni 701, 712 e 714.

Quistioni da risolvere 731-740.

LIVORNO

RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE

LIBRAIO-TIPOGRAFO

1906

29-30-31. **Bonaventura A.** — *Manuale di storia della musica.* 2ª edizione . L. 1 50
32. **Belli M.** — *Dell'accento greco* . . . . . „ — 50
33-34. **Menasci G.** — *Manuale storico della letteratura francese* . . „ 1 —
35. **Andreini A.** — *Tavole dei Logaritmi con 3 e con 4 decimali* . . „ — 50
36. **Ardy L. F.** — *Psicologia.* . . . . . „ 50 —
37. **Cappelletti L.** — *Storia contemporanea d'Italia.* (1815-1900). 2ª ediz. „ — 50
38. **Belli M.** — *Indice dei verbi greci irregolari.* Seconda edizione . . „ — 50
39-40. **Cinquini A.** — *Morfologia latina* . . . . . „ 1 —
41-42. **Lazzeri G.** — *Manuale di trigonometria piana.* Seconda edizione . „ 1 —
43. **Testi G. M.** — *Compendio di aritmetica razionale* . . . . . „ — 50
44. **Pavia L.** — *Esercizî tedeschi.* Parte I . . . . . „ — 50
45. —— *Esercizî tedeschi.* Parte II . . . . . „ — 50
46-47. **Ortu Carboni S.** — *Sunto di geometria elementare.* Planimetria . „ 1 —
48. **Montanari C.** — *Elementi di geometria descrittiva.* . . . . . „ — 50
49-50. **Ortu Carboni S.** — *Sunto di geometria elementare.* Stereometria . „ 1 —
51. **Pittoni L.** — *Principi di prospettiva.* Seconda edizione . . . . „ — 50
52-53. **Lazzeri G.** — *Manuale di trigonometria sferica* . . . . . „ 1 —
54-55. **Ortu Carboni S.** — *Esercizi di geometria elementare* . . . . „ 1 —
56. **Bizzarrini G.** — *Nozioni di storia naturale.* - I. Zoologia. Seconda edizione . . . . . „ — 50
57. **Falorsi G.** — *Storia antica.* - I. Storia greca. Seconda edizione. . „ — 50
58-59. —— *Storia antica.* - II. Storia romana . . . . . „ 1 —
60. —— *Mitologia* . . . . . „ — 50
61. **Gatti G. M.** — *Deutsche Grammatik* . . . . . „ — 50
62. **Cervi A.** — *La metrica di Orazio per tavole sinottiche* . . . . „ — 50
63. **Pierotti G.** — *Tavole sinottiche per analisi logica e sintassi della proposizione nelle lingue italiana, latina e greca* . . . . . „ — 50
64. **Bizzarrini G.** — *Nozioni di storia naturale.* - II. Botanica. Seconda edizione. . . . . „ — 50
65. **Cappelletti L.** — *Storia d'Italia dal 1492 al 1815.* Seconda edizione . „ — 50
66-67. **Visalli P.** — *Algebra* . . . . . „ 1 —
68. **Bizzarrini G.** — *Nozioni di storia naturale.* - III. Mineralogia, geografia fisica e geologia. Prima ristampa della prima edizione . . . . „ — 50
69-70. **Vigo P.** — *Storia generale del Medio Evo.* Seconda edizione . . „ 1 —
71. **Cunsolo V.** — *Scienza delle finanze* . . . . . „ — 50
72. **Levi E.** — *Grammatica italiana.* - Parte I. Fonologia - Morfologia . „ — 50
73. **Flamini F.** — *Storia della letteratura italiana.* Quarta edizione. . „ — 50
74. **Krusekopf E.** — *Storia della letteratura tedesca* . . . . . „ — 50
75-76. **Martini Zuccagni A.** — *Guida per la risoluzione degli esercizi d'algebra.* „ 1 —
77. **Bizzarrini G.** — *Nozioni di storia naturale.* - IV. Geografia fisica e geologia. Seconda edizione . . . . . „ — 50
78-79. **Morselli E.** — *Psicologia* . . . . . „ 1 —
80-81. **Verdaro G.** — *Letteratura latina* . . . . . „ 1 —
82. **Lattes G.** — *Letture pedagogiche* . . . . . „ — 50
83-84. **Groppali A.** — *Etica* . . . . . „ 1 —
85. **Arduino E.** — *Statistica* . . . . . „ — 50
86. **Levi E.** — *Grammatica italiana.* - Parte II. Sintassi . . . . „ — 50
87. **Bizzarrini G.** — *Nozioni d'igiene coll'aggiunta dei primi soccorsi in caso d'infortunio e d'improvviso malore.* Seconda edizione. . . „ — 50
88. **Fazzini U.** — *Complementi d'algebra* . . . . . „ — 50
89. **Scaramella G.** — *Caratteri delle varie età e periodi storici* (476-1878) „ — 50
90-91. **Martini Zuccagni A.** — *Guida pratica per la risoluzione delle equazioni di 1° e 2° grado.* . . . . . „ 1 —
92. **Morselli E.** — *Logica* . . . . . „ — 50
93-94. **Martini Zuccagni A.** — *Algebra complementare.* . . . . . „ 1 —
95-96. **Ongaro G.** — *Chimica docimastica* . . . . . „ 1 —

(Segue in 8ª pagina).

SEMPRE A PROPOSITO DELLA 60ª QUISTIONE A CONCORSO

(Continuaz. e fine v. fasc. prec.)

---

6. Teorema. — *Se è* $n = sm + i$, n *ed* m *primi tra loro*, n *non primo con* P_i *ed il m. c. d. tra* n *e* P_i *maggiore di* s, *non esiste alcuna soluzione del problema, salvo quella relativa all'ordinario poligono stellato.*

Infatti, sia δ il m. c. d. fra n e P_i, e siano n' e P'_i i quozienti delle divisioni per δ di n e P_i, cioè

$$n = \delta n', \quad P_i = \delta P'_i,$$

sarà necessariamente $n' \gtrless m$ perchè per ipotesi è $\delta > s$. Ma, essendo n ed m primi tra loro, è $P_s = n_1 P_i$ (5; quindi almeno i $2m+1$ numeri del quadro (A, i quali compongono le orizzontali, che hanno per primi termini P_i e P_s, sono tutti divisibili per d. D'altra parte se nelle poste ipotesi il problema fosse possibile, gli n numeri del quadro (A dovrebbero essere congrui, salvo l'ordine, coi numeri da 1 ad n secondo il modulo n, e quindi anche secondo il modulo δ divisore di n, cioè dovrebbero essere divisibili per δ tanti numeri del quadro quanti sono i multipli di δ non maggiori di n, ovvero n'; ma divisibili per δ ve ne sono non meno di $2m+1$, quindi dovrebbe essere

$$n' \lesseqgtr 2m + 1,$$

e ciò è assurdo perchè è $n' \gtrless m$.

Osservazione. — Il teorema dimostrato vale pure se è $i < \frac{1}{2} s < \delta$, perchè risulterebbe $n' \gtrless 2m$, mentre dovrebb'essere $n' \lesseqgtr 2m + 1$.

7. Applicazioni. — *a)* Sia $n = 2m + 1$. In questo caso n ed m sono necessariamente primi tra loro; per cui, essendo

$$P_s = P_2 = p_1 + p_2, \qquad P_i = p_1$$

dovrà essere necessariamente (5)

$$p_1 + p_2 = 2p_1, \qquad \text{cioè} \qquad p_1 = p_2.$$

Inoltre dovrà essere pure p_1 primo con n, altrimenti riuscendo il loro m. c. d. maggiore di 2, perchè n è dispari, il problema sarebbe impossibile (6). La sola soluzione è dunque quella relativa all'ordinario poligono stellato, come già si disse nello studio del problema particolare.

b) Sia $n = 3m + 1$. Anche in questo caso n ed m sono necessariamente primi tra loro; per cui, essendo

$$P_s = P_3 = p_1 + p_2 + p_3, \qquad P_i = p_1,$$

dovrà essere (5)

$$p_1 + p_2 + p_3 = 3p_1, \qquad \text{ovvero} \qquad p_2 + p_3 = 2p_1.$$

Inoltre, poichè è $s = 3$, $i = 1$, risulta $i < \frac{1}{2} s$, e quindi il problema è impossibile con $P_i = p_1$ non primo con n, perchè il m. c. d. tra n e P_i sarà sempre maggiore di $\frac{1}{2} s = \frac{3}{2}$ (6, osserv.).

Supposto p_1 primo con n il teorema (4) ci dà la sola soluzione, in cui sia

$$P_1 = 1 \,.\, p_1 = p_1, \qquad P_2 = 2p_1, \qquad P_3 = 3p_1,$$

ovvero

$$p_1 = p_1, \qquad p_2 = P_2 - P_1 = p_1, \qquad p_3 = P_3 - P_2 = p_1,$$

cioè quella dell'ordinario poligono stellato. Questa soluzione è poi l'unica possibile; cioè, se, essendo p_1 primo con n, e $p_2 + p_3 = 2p_1$, i numeri del quadro

$$\begin{array}{lllll} p_1 & 4p_1 & 7p_1 & \ldots (3m-2)p_1 & (3m+1)p_1 \\ p_1+p_2 & 4p_1+p_2 & 7p_1+p_2 & \ldots (3m-2)p_1+p_2 & \\ 3p_1 & 6p_1 & 9p_1 & \ldots 3mp_1 & \end{array}$$

divisi per n, dànno resti tutti distinti, necessariamente è $p_2 = p_1$, cioè

$$p_1 = p_2 = p_3 .$$

Negando, infatti, che sia $p_3 = p_1$, e ponendo

$$p_2 = p_1 + r,$$

il quadro precedente diventa

$$\begin{array}{lllll} p_1 & 4p_1 & 7p_1 & \ldots (3m-2)p_1 & (3m+1)p_1 \\ 2p_1+r & 5p_1+r & 8p_1+r & \ldots (3m-1)p_1+r & \\ 3p_1 & 6p_1 & 9p_1 & \ldots 3mp_1 & \end{array}$$

ed i numeri, che lo compongono, per ipotesi sono congrui coi numeri da 1 ad n secondo il modulo n; ma anche i multipli di p_1, cioè

$$\begin{array}{lllll} p_1 & 4p_1 & 7p_1 \ldots & (3m-2)p_1 & (3m+1)p_1 \\ 2p_1 & 5p_1 & 8p_1 \ldots & (3m-1)p_1 & \\ 3p_1 & 6p_1 & 9p_1 \ldots & 3mp_1 & \end{array}$$

sono congrui coi numeri da 1 ad n secondo il modulo n, essendo n primo con p_1, quindi necessariamente i numeri

$$2p_1 + r \qquad 5p_1 + r \qquad 8p_1 + r \ldots (3m-1)p_1 + r \qquad (\alpha$$

devono essere congrui, salvo l'ordine, coi numeri

$$2p_1 \qquad 5p_1 \qquad 8p_1 \ldots (3m-1)p_1 . \qquad (\beta$$

Ma se è r diverso da zero i due primi termini di questi due gruppi non sono congrui tra loro, quindi supponiamo che sia il primo termine del gruppo (α congruo col $(k+1)$-esimo del gruppo (β, cioè che la differenza

$$2p_1 + r - [3(k+1) - 1]p_1 = r - 3kp_1$$

sia divisibile per n; ne deriva allora che saranno congrui tra loro rispettivamente anche i seguenti termini dei due gruppi fino all'ultimo del gruppo (β, perchè tanto gli uni che gli altri sono in progressione aritmetica con la stessa ragione $3p_1$; ma il seguente del primo gruppo, che occuperà il posto $(m-k+1)$-esimo, non potrà essere congruo con veruno di quelli, che precedono il $(k+1)$-esimo del secondo gruppo, giacchè la differenza

$$[3(m-k+1)-1]p_1 + r - (3h-1)p_1 = (r - 3kp_1) + 3(m-h+1)p_1,$$

in cui sia $h \leqq k$, non può essere divisibile per n, perchè non è divisibile per n il termine $3(m-h+1)p_1$ essendo $3p_1$ primo con n ed $m-h+1$ minore di n; dovrà dunque essere necessariamente $r = 0$, ovvero $p_1 = p_2 = p_3$, come si era detto.

c) Sia $n = 4m + 1$. Poichè n ed m sono necessariamente primi tra loro, ed n è dispari, dovrà essere n primo con $P_i = P_1 = p_1$, altrimenti essendo $i = 1, \frac{1}{2}s = 2$ ed il m. c. d. fra n e P_i maggiore di 2, cioè maggiore di $\frac{1}{2}s$, il problema non avrebbe alcuna soluzione (6, oss.), salvo sempre quella relativa all'ordinario poligono stellato. Supposto invece n e p_1 primi tra loro, il teorema del n. 4 dà due sole soluzioni, corrispondenti alle due permutazioni possibili

$$1, 2, 3, 4 \qquad 1, 3, 2, 4;$$

per la prima delle quali si ha

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = 2p_1, \quad P_3 = 3p_1, \quad P_4 = 4p_1,$$

ovvero

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 ,$$

e questa corrisponde all'ordinario poligono stellato; e per la seconda si ha

$$P_1 = p_1 , \quad P_2 = 3p_1 , \quad P_3 = 2p_1 , \quad P_4 = 4p_1 ,$$

ovvero

$$p_1 = p_1 , \quad p_2 = 2p_1 , \quad p_3 = -p_1 , \quad p_4 = 2p_1 .$$

Dico ora che queste due soluzioni sono le uniche possibili. Infatti, essendo n ed m primi tra loro, sarà necessariamente (5)

$$P_4 = 4P_1 = 4p_1 ,$$

per cui il quadro relativo ad una soluzione qualunque p_1, p_2, p_3, p_4 sarà

$$\begin{array}{lllll}
p_1 & 5p_1 & 9p_1 & \ldots\ (4m-3)p_1 & (4m+1)p_1 \\
p_1+p_2 & 5p_1+p_2 & 9p_1+p_2 & \ldots\ (4m-3)p_1+p_2 & \\
p_1+p_2+p_3 & 5p_1+p_2+p_3 & 9p_1+p_2+p_3 & \ldots\ (4m-3)p_1+p_2+p_3 & \\
4p_1 & 8p_1 & 12p_1 & \ldots\ 4mp_1 &
\end{array}$$

che, posto

$$p_2 = p_1 + r_2 , \quad p_3 = p_1 + r_3 ,$$

diventa

$$\begin{array}{lllll}
p_1 & 5p_1 & 9p_1 & \ldots\ (4m-3)p_1 & (4m+1)p_1 \\
2p_1+r_2 & 6p_1+r_2 & 10p_1+r_2 & \ldots\ (4m-2)p_1+r_2 & \qquad\text{(D} \\
3p_1+r_2+r_3 & 7p_1+r_2+r_3 & 11p_1+r_2+r_3 & \ldots\ (4m-1)p_1+r_2+r_3 & \\
4p_1 & 8p_1 & 12p_1 & \ldots\ 4mp_1 .&
\end{array}$$

I numeri di questo quadro sono congrui, secondo il modulo n, coi numeri da 1 ad n, come sono pure i multipli di p_1, primo con n, secondo i numeri da 1 ad n, cioè

$$\begin{array}{lllll}
p_1 & 5p_1 & 9p_1 & \ldots\ (4m-3)p_1 & (4m+1)p_1 \\
2p_1 & 6p_1 & 10p_1 & \ldots\ (4m-2)p_1 & \qquad\text{(E} \\
3p_1 & 7p_1 & 11p_1 & \ldots\ (4m-1)p_1 & \\
4p_1 & 8p_1 & 12p_1 & \ldots\ 4mp_1 &
\end{array}$$

e perciò, salvo l'ordine, i numeri delle due orizzontali intermedie del quadro (D devono essere congrui, secondo il modulo n, coi numeri delle due orizzontali intermedie di quest'ultimo quadro.

Se quindi il primo termine della seconda orizzontale del quadro (D è congruo col primo termine della seconda orizzontale del quadro (E dovrà essere necessariamente $r_2 = 0$, ed allora con un ragionamento, identico a quello usato nel caso di $n = 3m + 1$, si dedurrà che dovrà essere pure necessariamente $r_3 = 0$, cioè

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 .$$

E se invece il primo termine della seconda orizzontale del quadro (D è congruo col primo termine della terza orizzontale del quadro (E sarà necessariamente

$$r_2 - p_1 = 0 , \quad \text{ovvero} \quad r_2 = p_1 ,$$

e quindi

$$p_2 = 2p_1 ,$$

e saranno pure necessariamente congrui tra loro il primo termine della terza orizzontale del quadro (D e quello della seconda del quadro (E, cioè sarà

$$2p_1 + r_3 = 0, \quad \text{ovvero} \quad r_3 = -2p_1 ;$$

e quindi

$$p_3 = -p_1 ;$$

si ha, cioè, l'altra soluzione trovata

$$p_1 = p_1 , \quad p_2 = 2p_1 , \quad p_3 = -p_1 , \quad p_4 = 2p_1 .$$

Ogni altra ipotesi è impossibile. Infatti separiamo le due orizzontali intermedie dei due quadri (D, (E nei gruppi, indicati dai numeri (1, (2, (3, (4, come si vede nei due specchietti seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} \overbrace{2p_1 + r_2 \ldots (4h-2)\,p_1 + r_3}^{(1} & \overbrace{[4\,(h+1)-2]\,p_1 + r_3 \ldots (4m-2)\,p_1 + r_3}^{(2} \\ \overbrace{3p_1 + r_2 + r_3 \ldots (4h-1)p_1 + r_2 + r_3}^{(3} & \overbrace{[4(h+1)-1]\,p_1 + r_2 + r_3 \ldots (4m-1)\,p_1 + r_2 + r_3}^{(4} \end{array}\right\} (\gamma$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overbrace{2p_1 \quad 6p_1 \ldots [4\,(m-h)-2]\,p_1}^{(4} & \overbrace{[4\,(m-h+1)-2]\,p_1 \ldots (4m-2)\,p_1}^{(1} \\ \overbrace{3p_1 \quad 7p_1 \ldots [4\,(m-h)-1]\,p_1}^{(2} & \overbrace{[4\,(m-h+1)-1]\,p_1 \ldots (4m-1)\,p_1}^{(3} \end{array}\right\} (\delta$$

e supponiamo che il primo termine del gruppo (1 dello specchietto (γ sia congruo col primo termine del gruppo (1 dello specchietto (δ, cioè che sia

$$2p_1 + r_2 - [4\,(m-h+1)-2]\,p_1 = r_2 - 4\,(m-h)\,p_1 = \text{mult. di } n\,; \qquad (2$$

saranno allora necessariamente tutti gli h termini del gruppo (1 dello specchietto (γ congrui nello stesso ordine con gli h termini del gruppo (1 dello specchietto (δ, perchè gli uni e gli altri sono in progressione aritmetica di ragione $4p_1$; ma non potranno essere gli $m-h$ termini del gruppo (2 dello specchietto (γ congrui con gli altrettanti termini del gruppo (4 dello specchietto (δ, come è facile vedere. Dovranno quindi i termini del gruppo (2 dello specchietto (γ essere congrui coi primi $m-h$ termini, che formano il gruppo (2 dello specchietto (δ, e non con altri della seconda orizzontale dello specchietto (δ altrimenti quelli, che precederebbero questi ultimi dovrebbero essere congrui con alcuni degli ultimi del gruppo (1 dello specchietto (γ. Ne seguirà necessariamente che la seconda orizzontale dello specchietto (γ si dovrà comporre coi gruppi (3, (4 congrui coi gruppi (3, (4 dello specchietto (δ. Si conchiude da tutto ciò che dovranno essere multipli di n le tre differenze fra i primi termini dei due gruppi (2, dei due gruppi (3 e dei due gruppi (4, cioè

$$[4\,(h+1)-2]\,p_1 + r_2 - 3p_1 = (4h-1)\,p_1 + r_2 = \text{multiplo di } n$$
$$3p_1 + r_2 + r_3 - [4\,(m-h+1)-1]\,p_1 = r_2 + r_3 - 4\,(m-h)\,p_1 = \text{mult. di } n$$
$$[4\,(h+1)-1]\,p_1 + r_2 + r_3 - 2p_1 = (4h+1)\,p_1 + r_2 + r_3 = \text{multiplo di } n,$$

e poichè, per effetto dell'equazione (2, la seconda di queste equazioni dà necessariamente $r_3 = 0$, le altre due per differenza dànno

$$2p_1 = \text{mult. di } n\,,$$

il che è impossibile essendo p_1 primo con n.

Similmente si mostrerebbe che è anche impossibile l'ipotesi che il primo termine del gruppo (1 dello specchietto (γ sia congruo col primo termine del gruppo (3 dello specchietto (δ; quindi resta in definitivo che sono ammissibili solo le due ipotesi fatte in principio, ovvero che le due soluzioni date dal teorema del n. 4 sono le sole possibili.

Avvertenza. — È bene notare che in tutte le considerazioni fatte non è necessario tener conto del segno dei numeri p, perchè se qualcuno di essi fosse negativo, p_k per es., si può sostituire ad esso il numero positivo $n + p_k$, il quale contato dopo p_{k-1}, secondo l'enunciato del problema generale, conduce evidentemente allo stesso punto di divisione della circonferenza, al quale si perviene contando dopo p_{k-1} in senso inverso il numero di parti indicato da p_k.

Livorno, gennaio 1906.

R. Mazzola.

67ª QUISTIONE A CONCORSO

Dato un triangolo OA_1B_1 trovare, con costruzioni piane, un triangolo OAB rettangolo in O ed isoscele, tale che OA_1B_1 sia proiezione ortogonale di esso.

G. L.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 31 marzo 1906.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONE DELLA 62ª QUISTIONE A CONCORSO

I. — *Se fra i lati di un triangolo esiste la relazione*

$$Ka^2 = b^2 + c^2, \tag{1}$$

ed α *rappresenta l'angolo opposto ad* a, α' *l'angolo sotto il quale dal baricentro* G *si vede il lato* BC, *si ha*

$$\frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = 3\,\frac{k-1}{k-5}.$$

II. — *Fare uno studio del* TRIANGOLO NOTEVOLE, *fra i lati del quale esiste la relazione*

$$2a^2 = b^2 + c^2, \tag{2}$$

dimostrando in particolare che per esso valgono i seguenti teoremi:

1. *La circonferenza circoscritta al triangolo dato è uguale a quella circoscritta al triangolo* BGC.
2. *Gli angoli sotto i quali da* G *si vedono i lati* a, b, c *sono* $\pi - \alpha$, $\pi - \gamma$, $\pi - \beta$ *rispettivamente.*
3. $m_a = \frac{1}{2} a \sqrt{3}, \quad m_b = \frac{1}{2} c \sqrt{3}, \quad m_c = \frac{1}{2} b \sqrt{3}.$
4. *Le bisettrici degli angoli* BAC, BGC *incontrano* BC *nello stesso punto.*
5. *Le bisettrici degli angoli* AGB, AGC *incontrano* AB, AC *in due punti allineati col punto d'incontro della retta* BC *colla bisettrice dell'angolo esterno opposto.*
6. *La circonferenza circoscritta al triangolo* BGC *è media geometrica tra quelle circoscritte ai triangoli* AGC, AGB.
7. *I centri delle circonferenze circoscritte ai triangoli* AGB, AGC *hanno per proiezioni su* BC *i punti* B, C.
8. *Il triangolo che ha per vertici i centri dei circoli circoscritti ai triangoli* BGA, CGB, AGC *è un triangolo della stessa specie di quello dato, cioè verifica la proprietà caratteristica* (2). *Il baricentro di questo triangolo coincide col circumcentro del triangolo* ABC.
9. *La mediana relativa a* BC *incontra la circonferenza circoscritta in un punto simmetrico del baricentro rispetto ad* M_a *(punto medio di* BC).
10. *La retta che congiunge il circumcentro coll'ortocentro (retta d'Eulero) è perpendicolare alla mediana uscente da* A.

11. *Il triangolo che ha per lati le distanze dell'ortocentro dai vertici è della stessa specie di quello dato.*

12. *La circonferenza che passa per l'ortocentro, per il suo punto reciproco e per il baricentro, passa pure per* B *e* C.

13. *Il circolo che passa per* A *e per i punti isotomici di* H_b, H_c, *passa pure per il reciproco dell'ortocentro ed ha il suo centro sull'asse di* BC.

14. *Il circolo d'Eulero passa pel punto medio di* GA.

15. *Le parallele alla mediana* m_a *condotta per* H_b, H_c *incontrano le mediane* m_b, m_c *in due punti appartenenti al circolo d'Eulero.*

16. *La retta che congiunge il punto di Lemoine al baricentro, è parallela a* BC.

17. *Le parallele condotte per il baricentro ai lati* AB, AC *passano rispettivamente per uno dei punti di Brocard.*

III. *Costruire il triangolo notevole in questione, conoscendo due elementi, per es.:*

1. a, α; 2. a, h_a; 3. h_a, α.

G. De Longchamps.

I lavori presentati a questo concorso sono sette ed appartengono ai signori **Semenza** e **Crugnola** del R. I. T. di *Milano*, **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*, **Santarella**, L. di *Bitonto*, **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*, **Marranghello**, R. L. di *Arezzo*, **Terracini**, R. L. di *Torino*.

Son lieto di poter dichiarare che tutti i suddetti giovani sono meritevoli d'un sincero elogio sia per la cura che hanno dedicato allo studio della questione proposta, sia per la eleganza colla quale varie della dimostrazioni sono condotte.

Nel Vercellin e nel Vacchi, come nel Semenza e Crugnola si riconoscono subito dei giovani che hanno molta familiarità nella trattazione di simili questioni, tanto per le premesse sulle quali sanno molto opportunamente basarsi che pel logico svolgimento delle dimostrazioni. Li porrei dunque senza esitazione ad uno stesso grado se alcune mende che in uno trovo più accentuate che nell'altro, non mi obbligassero a considerare il lavoro del sig.

VERCELLIN, R. I. T. di *Torino*

come il più meritevole di considerazione, anche perchè non tralascia di dimostrare nessuna delle proposizioni proposte. Nel loro complesso le dimostrazioni di questo sono più semplici e più strettamente connesse fra loro di quello che lo siano negli altri lavori che ho sott'occhio. Il Vacchi non dimostra le proposizioni 13, 14, 15; la dimostrazione della parte I lo conduce ad una serie di lunghi e faticosi sviluppi che avrebbe evitati partendo dalle relazioni che danno l'area d'un triangolo in funzione di due lati e dell'angolo compreso. L'osservare al Vercellin che non vedo come dalla dimostrazione della proposizione 8 egli deduca come teoremi le proposizioni 9 e 10 e che la costruzione 3 (parte III), e per conseguenza anche la 5, sono errate, non bastano a far passare il suo lavoro dopo l'uno qualunque dei rimanenti.

I sigg. Semenza e Crugnola presentano due soluzioni uguali, poichè il lavoro dell'uno non differisce dal lavoro dell'altro che in qualche dettaglio; buone nel loro complesso e complete, sono però un po' troppo slegate nelle varie dimostrazioni, giacchè essi non tengono quasi mai conto dei risultati ottenuti per applicarli alla dimostrazione di qualcuna delle seguenti proposizioni. Ciò li obbliga naturalmente a ricorrere a sempre nuove formule ed a sviluppi non semplici nè brevi. La dimostrazione della proposizione 9 è poi, a mio modo di vedere, troppo artificiosa.

Il Marranghello dimostra molto elegantemente una parte solamente delle proposizioni proposte: non si occupa però delle proposizioni 8, 12, 13, 15, 16, 17. Se ciò non fosse, ed anche le dimostrazioni mancanti avessero avuto lo stesso valore di quelle che ha scritte, il suo lavoro sarebbe stato il migliore, specialmente per le costruzioni della parte III che sono le migliori fra tutte.

Buone sono pure alcune delle dimostrazioni contenute nel lavoro del sig. Santarella; altre però sono tutt'altro che semplici a causa delle formule delle quali si serve. Inoltre egli non dimostra nè le proposizioni 14, 15, 17, nè considera nessuna delle costruzioni proposte.

Il lavoro del sig. Terracini è il più voluminoso avendo egli scritto circa 80 facciate e in diversi punti non è privo di pregi che dimostrano come in lui è un largo spirito di osservazione e molta facilità di deduzione, e come debba aver letto con profitto più d'un lavoro sulla recente geometria del triangolo. Nella lunga serie di proposizioni ch'egli enuncia e dimostra, alcune delle quali però potrebbero proficuamente ridursi ad un unico enunciato, non trovo traccia delle proposizioni 12, 13, 16, 17 della questione proposta. Osservo inoltre che egli non deve aver riletto attentamente il suo lavoro, senza di che non gli sarebbe certamente sfuggito che alcune fra le proposizioni o dimostrazioni (quali ad es. il coroll. 2 del teorema V, *a*, il *b* del teor. VI, *a*, il teor. VII, *a*, e il *c* e *d*) sono errate, e che alcune altre (la *b* del teor. VII, *a*, ad es.) dovrebbero venire almeno parzialmente modificate. Il lemma II mi sembra superfluo, potendosi le varie proposizioni che gli fan seguito dimostrare direttamente. Alcuni poi dei teoremi e corollari enunciati non sono caratteristici di un triangolo D. L., ma, come può riscontrarsi nei vari trattati, sussistono per ogni triangolo piano. Buone le costruzioni particolari della parte III, quantunque fra esse non siano tutte le tre dell'enunciato.

C. Alasia.

Risoluzione.

I.

Nel triangolo ABC, per due note formule di Geometria, abbiamo,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2S}{bc}, \qquad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2(k-1)}{2bc},$$

essendo S l'area del triangolo. Nel triangolo BGC, pel teorema di Carnot, abbiamo,

$$\operatorname{sen}\alpha' = \frac{2S}{3}\,\frac{1}{\frac{4}{9}m_b m_c} = \frac{3}{2}\,\frac{S}{m_b m_c},$$

$$\cos\alpha' = [\tfrac{4}{9}(m_b^2+m_c^2)-a^2] : \tfrac{8}{9}m_b m_c,$$

ed, essendo

$$m_b^2+m_c^2 = \frac{4a^2+(b^2+c^2)}{4} = \frac{a^2(4+k)}{4}, \qquad \cos\alpha' = \frac{a^2(k-5)}{8m_b\,.\,m_c}.$$

Abbiamo così,

$$\tan\alpha = \frac{4S}{a^2(k-1)}, \qquad \tan\alpha' = \frac{12S}{a^2(k-5)},$$

e dunque

$$\frac{\tan\alpha'}{\tan\alpha} = 3\,\frac{k-1}{k-5}. \qquad (a)$$

Osservazione. — La nota formula

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

nel caso nel quale i lati di ABC sono legati dalla relazione (1) diventa

$$m_a = \tfrac{1}{2} a \sqrt{2k - 1} \tag{3}$$

ossia:

Teorema 1. — *Nel triangolo, i cui lati sono legati dalla relazione* (1), *il luogo del vertice* A *opposto ad* a *è la circonferenza che ha il piede della mediana* m_a *per centro ed il cui raggio è uguale ad* $\tfrac{1}{2} a \sqrt{2k - 1}$.

II.

Consideriamo in particolare il triangolo *notevole* fra i cui lati sussiste la relazione (2). Chiameremo tale triangolo dal nome di G. De Longchamps, e lo indicheremo colla notazione triangolo D. L.

1. (3). Facendo $k = 2$ nella (3) abbiamo

$$m_a = \tfrac{1}{2} a \sqrt{3}.$$

Troveremo analogamente dalle due formule che danno m_b^2 ed m_c^2, tenendo conto di (2)

$$m_b = \tfrac{1}{2} c \sqrt{3}, \qquad m_c = \tfrac{1}{2} b \sqrt{3}.$$

Corollario I. — *Da queste due ultime relazioni deduciamo*

$$m_b : m_c = c : b,$$

ossia, che in un triangolo D. L. le due mediane m_b, m_c *sono inversamente proporzionali ai lati* b *e* c.

Corollario 2. — *Per note formule* [1] *abbiamo in un triangolo D. L., le relazioni caratteristiche:*

1° $3a^2 = 2(m_a \cdot AG + m_b \cdot BG + m_c \cdot CG)$,

2° $a^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2$,

3° $3a^2 = 4(m_a \cdot M_aG + m_b \cdot M_bG + m_c \cdot M_cG)$.

2. (1). Se con R indichiamo il raggio del circolo circoscritto ad ABC, è

$$R = \frac{abc}{4S}:$$

analogamente, se R_a è il raggio del circolo circoscritto a BGC, è

$$R_a = \frac{a \cdot \tfrac{1}{2} m_b \cdot \tfrac{1}{2} m_c}{\tfrac{1}{2} S} = \frac{a m_b m_c}{3S}$$

dalla quale, dopo aver sostituiti ad m_b, m_c i valori dati nel numero precedente,

$$R_a = \frac{abc}{4S}$$

per cui è $R = R_a$: dunque:

Teorema 2. — *Le circonferenze circoscritte ai due triangoli* ABC, BGC *sono uguali.*

Corollario 1. — *I centri delle due circonferenze* (R) *ed* (R_a) *sono punti simmetrici rispetto a* CB.

Corollario 2. — Poichè M_a è punto medio di BC, corda comune a due archi di circonferenze uguali, ogni segmento che passi per esso ed abbia gli estremi sui due archi è diviso da questo punto in due parti uguali. Se dunque

[1] Cfr. ad esempio la mia *Recente Geometria del triangolo*, pag. 105, n. 24.

prolunghiamo GM_a ad incontrare (R) in N, essendo G su (R_a), è $GM_a = M_aN$, ossia

(9) *La mediana relativa a* BC *incontra la circonferenza circoscritta in un punto simmetrico del baricentro rispetto ad* M_a.

3. Dalla relazione (a) per $k = 2$ deducesi

$$\tan \alpha' = -\tan \alpha,$$

e siccome tanto α' che α devono esser minori di π, ed è

$$-\tan \alpha = \tan(\pi - \alpha),$$

così, $\alpha' = \pi - \alpha$. Notando poi che

$$CM_a = \tfrac{1}{2} a, \qquad AM_a = m_a = \tfrac{1}{2} a\sqrt{3}, \qquad GM_a = \tfrac{1}{3} AM_a = \tfrac{1}{6} a\sqrt{3},$$

abbiamo

$$AM_a : CM_a = CM_a : M_aG$$

ed i due triangoli ACM_a, CGM_a sono simili, e perciò è $\widehat{ACM_a} = \widehat{CGM_a}$.

Dunque

$$\beta' = \widehat{AGC} = \pi - \widehat{CGM_a} = \pi - \widehat{ACM_a} = \pi - \gamma.$$

Si trova in modo analogo che è $\gamma' = \pi - \beta$. Quindi,

(2) Teorema 3. — *Gli angoli sotto i quali da* G *si vedono i lati* a, b, c *sono* $\pi - \alpha$, $\pi - \gamma$, $\pi - \beta$ *rispettivamente.*

Corollario. — Dalla similitudine dei due triangoli ACM_a, CGM_a deduciamo $\widehat{M_aCG} = \widehat{CAG}$, per cui CB è tangente in C alla circonferenza circoscritta al triangolo AGC, ed il centro di questa è sulla perpendicolare in C a BC. Analogamente diciamo pel punto B rispetto alla circonferenza circoscritta ad ACB. Dunque

(7) *I centri delle circonferenze circoscritte ai triangoli* AGB, AGC *hanno per proiezioni su* BC *i punti* B, C.

4. Nel triangolo BGC è

$$2R_a = \frac{a}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)}:$$

analogamente, chiamando R_b, R_c i raggi dei circoli circoscritti ai triangoli AGC AGB,

$$2R_b = \frac{b}{\operatorname{sen}(\pi - \gamma)}, \qquad 2R_c = \frac{c}{\operatorname{sen}(\pi - \beta)}:$$

e quindi

$$2R_a = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad 2R_b = \frac{b}{\operatorname{sen}\gamma}, \qquad 2R_c = \frac{c}{\operatorname{sen}\beta},$$

ossia, pel noto teorema dei seni,

$$R_a^2 = R_b \,.\, R_c\,.$$

Dunque

(6). *La circonferenza circoscritta al triangolo* BGC *è media geometrica fra quelle circoscritte ai triangoli* AGC, AGB.

Corollario 1. — *Il triangolo determinato dai baricentri dei tre triangoli suddetti è direttamente simile al triangolo* ABC.

5. Siano ora L ed L'_1 i punti nei quali le bisettrici degli angoli BAC, BGC incontrano a: è

$$\frac{CL}{LB} = \frac{b}{c} = \frac{m_c}{m_b}, \qquad \frac{CL'_1}{L'_1B} = \frac{\frac{2}{3} m_c}{\frac{2}{3} m_b} = \frac{m_c}{m_b},$$

per cui

$$\frac{CL}{LB} = \frac{CL'_1}{L'_1B},$$

cioè L ed L'_1 coincidono. Così,

(4) Teorema 4. — *Le bisettrici interne degli angoli* BAC, BGC *concorrono in uno stesso punto di* BG.

COROLLARIO. — *In un triangolo D. L. le bisettrici esterne degli angoli* BAC, BGC *concorrono in uno stesso punto di* BC.

Siano analogamente L'_2, L'_3 i punti nei quali le bisettrici degli angoli AGB, AGC incontrano c e b rispettivamente e sia L'' il punto d'incontro di CB colla bisettrice dell'angolo esterno opposto, anche qui abbiamo

$$\frac{L'_2A}{L'_2B} = \frac{m_a}{m_b}, \qquad \frac{L''B}{L''C} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{L'_3C}{L'_3A} = \frac{m_c}{m_a}$$

e moltiplicando membro a membro e ricordando che (n. 1, coroll. 1) $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c}$

$$\frac{L'_2A \,.\, L''B \,.\, L'_3C}{L'_2B \,.\, L''C \,.\, L'_3A} = \frac{m_a \,.\, m_b \,.\, m_c}{m_b \,.\, m_c \,.\, m_a} = 1$$

per cui, pel teorema di Menelao, i tre punti L'_2, L'_3, L'' sono in linea retta. Dunque:

(5). TEOREMA 5. — *Le bisettrici degli angoli* AGB, AGC *incontrano* AB, AC *in due punti allineati col punto d'incontro della retta* BC *colla bisettrice dell'angolo esterno opposto.*

6. Chiamiamo O_a, O_b, O_c i centri delle circonferenze circoscritte ai triangoli BGC, CGA, AGB. Poichè O_bO_c, O_cO_a, O_aO_b sono rispettivamente perpendicolari a GA, GB, GC, è

$$O_b\widehat{O_a}O_c = \pi - B\widehat{G}C = \pi - (\pi - \alpha) = \alpha,$$
$$O_c\widehat{O_b}O_a = \pi - C\widehat{G}A = \pi - (\pi - \gamma) = \gamma,$$
$$O_a\widehat{O_b}O_c = \pi - A\widehat{G}B = \pi - (\pi - \beta) = \beta.$$

I due triangoli $O_aO_bO_c$, ABC sono dunque simili. Ma ABC è un triangolo D. L., per cui

(8). TEOREMA 6. — *Il triangolo che ha per vertici i centri dei circoli circoscritti ai triangoli* BGA, CGB, AGC *è un triangolo della stessa specie di quello dato, cioè verifica la proprietà caratteristica espressa nel teorema 3.*

COROLLARIO 1. — *Il centro* O *del circolo circoscritto ad* ABC *è baricentro del triangolo* $O_aO_bO_c$.

Giacchè se G_o è il baricentro di $O_aO_bO_c$, è

$$O_b\widehat{G_o}O_c = \pi - O_b\widehat{O_a}O_c = \pi - \alpha,$$
$$O_c\widehat{G_o}O_a = \pi - O_a\widehat{O_b}O_c = \pi - \beta,$$
$$O_a\widehat{G_o}O_b = \pi - O_c\widehat{O_b}O_a = \pi - \gamma,$$

e dunque G_o ed O coincidono.

COROLLARIO 2. — *Il baricentro di* ABC *è punto di Lemoine di* $O_aO_bO_c$.

7. Indicando come di solito con H l'ortocentro del triangolo ABC dato, abbiamo

$$\overline{HB}^2 - \overline{HA}^2 = a^2 - b^2, \qquad \overline{HC}^2 - \overline{HA}^2 = a^2 - c^2,$$

per cui

$$\overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 - 2\,\overline{HA}^2 = 2a^2 - (c^2 + b^2) = 0,$$

a cagione di (2). Quindi

$$2\,\overline{HA}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2$$

ossia, i tre segmenti HA, HB, HC soddisfano a relazione analoga alla (2) ed il triangolo che con essi può costruirsi è un triangolo D. L. Così

(11). TEOREMA 7. — *Il triangolo che ha per lati le distanze dell'ortocentro dai vertici di* ABC *è della stessa specie di questo.*

COROLLARIO. — *In un triangolo D. L. i segmenti* HA, HB, HC *soddisfano alla relazione caratteristica*

$$\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 = 3\,(R^2 - \tfrac{1}{4}\,a^2).$$

8. Poichè $B\widehat{G'}C = \pi - \alpha$, è pure $B\widehat{H'}C = \pi - \alpha$: siano inoltre H' il reciproco di H, e H'_b, H'_c gli isotomici di H_b, H_c rispetto ad M_b ed M_c. Dall'essere

$$\tan H_b\widehat{B}H'_b = \frac{a^2 - c^2}{b} : \frac{\sqrt{4b^2c^2 - \alpha^2}}{2b}, \qquad \tan H_c\widehat{C}H'_c = \frac{b^2 - a^2}{c} : \frac{\sqrt{4b^2c^2 - \alpha^2}}{2c},$$

risulta

$$\tan H_bBH'_b = \tan H_cCH'_c, \qquad H_bBH'_b = H_cCH'_c,$$

ossia

$$B\widehat{H'}C = B\widehat{H}C.$$

Quindi possiamo dire che

(12). Teorema 8. — *La circonferenza che passa per l'ortocentro, pel suo punto reciproco e per il baricentro, passa pure per* B *e* C.

Corollario. — *Ciascuno dei quadrilateri* $HH'GB$, $HH'GC$ *è evidentemente inscrittibile.*

9. Siano A_1, A_2 i punti medi dei segmenti AH'_b, AH'_c: è

$$\begin{aligned}
&\overline{AA_1}^2 + \overline{BA_2}^2 + \overline{CM_a}^2 - \overline{CA_1}^2 - \overline{AA_2}^2 - \overline{BM_a}^2 \\
&= (AA_1 + CA_1)(AA_1 - CA_1) + (BA_2 + AA_2)(BA_2 - AA_2) + (\overline{CM_a}^2 - \overline{BM_a}^2) \\
&= -AG \,.\, CH'_b + AB \,.\, BH'_c \\
&= AB \,.\, AH_c - AC \,.\, AH_b = 0, \qquad (b)
\end{aligned}$$

per cui

$$\overline{AA_1}^2 + \overline{BA_2}^2 + \overline{CM_a}^2 = \overline{CA_1}^2 + \overline{AA_2}^2 + \overline{BM_a}^2$$

e dunque, per un noto teorema, le perpendicolari ai lati condotte per A_1, A_2, M_a concorrono in uno stesso punto, che evidentemente è il centro della circonferenza che passa per A, H', A_1, A_2. Così

(13). Teorema 9. — *I due punti isotomici di* H_b, H_c, *il reciproco dell'ortocentro* H *ed il vertice* A *di un triangolo D. L. appartengono alla stessa circonferenza.*

Corollario 1. — Dalla relazione (b) deduciamo che *in un triangolo D. L. i segmenti che uniscono il vertice* A *ai due punti* H_b, H_c *sono in rapporto inverso coi lati.*

(10), (14). Corollario 2. — Chiamiamo A' il punto medio del segmento AG: poichè per la sua stessa definizione *la retta di Eulero* è il luogo dei punti equidistanti da A' e da M_a, *è perpendicolare* ad $A'M_a$, cioè *alla mediana* AM_a *uscente da* A. Tale retta contiene inoltre il centro del circolo omonimo, e poichè questo passa per M_a, passerà pure per A', cioè pel punto medio di GA.

10. Per H_b conduciamo la parallela alla mediana m_a, ed essa incontri m_c in H_m: la H_bH_c è antiparallela a BC, per cui è $A\widehat{H_b}H_c = A\widehat{C}B$; ma è $H_b\widehat{H_m}M_c = A\widehat{G}M_c = \pi - A\widehat{G}C = A\widehat{C}B$ per cui $M_c\widehat{H_c}H_b = H_b\widehat{H_m}M_c$ e il quadrilatero $M_cH_cH_mH_b$ è inscrittibile. Ma i punti M_b, H_c, H_b appartengono alla circonferenza di Eulero, e quindi anche H_m appartiene a tale circonferenza.

Conducendo per H_c la parallela ad m_a e chiamando H'_m il punto nel quale essa incontra m_b, troviamo analogamente che H'_m appartiene alla circonferenza di Eulero: dunque

(15). Teorema 10. — *Le parallele alla mediana* m_a *condotte per* H_b, H_c *incontrano le mediane* m_b, m_c *in due punti appartenenti al circolo di Eulero.*

Corollario. — *Il quadrilatero* $H_bH_cH_mH'_m$ *è inscrittibile.*

11. Chiamiamo K_a la proiezione del punto di Lemoine K di ABC sul lato a: è [1]

$$KK_a = \frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2},$$

e siccome ABC è un triangolo D. L.

$$KK_a = \frac{2S}{3a}.$$

---

[1] Cfr. la mia *Recente Geometria del triangolo*, pag. 322, formule n. 262.

Proiettiamo analogamente G su a in G_a; è

$$GG_a = \frac{2S}{3a}$$

per cui in un triangolo D. L. è $KK_a = GG_a$. Dunque,

(16). Teorema 11. — *In un triangolo D. L. il segmento determinato dal baricentro e dal punto di Lemoine è parallelo al lato* BC.

Corollario 1. — *Se* G_b, G_c *sono le proiezioni di* G *sui lati* b *e* c *del triangolo D. L.* ABC *sui lati* b *e* c *è*

$$BC : CA : AB = \frac{1}{GG_a} : \frac{1}{GG_b} : \frac{1}{GG_c}.$$

Corollario 2. — *Se* K_b, K_c *sono le proiezioni del punto di Lemoine* K *del triangolo D. L.* ABC *sui lati* b *e* c, *è*

1° $K_aK_b : K_aK_c : K_bK_c = m_c : m_b : m_a$;

2° $K_aK_b : K_aK_c : K_bK_c = b : c : a$,

e quindi

3° $b : c : a = m_c : m_b : m_a$.

Si ha inoltre,

4° $\overline{KK_a}^2 + \overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2 = \frac{4S^2}{3a^2}$;

5° $bc = AK \,.\, \sqrt{3}$.

12. Osservazione. — *Nel caso particolare nel quale il triangolo D. L. è un triangolo isoscele* (b = c) *e nel caso egualmente particolare nel quale pel triangolo* ABC *è al tempo stesso* $2a^2 = b^2 + c^2$, $a = \frac{c^2}{b}$ *le parallele condotte per* G *ai lati* AB, AC *passano rispettivamente per uno dei punti di Brocard.*

III.

Costruzioni particolari.

1°. *Costruire il triangolo D. L. dati il lato* a = BC *e l'angolo opposto* α.

Sul segmento a costruisco un arco di circolo capace dell'angolo α: con centro in M_a, punto medio di a e raggio uguale ad $m_a = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ descrivo un secondo arco di circolo che interseca il primo (*Teorema 1*) in due punti A e A': i due triangoli BCA, BCA' sono i due possibili triangoli D. L.

2°. *Costruire il triangolo D. L. dati* a *ed* h_a.

A distanza h_a da a conduco la parallela: il circolo di centro M_a e raggio uguale ad $m_a = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ incontra tale parallela in due punti, o è tangente ad essa, o non segna su di essa nessun punto. Abbiamo nel primo caso due soluzioni del problema ($m_a > h_a$): nel secondo una sola ($m_a = h_a$); nel terzo nessuna ($m_a < h_a$).

3°. *Costruire il triangolo D. L. dati* h_a *ed* α.

1. Noti h_a ed α, è pur noto il valore $\frac{2h_a}{\tan \alpha} = a$. La costruzione si riconduce quindi a quella n. 1.

2. Si costruisca un triangolo isoscele $A_1B_1C_1$ il cui angolo al vertice sia uguale a 2α: su B_1C_1 si costruisca un arco di circolo capace dell'angolo α. Il circolo descritto con centro nel punto medio di B_1C_1 e con raggio uguale ad $\frac{1}{2} B_1C_1 \sqrt{3}$ interseca l'arco predetto in due, o in uno, o in nessun punto, dandoci due, od una, o nessuna soluzioni.

Sull'altezza A_1H_1 si pigli $H_1A = h_a$ e per A si conducano le parallele ad A_1B_1 e A_1C_1: esse determinano su B_1C_1 due punti B, C: il triangolo BCA è il domandato.

Osservazione. — È sempre possibile costruire il triangolo D. L. dati α ed un elemento lineare qualunque.

C. Alasia.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 701, 712 E 714

Non è stato tenuto conto delle risoluzioni pervenuteci dopo la data prescritta.

701. *Dimostrare che, se*

$$a + c = b + d,$$

l'espressione

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) - 4a^3bcd$$

si può mettere sotto la forma di un quadrato.

G. Pesci.

Soluzione dei sigg. **Cirillo, Lucaroni, Urbani** e **Maracci** (R. I. T. *Ancona*).

Sviluppando, l'espressione data si trasforma nell'altra

$$a^2c^2b^2 + a^2c^2d^2 + b^2d^2c^2 + b^2d^2a^2 + abcd\,(b^2 + c^2 + d^2 - 3a^2); \qquad (1)$$

ma, per ipotesi,

$$b + d = a + c, \qquad (2)$$

da cui

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2 + 2ac - 2bd$$

$$b^2 + c^2 + d^2 - 3a^2 = 2\,(ac - bd + c^2 - a^2);$$

e qnindi, sostituendo, la (1) diventa

$$a^2c^2\,(b^2 + d^2) + b^2d^2\,(c^2 + a^2) + 2abcd\,(ac - bd + c^2 - a^2),$$

ossia

$$a^2c^2\,(b^2 + d^2 + 2bd) + b^2d^2\,(c^2 + a^2 - 2ac) + 2abcd\,(c^2 - a^2),$$

ossia, ricordando nuovamente la (2),

$$a^2c^2\,(b + d)^2 + b^2d^2\,(c - a)^2 + 2bcd\,(b + d)\,(c - a),$$

ossia

$$[ac\,(b + d) + bd\,(c - a)]^2.$$

Soluzioni analoghe mandarono i sigg. **Belvedere** (R. I. T. *Messina*), **Terracini, Cernuschi, Brenta, Mosca** e **Vercellin** (R. I. T. *Torino*), **La Spina** e **Cutore** (R. I. T. *Catania*) **Naccarati** (R. L. *Benevento*) **Formato, Sosso, Cera** e **Solonia** (L. P. *Caserta*).

712. *Dimostrare che la somma delle distanze del centro del cerchio dei nove punti dai centri dei quattro cerchi tangenti ai lati di un triangolo è il triplo del diametro del cerchio circoscritto.*

C. Ciamberlini.

Risoluzione del sig. **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*.

È noto che il cerchio dei nove punti è tangente internamente al cerchio inscritto ed esternamente ai cerchi ex-inscritti; sappiamo pure che il suo raggio è metà di quello del cerchio circoscritto. Se denotiamo dunque con d, d_a, d_b, d_c le distanze di O_9 (centro del cerchio dei 9 punti) da I, I_a, I_b, I_c avremo:

$$d = \tfrac{1}{2}R - r; \qquad d_a = \tfrac{1}{2}R + r_a; \qquad d_b = \tfrac{1}{2}R + r_b; \qquad d_c = \tfrac{1}{2}R + r_c. \qquad (1)$$

Sommando membro a membro, e ricordando che

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R,$$

si ha

$$d + d_a + d_b + d_c = 6R.$$

Risoluzioni analoghe a questa sono quelle dei sigg. **Brenta e Cernuschi**, R. I. T. e **Vercellin** di *Torino*; **Cirillo, Maracci e Urbani**, R. I. T. di *Ancona*.

I sigg. **Cutore** e **La Spina**, hanno inviato due soluzioni identiche, nelle quali, invece delle (1), hanno scritto

$$d = \tfrac{1}{2}(R - r); \qquad d_a = \tfrac{1}{2}(R + r_a); \text{ ecc.}$$

In una seconda risoluzione del sig. Cutore si avverte un errore di segno nell'espressione del quadrato della distanza dell'incentro dell'ortocentro. [In questa seconda risoluzione, il sig. Cutore, basandosi su altre relazioni, dimostra le (1).]

Il sig. **Terracini**, in luogo della (1), scrive

$$d_a = \tfrac{1}{2}R - r_a; \qquad d_b = \tfrac{1}{2}R - r_b; \qquad d_c = \tfrac{1}{2}R - r_c.$$

Il sig. **Mosca**, per dimostrare le (1), indica con h il raggio del cerchio inscritto nel triangolo ortocentrico, e asserisce, senza dimostrarlo, che

$$\overline{IH}^2 = r^2 - R \,.\, h$$

(essendo I, H l'incentro e l'ortocentro del triangolo dato), mentre deve essere

$$\overline{IH}^2 = 2\,(r^2 - R \,.\, h).$$

C. Ciamberlini.

714. *A ciascuna estremità dei bracci di una leva di primo genere è sospeso mediante un filo di peso trascurabile, un corpo omogeneo, il quale viene a immergersi totalmente in un liquido. Trovare in qual rapporto debbono essere i due bracci affinchè la leva resti in equilibrio, supposto che l'un corpo sia una sfera di raggio* r *e di peso specifico* p, *e il liquido in cui è totalmente immerso abbia il peso specifico* P; *che l'altro corpo sia un cilindro rotondo di altezza* h, *di peso specifico* p′ *e l'area della sua superficie* totale *abbia il rapporto* k *con quella della sfera, e il liquido in cui trovasi totalmente immerso abbia il peso specifico* P′. *Discutere la formola di risoluzione.*

G. Garbieri.

Risoluzione del sig. **Vercellin** R. I. T. di *Torino*.

Siano v, v' i volumi della sfera e del cilindro e μ il rapporto richiesto: è

$$\mu = \frac{v'(p' - P')}{v(p - P)}. \qquad (a)$$

Si ha poi,

$$v = \tfrac{4}{3}\pi r^3,$$

e indicando con ρ il raggio del cilindro,

$$2\pi\rho^2 + 2\pi\rho h = 4k\pi r^2,$$

da cui ($\rho > 0$)

$$\rho = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 8kr^2}}{2},$$

sicchè

$$v' = \tfrac{1}{4}\pi h\left(-h + \sqrt{h^2 - 8kr^2}\right)^2$$

e la (a) ci dà,

$$\mu = \frac{3h\left(-h + \sqrt{h^2 + 8kr^2}\right)^2 (p' - P')}{16r^3(p - P)}.$$

Discussione. — È facile vedere che μ è sempre reale (poichè h, r, k positivi). Deve poi essere $\mu > 0$ (leva di 1° genere): ciò si ha in due modi: 1° se $p' > P'$;

$p > P$, ed allora sfera e cilindro, pescanti nel liquido, sono ancora soggetti alla gravità; 2° se $P' > p'$; $P > p$, ed allora sarebbe necessario supporre i liquidi al disopra della leva ed i corpi soggetti alla forza premente del liquido, contraria alla gravità. Se $p' = P'$, $p = P$, il μ è indeterminato e la leva è in equilibrio in ogni posizione: se $p' = P'$ e $p \neq P$, è $\mu = 0$; ed infine, se è $p' \neq P'$ e $p = P$, è $\mu = \infty$.

Le altre risoluzioni, che sono dei sigg. **Mosca, Costa, Bongini, Brenta** e **Cernuschi**, del R. I. T. di *Torino*; **Freguglia** e **Jodi** del R. I. T. di *Modena*; **La Spina** e **Cutore**, del R. I. T. di *Catania*; **Cera, Formato, Solonia** e **Sosso** L. di *Caserta*; **Chiesa, Marchisio** e **Casalasco**, L. di *Cuneo*; **Terracini**, L. e **De Angelis** dell'I. " Fornaris Marocco " di *Torino*; **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*; **Cellitti**, R. I. T. di *Caserta*; **Chiarugi, Castaldi, Reggio** e **Ghe** del R. I. T. di *Firenze*; **Boselli** del L. di *Roma*; **Urbani, Cirillo** e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*, sono pressochè identiche a quella del Vercellin, e solo ne differiscono in qualche dettaglio della breve discussione. Jodi fa opportunamente risultare quale dei tre generi di leva dovrebbe aversi nelle varie ipotesi possibili.

C. Alasia.

QUISTIONI DA RISOLVERE

731. Dato il sistema:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x + y + z = b, \qquad y^2 = xz,$$

determinare per a^2 e b coppie di valori tali che il sistema abbia soluzioni intere e positive, e trovare tali soluzioni.

Catania.

732. Risolvere le equazioni:

$$x(x-3a)^2 + a(3x-a)^2 = 0.$$
$$8(x-a)(x-3a)^2 + a(7x-9a)^2 = 0;$$
$$(x-a)(x-4a)^2 + a(3x-4a)^2 = 0.$$

E. N. Barisien.

733. Risolvere la seguente equazione:

$$\operatorname{tang} 2x = 8\cos^2 x - \operatorname{cotg} x.$$

U. Perelli.

734. Se sopra i lati di un triangolo qualunque ABC si costruiscono i triangoli equilateri BCA′, CAB′, ABC′, i tre segmenti AA′, BB′, CC′ sono eguali e s'incontrano in un punto O, dal quale i lati del triangolo sono visti sotto angoli eguali.

735. Tagliare una sfera con un piano in modo che il volume di uno dei segmenti sferici ottenuti abbia un rapporto dato K al cono inscritto nell'altro segmento. Discussione.

736. Essendo r, r' due rette ortogonali concorrenti in un punto O e P, Q due punti di r equidistanti da O e P′, Q′ due punti della r'

equidistanti da O trovare un punto M del piano tale che la somma delle distanze da P e Q sia eguale ad una lunghezza $2a$ e la somma delle distanze da P', Q', sia eguale ad una lunghezza $2a'$.

737. Risolvere l'equazione:

$$[x-(a^2+b^2)]^2+4a^2x(x+2b)=0.$$

K.

738. Dato un triangolo ABC condurre nel suo piano per il vertice C una retta r tale che il volume generato da ABC rotando attorno ad r sia eguale a quello di una sfera data.

739. È dato un poligono regolare P di n lati; i punti di mezzo dei suoi lati sono vertici di un altro poligono regolare P_1 di n lati; così proseguendo si possono formare successivamente dei poligoni regolari tali che ognuno di essi P_s abbia per vertici i punti di mezzo dei lati del precedente P_{s-1}. Si domanda la somma delle aree dei primi p di questi poligoni, ed il suo limite per p crescente all'infinito.

Caso in cui n è 3, 4, 5, 6, 8, 10.

740. Si sa che quando una sfera di raggio R si sposta con moto rettilineo uniforme con una velocità V sufficientemente piccola nell'aria, la resistenza opposta dall'attrito dell'aria a questo movimento è dato dalla formula $F=6\eta\pi RV$, η essendo un coefficiente che nel sistema c. g. s. ha per valore 0,00019.

Ciò posto, si consideri una nebbia che cada con una velocità uniforme di 1,15 cm. al secondo.

1°. Si domanda il diametro delle goccie che compongono la nebbia.

2°. Si dimostri che in questo movimento le goccie si scaldano, e si calcoli l'altezza da cui devono cadere perchè la goccia si scaldi di 0°,1.

Nota. — Si supporrà che tutto il calore prodotto sia impiegato a scaldare la goccia.

(Baccalaureato. Parigi, 1905).

N. B. — Le soluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 31 marzo 1906.

Si pregano vivamente i signori risolutori di *inviare ogni quistione o giuoco in foglio separato, scrivendo su ciascuno il proprio nome e l'istituto al quale essi appartengono.*

Le lettere non francate o insufficientemente francate vengono respinte.

ERRATA-CORRIGE.

Ai risolutori della 64ª quistione a concorso si aggiunga il sig. **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*. tralasciato per errore.

Ai risolutori delle quistioni 702, 704, 705 o 708 si aggiunga il sig. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*, anch'esso tralasciato per errore.

Ai nomi dei risolutori del giuoco 202 si aggiunga **Manzi**, L. P. di *Domodossola*; **D'Angelo** e **Marra**, R. Sc. delle Miniere di *Caltanissetta*.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 28 febbraio 1906

97-98. **Morselli E.** — *Etica* . . . . . L. 1 —
99-100. **Andreini A. L.** — *Problemi di geografia matematica elementarmente risoluti* . . . . . „ 1 —
101-102. **Martini Zuccagni A.** — *Guida pratica per la risoluzione degli esercizi di trigonometria* . . . . . „ 1 —
103. **Pinsero N.** — *Economia politica* . . . . . „ — 50
104. **Bizzarrini G.** — *Zoologia descrittiva con cenni comparativi* - I. Vertebrati . . . . . „ — 50
105. —— *Zoologia descrittiva con cenni comparativi.* - II. Tunicati, Molluschi, Artropodi, Vermi, Echinodermi, Celenterati, Poriferi, Protozoi. „ — 50
106. **Raffaele L.** — *Prima della grammatica latina.* Terza edizione . . „ — 50
107-108. **Morando G.** — *Etica* . . . . . „ 1 —
109-110. **Catania S.** — *Problemi di matematica dati agli esami di licenza d'istituto tecnico con le loro risoluzioni* . . . . . „ 1 —
111-112. **Roberti G.** — *Prontuario delle forme verbali omeriche* (con l'analisi e col significato) . . . . . „ 1 —
113-114. **Prato E.** — *Storia generale moderna* . . . . . „ 1 —
115. **Mascagni G.** — *Nozioni di agraria.* I. Agronomia . . . . . „ — 50
116. **Gustarelli A.** — *Stilistica latina* . . . . . „ — 50
117-118-119. **Bencivenni I.** — *Appunti di pedagogia e didattica.* Parte I. Studio sperimentale delle attività infantili applicato all'Educazione. „ 1 50
120. **Bonaventura A.** — *Elementi di estetica musicale* . . . . . „ — 50
121. **Vigo P.** — *Storia degli antichi popoli dell'Oriente* . . . . . „ — 50
122. **Bizzarrini G.** — *Botanica descrittiva con cenni comparativi.* - I. Fanerogame Angiosperme e Antosperme . . . . . „ — 50
123. **Vismara F.** — *Disegno storico della letteratura classica greca* . . „ — 50
124. **Levi E.** — *Esercizi di grammatica italiana.* - Parte I. Fonologia - Morfologia . . . . . „ — 50
125. —— *Esercizi di grammatica italiana.* - Parte II. Sintassi . . „ — 50
126. **Spezioli L.** — *Metodo razionale per lo studio dei verbi francesi* . „ — 50
127. **Pavani P.** — *Synonymes, homonymes et paronymes de la langue française.* „ — 50
128. **Todt B.** — *Piccolo vocabolario metodico della lingua greca.* Tradotto da Achille Cosattini. Seconda edizione . . . . . „ — 50
129. **Bizzarrini G.** — *Botanica descrittiva con cenni comparativi.* II. Fanerogame Gimnosperme, Protallogame, Briogame, Schistogame, Gimnogame . . . . . „ — 50
130-131. **Lochmann G.** — *Teoria della costruzione nella lingua tedesca* . „ 1 —
132-133. **Tarozzi G.** — *Teologia dantesca studiata nel Paradiso* . . „ 1 —
134-135. **Flamini G.** — *Avviamento allo studio della Divina Commedia.* . „ 1 —
136. **Capelli L. M.** — *Tavole riassuntive della Divina Commedia* . . „ — 50
137. **Belli M.** — *Esercizi greci.* - I. Morfologia . . . . . „ — 50
138. —— *Esercizi greci.* - II. Sintassi . . . . . „ — 50
139-140. **Krusekopf E.** — *Nomenclatura delle lingue tedesca e italiana* . „ 1 —

G. L. — Repertorio di matematiche e fisica elementari. Vol. in-64° elegantemente legato. Seconda edizione . . . . . L. 1 —

In questo libretto, di dimensioni piccolissime, si trovano raccolte tutte le formule di aritmetica, geometria, algebra, trigonometria piana e sferica, e fisica che si possono presentare nelle questioni che vengono proposte agli alunni delle scuole secondarie classiche e tecniche e nei complementi per i concorsi alla R. Accademia Militare di Torino e alla R. Accademia Navale di Livorno.

I sigg. associati al **Supplemento**, che acquisteranno, in una sola volta, tanti volumetti per l'importo di L. 5, li riceveranno franchi di spesa e avranno **gratis** un volumetto da L. 1 a loro scelta: quelli che ne acquisteranno per L. 2,50 uno da L. 0,50. Indirizzare le commissioni accompagnate dal relativo importo, all'editore **RAFFAELLO GIUSTI. — Livorno.**

BIBLIOTECA DEGLI STUDENTI

RIASSUNTI PER TUTTE LE MATERIE D'ESAME NEI LICEI, GINNASI, ISTITUTI TECNICI, ECC.

Non è questa una collezione di compiuti trattati scientifici, ma una raccolta di compendii, che possano giovare agli studenti sopra tutto per rinfrescare la memoria delle cose studiate e per mettere qualche ordine nelle cognizioni, ch'essi possano avere acquistate, ma per avventura (come non di rado ai giovani avviene, specialmente in tanta varietà di discipline da apprendere) un po' confusamente. Qui senza troppa minuzia di particolari, si cerca di presentare come in un disegno semplice e netto i contorni e i punti più rilevanti di ogni materia; e i nomi degli autori, tutti egregi insegnanti e pertanto ben esperti dell'insegnamento, ci dànno la più ferma sicurezza che la *Biblioteca degli Studenti* non fallirà al suo scopo.

Raccomandiamo, pertanto, specialmente alla gioventù studiosa, questa collezione che è insieme utilissima e sommamente economica e di cui sono usciti finora i volumetti seguenti:

1. **Luzzatto J.** — *Economia politica* (esaurito) . . . . . L. — —
2. **Grünhut M.** — *Lingua tedesca.* Terza edizione . . . . . „ — 50
3. **Tassinari G.** — *Guida ad esercizi pratici di chimica.* Terza edizione . „ — 50
4. **Boeri G. B.** — *Lingua inglese.* Seconda edizione . . . . . „ — 50
5. **Gatti G. M.** — *Grammaire et questionnaire suivis d'un mémento de littérature française.* Sesta edizione . . . . . „ — 50
6. **Angeli L.** — *Fisica* - Parte I. — Meccanica generale e speciale dei solidi e dei fluidi. - Azioni molecolari. - Calore e Meteorologia. 3ª ediz. „ — 50
7. **Errera A.** — *Scienza economica.* - Economia politica (esaurito) . . „ — —
8. **Tassinari G.** — *Ripetitorio di chimica.* Parte I. Terza edizione . . „ 1 —
9. —— *Ripetitorio di chimica.* Parte II. Terza edizione . . . . . „ — 50

10-10bis. **Cova G.** — *Ripetitorio di computisteria.* Terza edizione . . „ 1 —

11. **Angeli L.** — *Fisica* - Parte II. — Acustica. - Ottica. - Elettricità e Magnetismo. Seconda edizione . . . . . „ 1 —

12.-12bis. **Lucchetti P.** — *Mineralogia.* Parte I o generale. Seconda edizione. „ 1 —

13. **Billroth e Virchow.** — *Manuale di chirurgia.* - Parte I. — Patologia chirurgica e Terapia . . . . . „ 1 —
14. **Costantini G.** — *Sintassi latina.* Terza edizione . . . . . „ — 50
15. **Lattes G.** — *Storia della pedagogia.* Terza edizione . . . . . „ — 50
16. **Vicario G.** — *Elementi di scienza finanziaria* . . . . . „ — 50
17. **Grünhut M.** — *Tabelle riassuntive della grammatica tedesca.* 2ª edizione. „ — 50
18. **Giacomelli C.** — *Botanica generale e descrittiva in quadri sinottici* . „ 1 —
19. **Ghidiglia C.** — *I conti correnti ed i metodi di registrazione esposti secondo la teorica dei conti a valore* . . . . . „ 1 —
20. **Lucchetti P.** — *Mineralogia.* Parte II o descrittiva . . . . . „ 1 —
21. **Coccolo G. G.** — *Lingua spagnuola.* Seconda edizione . . . . . „ — 50
22. **Belli M.** — *Sintassi greca.* Terza edizione . . . . . „ — 50

23-24. —— *Morfologia greca.* Terza edizione . . . . . „ 1 —

25-26. **Neirotti G. B.** — *Geografia* . . . . . „ 1 —

27. **Belli M.** — *Elementi di prosodia latina.* Terza edizione . . . . „ — 50
28. **Cinquini A.** — *Il dialetto omerico.* Seconda edizione . . . . . „ — 50

(Segue in 2ª pagina).

ANNO IX — MARZO 1906 — FASC. V

CAMBRIDGE, MASS.

SUPPLEMENTO AL PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — **G. LAZZERI** *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1º luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al Periodico di Matematica

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1º novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Sopra alcune proprietà del triangolo. (R. VERCELLIN.)

68ª quistione a concorso.

Risoluzione della 65ª quistione a concorso.

Risoluzioni delle quistioni 707, 711, 719 e 730.

Quistioni da risolvere 741-750.

Copertina:

Spiegazione dei giuochi 243 e 246.

Spiegazione del 10º giuoco a concorso.

Giuochi proposti 254-257.

LIVORNO
RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE
LIBRAIO-TIPOGRAFO
1906

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, alla quale destiniamo tre pagine della copertina, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes**, a *Savona, Via Luigi Corsi-Villa Garroni.*

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 243 e 246.

243. *Trovare un numero di due cifre che sia eguale alla somma dei quadrati di dette cifre e del loro prodotto.*

S. Catania.

Risoluzione del sig. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina.*

Indicando con $10x+y$ il numero cercato, dovremo avere

$$10x+y=x^2+y^2+xy$$

da cui

$$x=\tfrac{1}{2}\left(10-y\pm\sqrt{-3y^2-16y+100}\right)$$

e quindi affinchè x sia reale è necessario che sia

$$3y^2+16y-100\leqq 0.$$

Poichè l'equazione

$$3y^2+16y-100=0$$

ha per radici

$$y_1=\frac{-8-\sqrt{364}}{3},\qquad y_2=\frac{-8+\sqrt{364}}{3};$$

dovrà essere

$$y_1<y<y_2$$

e poichè y inoltre deve essere intero e positivo, potrà assumere i soli valori 3, 2, 1 e 0.

Per $y=3$ si ha $x_1=6$ $x_2=1$
" $y=2$ x non ha alcun valore razionale
" $y=1$ si ha $x_1=9$ $x_2=0$
" $y=0$ " " $x_1=10$ $x_2=0$

e poichè $10x+y$ deve essere di due cifre le sole soluzioni sono date dai numeri **13, 63** e **91.**

Inviarono risoluzioni complete i sigg. **Abbrescia**, **Cariucci**, **Giardina** e **Priore**, R. I. T. di *Bari*; **Bongini**, **Brenta**, **Cerauschi** e **Galleano**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Cera**, **Formato**, **Sosso** e **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Cirillo**, R. I. T. di *Ancona*; **D'Angelo** e **Marra**, R. S. delle Miniere di *Caltanissetta*; **Fusco** di *Benevento.*

Inviarono risoluzioni incomplete i sigg. **Abate** e **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **Beltrami**, R. S. T. e **Cellini** di *Forlì*; **Belvederi**, R. L. Galvani di *Bologna*; **Costa**, **Levi** e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **Cristini**, R. I. T. di *Bari*; **De Bei** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **De Cardenas**, R. I. T. di *Livorno*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Fiachetti**, R. L. di *Cuneo*; **Gneme** di *Roma*; **Lattanzi**, R. I. T. di *Pesaro*; **Lucaroni** e **Maracci**, R. I. T. e **Miozzi**, R. L. di *Ancona*; **Manzi**, L. P. di *Domodossola*; sig.na **Montanari**, L. P. di *Ravenna*; **Orsaria** di *Varese*; **Passalacqua**, R. L. di *Voghera*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Renna** e **Ventola**, L. P. di *Bitonto*; **Serano**, R. I. T. di *Chieti*; **Zaglia** (?)

246. *" Quando sposai — diceva una donna ad un giovanotto — io avevo 24 e Lei era sempre un bambino, proprio com'è ora il mio Tonino, che ebbi due anni dopo il mio matrimonio ". " Eh! il tempo passa — rispondeva l'altro — e quando Tonino avrà l'età che ho io ora, io avrò l'età che ha ora Lei ". Ha capito il lettore quali età avevano donna, giovanotto e bambino?*

G. C.-L.

1ª **Risoluzione** del sig. **Gemelli**, R. I. T. di *Milano.*

La differenza d'età fra Tonino ed il giovanotto è uguale a quella fra il giovanotto e la donna; dunque quella fra Tonino e la madre equivale alla somma delle due differenze, e cioè sarà di 26 anni, essendo nato il figlio quando la madre aveva 26 anni.

Per conseguenza l'età del giovanotto, quando la donna si è sposata era di anni $24-\frac{1}{2}26$, cioè di 11 anni. Se Tonino ha 11 anni, cioè se 11 anni è l'età che aveva il giovanotto quando la donna si è sposata, questa avendo 26 anni più del figlio avrà ora 37 anni, ed il giovanotto avrà ora, anni $37-\frac{1}{2}26$ cioè 24 anni.

2ª **Risoluzione** del sig. **Galleano**, R. I. T. di *Torino.*

Indicando con x l'età di Tonino, quella della madre sarà $24+2+x$, cioè $26+x$ e, poichè quando la donna aveva 24 anni, l'età del giovanotto era x, avendo ora la donna $2+x$ anni di più, anche il giovanotto avrà $x+2+x$ anni, cioè $2x+2$ anni.

La differenza di età fra il giovanotto e Tonino sarà dunque $2x+2-x$, ossia $x+2$ e perciò sarà

$$(2a+2)+(x+2)=x+26$$

da cui si ha $x=11$ (età di Tonino). $11+26=37$ (età della donna). $2\times 11+2=24$ (età del giovanotto).

SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO

1. Un teorema assai semplice, ma molto notevole, quantunque così poco noto, che non so se sia mai stato osservato, è il seguente:

Se due coniugate isogonali rispetto all'angolo $\widehat{A}$ *d'un triangolo* ABC, *incontrano il lato opposto in* L'_a, L''_a, *si ha*

$$\frac{BL'_a \cdot BL''_a}{CL'_a \cdot CL''_a} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}. \tag{1}$$

Siano infatti P', P'' le proiezioni ortogonali di L'_a, L''_a su AC; Q', Q'' quelle degli stessi punti su AB. Si ha

$$\frac{BL'_a}{AB} = \frac{L'_aQ'}{AH_a}; \qquad \frac{CL'_a}{AC} = \frac{L'_aP'}{AH_a},$$

e queste, divise membro a membro porgono

$$\frac{BL'_a}{CL'_a} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{L'_aQ'}{L'_aP'}; \tag{2}$$

si ha analogamente

$$\frac{BL''_a}{CL''_a} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{L''_aQ''}{L''_aP''}. \tag{3}$$

Siccome, com'è facile vedere, si ha anche

$$\frac{L'_aQ'}{L'_aP'} = \frac{L''_aP''}{L''_aQ''},$$

moltiplicando fra loro membro a membro le (2), (3), si ricava la (1).

2. Da questa proprietà possiamo dedurne parecchie altre assai interessanti.

Osserviamo anzitutto che AB e AC sono coniugate isogonali rispetto all'angolo $L'_a\widehat{A}L''_a$ del triangolo $AL'_aL''_a$. E ciò, applicando la (1) al triangolo $AL'_aL''_a$, basta per asserire che

Se due coniugate isogonali rispetto all'angolo $\widehat{A}$ *d'un triangolo* ABC *incontrano il lato opposto in* L'_a, L''_a, *si ha*

$$\frac{BL'_a \cdot CL'_a}{BL''_a \cdot CL''_a} = \frac{\overline{AL'_a}^2}{\overline{AL''_a}^2}. \tag{4}$$

Dividendo membro a membro le (1), (4), e osservando la (4), si ricava facilmente la notevole relazione

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AL'_a}{AL''_a} : \frac{CL'_a}{BL''_a} = \frac{AL''_a}{AL'_a} : \frac{CL''_a}{BL'_a}, \tag{5}$$

dove è tenuto conto del solo valore assoluto dei segmenti. In parole abbiamo dunque il seguente

Teorema. — *In ogni triangolo un lato sta ad un altro come il rapporto di due coniugate isogonali, rispetto all'angolo compreso, sta a quello delle distanze dei piedi delle medesime dai vertici rispettivamente opposti a quei lati.*

3. È notevole il caso in cui

$$L'_a \equiv L''_a \equiv L_a .$$

Allora L_a è il piede della bisettrice (interna o esterna) dell'angolo $\widehat{A}$, e, pel teorema precedente, si ricava

$$AB : AC = BL_a : CL_a ,$$

che esprime la notissima proprietà delle bisettrici.

Indichiamo con M_a, M'_a i piedi della mediana e della simediana uscenti da A; è noto che AM_a e AM'_a sono coniugate isogonali. Posto adunque $L'_a \equiv M_a$, $L''_a = M'_a$, essendo $M_aB \equiv M_aC$, dalla (1) si ricava

$$\frac{BM'_a}{CM'_a} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}, \tag{7}$$

che esprime il noto teorema

Ogni lato d'un triangolo è diviso dal piede della simediana corrispondente in parti direttamente proporzionali ai quadrati dei lati adiacenti.

Dalla (5) si ricava

$$\frac{AM'_a}{AM_a} = \frac{2\,AB\,.\,CM'_a}{AC\,.\,BC}; \tag{8}$$

dalla (7), posto al solito $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$; $AM_a = m_a$; $AM'_a = m'_a$, si ha

$$BM'_a = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}; \qquad CM'_a = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}; \tag{9}$$

allora la (8) porge

$$\frac{m'_a}{m_a} = \frac{2bc}{b^2 + c^2}. \tag{10}$$

Quindi sarà

$$m'_a = \frac{bc\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}}{b^2 + c^2}. \tag{11}$$

Dalla (10) si ricava agevolmente

$$\frac{m_a + m'_a}{m_a - m'_a} = \frac{(b + c)^2}{(b - c)^2}. \tag{12}$$

4. Infine è opportuno notare che, applicando la (1), dai noti teoremi di Ceva e di Menelao e dai loro inversi, si ricava immediatamente:

Teorema. — *Se tre rette uscenti dai vertici d'un triangolo concorrono in un punto, anche le loro coniugate isogonali rispetto agli angoli del triangolo concorrono in un punto.*

Teorema. — *Se tre rette uscenti dai vertici d'un triangolo incontrano i lati opposti in punti allineati, anche le loro coniugate isogonali rispetto agli angoli del triangolo incontrano i lati opposti in punti allineati.*

E quindi risulta subito che " *Le tre altezze d'un triangolo concorrono in un punto* " poichè esse sono coniugate isogonali dei diametri del cerchio circoscritto, uscenti dai tre vertici.

Quindi ancora: " *Le simediane d'un triangolo concorrono in un punto* (Punto di Lemoine) ".

R. Vercellin.

68ª QUISTIONE A CONCORSO

Dimostrare che se un triangolo si muove in modo che due lati inviluppino rispettivamente due circonferenze, anche il terzo inviluppa una circonferenza. C. CIAMBERLINI.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 30 aprile 1906.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONE DELLA 65ª QUISTIONE A CONCORSO

Si domanda uno studio del triangolo notevole *in cui un angolo è doppio di un altro.*

Supposto $\beta = 2\gamma$, *si dimostrino in particolare le seguenti proprietà:*

1. *Fra i lati esiste la relazione* $ac = b^2 - c^2$. *È vera la proposizione reciproca.*
2. *Essendo* l_b *la bisettrice di* β *si ha* $b \,.\, l_b = ac$.
3. *La distanza del baricentro di* ABC *dalla altezza uscente da* A *è uguale ad* $\frac{1}{3}$ c.
4. *La circonferenza che passa pei punti* A, O, O′ *(essendo* O′ *il centro del circolo inscritto) ha il suo centro sul circolo circoscritto ad* ABC *ed ha il raggio eguale ad* AB.
5. *Si ha* $BO' = b - c$.
6. *Essendo* L_a, L_b, L_c *i punti d'incontro delle bisettrici coi lati opposti, e* T *il punto d'incontro di* BC *colla parallela ad* AC *per* O′, *i punti* L_a, T *sono isotomici.*
7. *Il circolo ex-inscritto interno all'angolo* α *tocca* BC *nel punto di mezzo del segmento che ha per estremi* C, L_a.
8. *Il circolo che passa per* B, C, O′ *taglia* AC *e* AB *in due punti* P, Q *in modo che il quadrilatero* BO′PC *è un trapezio isoscele in cui* $BO' = O'P = PC$. *Inoltre i punti* P, Q *sono allineati col punto* L_a *e* $PQ = BC$.
9. *Detto* R *il punto d'incontro di* PO′ *con* AB, *il segmento* PR *è eguale alla bisettrice di* β.
10. *La bisettrice di* α *è eguale al doppio della distanza di* A *dalla bisettrice di* γ.
11. *La distanza* CO′ *è il doppio della distanza di* B *dalla bisettrice di* α.
12. *Essendo* O'_a, O'_b, O'_c *i centri dei circoli ex-inscritti si ha* $O'O'_b = 2c$.
13. *Dedurre dalla proprietà precedente che il problema della trisezione di un angolo si riduce al seguente: " Condurre per un punto una retta tale che la parte intercetta fra due rette ortogonali abbia una lunghezza data ".*
14. *Il circolo che passa per* A, C, O′ *taglia* BA, BC *in due punti che sono in linea retta con* L_b *e la cui distanza è eguale al lato* AC.

G. DE LONGCHAMPS.

Sette giovani hanno preso parte a questo concorso, cioè i sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Terracini**, R. L. Cavour e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*; **Sosso**, L. P. di *Caserta*.

Tutti i lavori dànno prova evidente di studio, di cultura e di buone disposizioni. La risoluzione del sig. Terracini si distingue pel gran numero di proprietà osservate, anche se qualcuna poteva più rapidamente dedursi; quella del sig. Vercellin procede con semplicità ed eleganza; i lavori dei sigg. Sosso, Casalasco, Cutore e La Spina, hanno

il pregio, specialmente il primo, di aver ottenuto tutti i risultati richiesti, con semplici considerazioni di Geometria elementare.

Pur ritenendo di dovere in diverso grado, una parola d'elogio a tutti i concorrenti, credo che il premio debba assegnarsi al sig.

TERRACINI, R. L. Cavour di *Torino*.

E. NANNEI.

Risoluzione.

Sia ABC uno dei triangoli proposti; i quali indicheremo col simbolo B*d*C; e supponiamo che sia $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Indicheremo con L_a, L_b, L_c gli estremi delle bisettrici sui lati opposti ai vertici donde escono; con M_a, M_b, M_c i punti medi dei lati; con H_a, H_b, H_c i piedi delle altezze; con a, b, c le misure dei lati e talora i lati stessi; con l_a, l_b, l_c le misure delle bisettrici ecc.; G, K indicano il baricentro e il punto di Lemoine. Intenderemo colla parola *base* d'indicare il lato $BC = a$; e rispettivamente con *lato maggiore* e *minore* i lati $AC = b$ e $AB = c$.

Il lettore è pregato di far la figura.

I numeri fra parentesi corrispondono a quelli dell'enunciato.

1. (1) Dai triangoli simili ABC, ACL_b si ha

$$\overline{AL_b} : \overline{AB} :: \overline{AB} : \overline{AC} \qquad \overline{BL_b} : \overline{BC} :: \overline{AB} : \overline{AC};$$

dalla prima si deduce $AL_b = \frac{c^2}{b}$ e dalla seconda $BL_b = \frac{ac}{b}$. E poichè, per una nota proprietà della bisettrice è $\overline{BL_b}^2 = \overline{BC} . \overline{AB} - \overline{AL_b} . \overline{CL_b}$, sostituendo, si ha

$$\frac{a^2c^2}{b^2} = ac - \frac{ac^2}{b^2}$$

da cui $ac = b^2 - c^2$.

Viceversa, se è $ac = b^2 - c^2$, ossia $a + c = \frac{b^2}{c}$, costruita la bisettrice BL_b e avendosi $a : c :: \overline{CL_b} : \overline{AL_b}$ e, componendo: $a + c : c :: b : AL_b$, si deduce

$$\frac{b^2}{c} : c :: b : \overline{AL_b} \qquad \text{ossia} \qquad b : c :: c : \overline{AL_b};$$

il che prova che i triangoli ABC, ABL_b sono simili e quindi $A\widehat{B}L_b = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = 2\widehat{C}$.

COROLLARI. — 1°. *In ogni triangolo* BdC *la bisettrice di* B *divide il triangolo in due triangoli, uno isoscele, l'altro simile al dato.*

2°. *In ogni triangolo* BdC *la differenza dei lati è quarta proporzionale dopo la loro somma la base e il lato minore.*

3°. *La differenza fra i quadrati delle proiezioni dei lati sulla base è equivalente al rettangolo della base e del lato minore.*

4°. *La somma dei due lati sta al perimetro come il lato maggiore sta al minore.*

5°. (2) *Avendosi* $BL_b = l_b = \frac{ac}{b}$ *si deduce* $bl_b = ac$.

6°. *In ogni triangolo* BdC *si ha* $b = 2c\cos C$ *e* $a = c(4\cos^2 C - 1)$ *da cui* $\cos C < \frac{1}{4}$ *e quindi* $C < 60°$.

2. *In ogni triangolo* BdC *la proiezione della mediana relativa alla base è metà del lato minore.*

È noto difatti che $\overline{M_aH_a} = \frac{b^2 - c^2}{2a}$; e poichè $b^2 - c^2 = ac$, si deduce $\overline{M_aH_a} = \frac{1}{4}c$.

COROLLARI. — 1°. (3) Se G è il baricentro e $\overline{GN}$ la sua distanza dall'altezza AH_a, si ha subito $\overline{GN} = \frac{1}{3} M_aH_a$ e perciò $GN = \frac{1}{4}c$; cioè: *In ogni triangolo* BdC *la distanza del baricentro dell'altezza uscente da* A *è un terzo del lato minore.*

2°. Essendo $\overline{BH_a} = \pm (\overline{BM_a} - \overline{M_aH_a})$ secondo che l'angolo B è acuto o ottuso e $\overline{CH_a} = \overline{CM_a} + \overline{M_aH_a}$ si deduce in ogni caso: $\overline{BH_a} = \pm \frac{a - c}{2}$; $CH_a = \frac{a + c}{2}$;

cioè: *In ogni triangolo* BdC *le proiezioni dei lati sulla base sono rispettivamente uguali alla semisomma o alla semidifferenza della base e del lato minore.*

3°. *Si ha pure*

$$a + c = 2b \cos C \qquad c = CH_a \pm BH_a$$

secondo che B *è acuto o ottuso; e anche:*

$$4 \,.\, \overline{BH_a\, CH_a} = a^2 - c^2$$

$$\overline{BH_a\, CH_a} = \frac{b \,.\, \overline{M_b H_b}}{2}.$$

3. (4) Per qualunque triangolo si ha che il circolo ACO′ ha il suo centro sul circolo circoscritto.

Se poi il triangolo è un tr. B*d*C e B′ è questo centro, i due triangoli B′CB, ACB sono eguali per avere un lato comune e gli angoli eguali; perciò è

$$\overline{B'C} = \overline{B'O'} = \overline{AB} = c.$$

Ossia:

In ogni triangolo BdC, *il circolo che passa per gli estremi del lato maggiore e per l'incentro ha il suo centro sul circumcerchio del tr. dato, e il suo raggio è eguale al lato minore.*

Corollari. — 1°. *Ricordando che in qualunque triangolo* ABC, *si ha, indicando con* R *il raggio del circolo circoscritto e con* h_a *l'altezza uscente da* A,

$$\overline{AB \,.\, AC} = 2R \,.\, h_a$$

nel nostro caso, considerando il triangolo AO′C *si ha:*

$$\overline{AO' \,.\, CO'} = 2cr.$$

2°. *Il quadrangolo* ABCB′ *è un trapezio isoscele, e perciò* $\overline{BB'} = \overline{AC}$.

4. Se dall'incentro O′ si costruisce RP parallela a BC, si vede subito che i triangoli AO′B, AO′P sono eguali, e perciò:

1° $\overline{AP} = c$;

2° BP è bisettrice dell'angolo O′BC;

3° (5) $\overline{BO'} = \overline{O'P} = \overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP} = b - c$ (anche $\overline{BO'} = \overline{BB'} - \overline{O'B} = b - c$);

4° BO′PC è un trapezio isoscele, e $O'CL_aP$ è un rombo;

5° i triangoli AL_aB, AL_aP sono eguali, e $O'BL_aP$ è un rombo;

6° (6) si ha $\overline{BL_a} = \overline{O'P} = \overline{TC}$ essendo T il punto d'incontro con BC della parallela ad AC condotta da O′; quindi L_a e T sono isotomici sulla base BC;

7° anche O′TCP è un rombo.

5. (7) Se O'_a è il centro del circolo ex-inscritto interno all'angolo α, si consideri il triangolo O'_aCL_a e si ha subito

$$O'_a\widehat{L_a}C = \tfrac{1}{2}\alpha + \gamma \qquad \text{e} \qquad O'_a\widehat{C}L_a = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Ma essendo $\alpha + 3\gamma = 180^\circ$ ossia $90^\circ = \frac{1}{2}(\alpha + 3\gamma)$ si deduce che

$$O'_a\widehat{C}L_a = \tfrac{1}{2}\alpha + \gamma \qquad \text{cioè} \qquad O'_a\widehat{L_a}C = O'_a\widehat{C}L_a;$$

quindi il triangolo considerato è isoscele, e il punto medio di $\overline{C4_a}$ è il punto di contatto del circolo ex-inscritto con BC.

6. (8) Si ha (4, 4°) $B\widehat{P}C = B\widehat{O'}C$, quindi P appartiene al circolo BO′C. Abbiamo già veduto che BO′PC è un trapezio isoscele e che $\overline{BO'} = \overline{O'P} = \overline{PC} = b - c$.

Se si prolunga PL_a fino ad incontrare AB nel punto Q, si ha $B\widehat{Q}P = \gamma = B\widehat{C}P$; quindi Q appartiene al circolo BO′C, ed è allineato con P e L_a.

Oppure: essendo eguali i triangoli AQP, ABC, si ha $\overline{AQ} = b$; $\overline{QP} = a$; ed avendosi

$$\frac{\overline{L_aB}}{\overline{L_aC}} = \frac{c}{b}; \qquad \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{b-c}{a}; \qquad \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{b}{b-c},$$

si deduce

$$\frac{\overline{L_aB}\,.\,\overline{PC}\,.\,\overline{QA}}{\overline{L_aC}\,.\,\overline{PA}\,.\,\overline{QB}} = 1,$$

il che prova che P, L_a, Q sono su una medesima retta.

7. (9) Se R è il punto d'incontro di O'P con AB, i triangoli isosceli RQP, L_bBC sono eguali. E perciò $\overline{PR} = \overline{BL_b} = l_b$. È anche $\overline{RQ} = l_b$.

8. (10) Se si costruisce AU perpendicolare a l_c ed è D il punto in cui incontra BC, il triangolo ADC è isoscele, quindi $\overline{AD} = 2\overline{AU}$. Ma anche il triangolo ADL_a è isoscele perchè è $\widehat{ADL_a} = \widehat{AL_aD} = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$, e perciò $AL_a = l_a = 2\overline{AU}$.

9. (11) Essendo $O'BL_aP$ un rombo (4, 4°) è BV perpendicolare a AL_a e si ha

$$\overline{BV} = \tfrac{1}{2}\,\overline{BP} = \tfrac{1}{2}\,\overline{CO'} \qquad \text{ossia} \qquad \overline{CO'} = 2\,\overline{BV}.$$

10. (12) I triangoli rettangoli ABV, $O'O'_bC$ sono simili e perciò

$$\overline{AB} : \overline{OO'_b} = \overline{BV} : \overline{CO'};$$

ma è $\overline{CO'} = 2\,\overline{BV}$, è dunque $\overline{OO'_b} = 2\,\overline{AB} = l_c$.

11. (13) Se è dato un angolo α da dividere in tre parti eguali, si costruisca il supplementare $180^0 - \alpha$, e su uno dei suoi lati si prenda un segmento $\overline{AB} = c$ arbitrario a partire dal vertice A. Si costruiscano le bisettrici dei due angoli supplementari; i due punti O' e O'_b debbono trovarsi su queste due rette e allineati con B, e dev'essere $OO'_b = 2c$. Se si suppone dunque di poter costruire dal punto B una retta in modo che la parte di essa compresa fra le due bisettrici sia eguale al segmento $2c$, avremo che l'angolo ABO sarà la terza parte dell'angolo dato. Difatti costruendo $\widehat{O'BC} = \widehat{ABO'}$, si ha il triangolo ABC, in cui è $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$; di cui O' è l'incentro e O'_b l'ex-centro interno all'angolo B. E avendosi

$$\widehat{B} = 2\,\widehat{C} \qquad \text{e} \qquad \widehat{B} + \widehat{C} = 3\,\widehat{C} = 180 - (180^0 - \alpha),$$

si deduce $3\,\widehat{C} = \alpha$ e perciò $\widehat{C} = \widehat{ABO'} = \frac{1}{3}\,\alpha$.

12. (14) Se M ed N sono i punti in cui il circolo AO'C incontra rispettivamente i lati BA e BC, si ha $\overline{B'N} = \overline{B'C}$. Di più i triangoli B'MB, B'CB sono eguali e perciò sono anche eguali i triangoli MBN e ABC; ed è $\overline{MN} = \overline{AC}$. Ed essendo $\widehat{ML_bB} = \widehat{CL_bB}$ e $\widehat{AL_bB} = \widehat{BL_bN}$, sottraendo, si deduce $\widehat{AL_bM} = \widehat{NL_bC}$, il che prova che i punti M, L_b, N sono su una medesima retta.

13. Il sig. Vercellin osserva che il triangolo BO'C è un triangolo B*d*C; e si può da questo dedurre altre notevoli proprietà. Per es.: Se I_a è la proiezione di O' su BC si ha

$$\overline{I_aM_a} = \tfrac{1}{2}\,\overline{BO'};$$

$$2\,\overline{BI_a} = \overline{BC} - \overline{BO'}; \qquad 2\,\overline{CI_a} = \overline{BC} + \overline{BO'};$$

$$\overline{CO'}^2 = (b - c)\,(a + b - c).$$

Sono facili poi a dedursi le seguenti formule, dove h_a, R, r, S ecc., hanno i soliti significati

$$h_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a + c)(3c - a)}; \qquad S = a\sqrt{(a + c)(3c - a)};$$

$$R = \frac{bc}{4\sqrt{(a + c)(3c - a)}}; \qquad \cos\gamma = \frac{a + c}{2b}.$$

14. Dal § 10, il sig. Terracini deduce:

1° $\overline{BO'_b} = \overline{BO'} + \overline{O'O'_b} = b - c + 2c = b + c$;

2° $\overline{BO'}\,.\,\overline{BO'_b} = (b - c)\,(b + c) = b^2 - c^2 = ac$.

Lo stesso sig. Terracini osserva ancora le seguenti proprietà, di cui per ragioni di spazio, omettiamo la dimostrazione:

1° se in un triangolo è $2\gamma - \beta = 90°$, il suo triangolo ottico è un triangolo B*d*C. In qualunque triangolo B*d*C si ha:

2° $c^2 = R(r_b - r)$;

3° $\overline{BO'_b} = c$;

4° se AR′ è la essimediana uscente da A e R′ il punto in cui essa incontra la retta BC, si ha

$$\overline{BR'} = c; \qquad \overline{AR'} = b; \qquad \overline{CR'} = \frac{b^2}{c};$$

5° $\overline{BL_a} = b - c$; $\overline{BL'_a} = b + c$ (L′$_a$ è il punto d'incontro di BC colla bisettrice esterna dell'angolo opposto);

6° se D, D′, E, E′, F, F′ sono i punti in cui il primo circolo di Lemoine incontra rispettivamente i lati BC, AC, AB si ha

$$\frac{\overline{AF} - \overline{FF'}}{\overline{BF'}} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{\overline{CD'} - \overline{BD}}{\overline{DD'}} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{\overline{EE'} - \overline{AE}}{CE} = \frac{c}{a};$$

7° se $\overline{AR}$ è la mediana relativa al lato BC, si ha

$$\frac{\overline{CR} - \overline{BR}}{\overline{BR}} = \frac{a}{c};$$

8° se r_a, r_b, r_c indicano i raggi degli ex-cerchi, si ha pure

$$(b - c)^2 = (r_a - r)(r_c - r);$$

9° se $\overline{KK_a}$, $\overline{KK_b}$, $\overline{KK_c}$ sono le distanze del punto di Lemoine dei lati si ha

$$\overline{KK_a} \,.\, \overline{KK_c} = \overline{KK_b}^2 - \overline{KK_c}^2.$$

E analogamente si dedurrebbero tante altre proprietà, dalle note formule della Geometria del triangolo, tenendo conto della relazione caratteristica $ac = b^2 - c^2$ dei triangoli B*d*C.

E. Nannei.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 707, 711, 719 E 730

Non è stato tenuto conto delle risoluzioni pervenuteci dopo la data prescritta.

707. *Dimostrare che se i valori* a, b, c; a′, b′, c′ *dei lati di due triangoli soddisfano alle due relazioni*

$$(m^2 + n^2 + p^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ma + nb + pc)^2, \qquad (1)$$
$$(m^2 + n^2 + p^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = (ma' + nb' + pc')^2, \qquad (2)$$

dove m, n, p, *sono numeri positivi, i due triangoli sono simili.*

C. Ciamberlini.

Risoluzione sostanzialmente analoga dei sigg. **Cirillo, Lucaroni, Maracci** e **Urbani** del R. I. T. di *Ancona*; **Brenta, Cernuschi, Galleano, Mosca** e **Terracini**, del R. I. T. di *Torino*; **Algranati** del R. L. di *Livorno*; **Cutore** e **La Spina** del R. I. T. di *Catania*; **De Bei** e **Scopinich** del R. I. T. di *Venezia*; **Naccarati** del R. L. di *Benevento*; **Salonia** dell'I. T. P. di *Caserta*.

La relazione (1) si può anche scrivere

$$(an - bm)^2 + (cm - ap)^2 + (cn - bp)^2 = 0$$

da cui

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}, \qquad \frac{c}{a}=\frac{p}{m}, \qquad \frac{b}{c}=\frac{n}{p}. \tag{3}$$

Analogamente dalla (2) si deduce

$$\frac{a'}{b'}=\frac{m}{n}, \qquad \frac{c'}{a'}=\frac{p}{m}, \qquad \frac{b'}{c'}=\frac{n}{p}, \tag{4}$$

e dalle (3) e (4) si ottiene subito

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},$$

e ciò dimostra la proposizione.

711. *I centri delle faccie di un poliedro regolare sono vertici di un secondo poliedro regolare; determinare il rapporto dei volumi dei due solidi.*

G. Loria.

Risoluzione del sig. **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*.

È noto che ogni poliedro regolare (P) è inscrittibile a una sfera Σ, e circoscrittibile ad un'altra Σ' concentrica. I centri delle faccie di (P) sono i punti di contatto delle faccie medesime colla sfera inscritta, ed anche i poli di tali piani rispetto alla sfera stessa. Ne segue che i punti di contatto con Σ' delle faccie concorrenti in un vertice A di (P) sono in un piano, cioè nel piano polare di A rispetto a Σ', e formano un poligono regolare di s lati, se s spigoli concorrono in A. I piani polari degli n vertici di una faccia di (P) si tagliano nel polo del piano di quella faccia, cioè nel suo punto di contatto con Σ', e formano un angoloide regolare n-spigolo. I centri delle faccie di (P) sono dunque i vertici di un altro poliedro regolare (P') che ha vertici e faccie in numero rispettivamente uguale a quello delle faccie e dei vertici di (P).

Il poliedro (P) abbia F faccie: denotiamo, come sopra, con n il numero dei lati d'ogni faccia f, con s il numero degli spigoli concorrenti in ogni vertice; con δ la misura di ogni suo diedro, con l la lunghezza di una costola, con r e con a infine il raggio e l'apotema di f.

Dalla relazione nota

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\delta=\frac{\cos\frac{\pi}{s}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} \quad (^1)$$

si ricava con facile calcolo:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta=\frac{\cos\frac{\pi}{s}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}-\cos^2\frac{\pi}{s}}}=\frac{\cos\frac{\pi}{s}}{\omega},$$

$$\left(\text{ponendo per brevità } \omega=\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}-\cos^2\frac{\pi}{s}}=\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{s}-\cos^2\frac{\pi}{n}}\right).$$

E si ha pure:

$$l=2r\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}, \qquad a=r\cos\frac{\pi}{n}.$$

Consideriamo una faccia $f=$ ABCD... del poliedro; sia Ω il centro della sfera

(1) V. per es. Schlömilch trad. Gambioli e Bernardi, III, pag. 249, dov'è, però, da correggersi un errore di stampa.

circoscritta, O il centro di f, M il punto di mezzo dello spigolo AB; l'angolo ΩMO, metà del rettilineo del diedro di spigolo AB, è uguale a $\frac{1}{2}\delta$: onde

$$\rho = \Omega O = OM \,.\, \mathrm{tg} \,.\, \widehat{\Omega MO} = a \,\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}\delta = \frac{r \cos\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{s}}{\omega} \tag{1}$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{\rho^2 + r^2} =$$

$$= \frac{r\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{s} + \mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{s}}}{\omega} = \frac{r\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{n}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{s}}{\omega}. \tag{2}$$

Ciò posto, poichè l'area di una faccia è espressa da

$$\tfrac{1}{2}\, nla = nr^2 \,\mathrm{sen}\frac{\pi}{n} \cos\frac{\pi}{n} = \frac{nr^2}{2}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}$$

il volume del poliedro sarà

$$P = \frac{Fn}{6}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n} \,.\, r^2\rho.$$

Sapendo che nel poliedro (P′) $n' = s$, $F' = \frac{Fn}{s}$ numero dei vertici di (P), $r' = \frac{r\rho}{R}$, $\rho' = \frac{\rho^2}{R}$ (per la evidente similitudine dei triangoli OO′Ω, AOΩ), si ha la formula analoga

$$P' = \frac{Fn}{6}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{s} \cdot \frac{r^2\rho^4}{R^3}$$

(che si può ricavare dalla precedente colle opportune sostituzioni); onde

$$\frac{P}{P'} = \frac{\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}}{\mathrm{sen}\frac{2\pi}{s}} \cdot \frac{R^3}{\rho^3}.$$

E sostituendo a R, ρ i valori (1), (2)

$$\frac{P}{P'} = \frac{\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}}{\mathrm{sen}\frac{2\pi}{s}}\,\mathrm{tg}^3\frac{\pi}{n}\,\mathrm{tg}^3\frac{\pi}{s} = \frac{\mathrm{sen}^4\frac{\pi}{n}\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{s}}{\cos^2\frac{\pi}{n}\cos^4\frac{\pi}{s}}.$$

Avendosi rispettivamente pei cinque poliedri regolari di Platone:

$$\begin{array}{lllll} n = 3, & 4, & 3, & 5, & 3 \\ s = 3, & 3, & 4, & 3, & 5 \end{array}$$

si avrà rispettivamente:
per il tetraedro

$$\frac{P}{P'} = \frac{\mathrm{sen}^4\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{3}\pi}{\cos^2\frac{1}{3}\pi\cos^4\frac{1}{3}\pi} = \mathrm{tg}^6\tfrac{1}{3}\pi = (\sqrt{3})^6 = 27;$$

per l'esaedro

$$\frac{P}{P'} = \frac{\mathrm{sen}^4\frac{1}{4}\pi\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{3}\pi}{\cos^2\frac{1}{4}\pi\cos^2\frac{1}{3}\pi} = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}{(\frac{1}{2})^4} = 6;$$

per l'ottaedro

$$\frac{P}{P'} = \frac{\mathrm{sen}^4\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{4}\pi}{\cos^2\frac{1}{3}\pi\cos^4\frac{1}{4}\pi} = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{3})^4}{(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \frac{9}{2};$$

per il dodecaedro

$$\frac{P}{P'} = \frac{\operatorname{sen}^4 \frac{1}{5}\pi \operatorname{sen}^2 \frac{1}{5}\pi}{\cos^2 \frac{1}{5}\pi \cos^4 \frac{1}{5}\pi} = \frac{\left(\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{1}{16}\left(\sqrt{5}+1\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{15\left(7-3\sqrt{5}\right)}{2};$$

per l'icosaedro

$$\frac{P}{P'} = \frac{\operatorname{sen}^4 \frac{1}{5}\pi \operatorname{sen}^2 \frac{1}{5}\pi}{\cos^2 \frac{1}{5}\pi \cos^4 \frac{1}{5}\pi} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)\right]^4} = \frac{9\left(25-11\sqrt{5}\right)}{2}.$$

Il sig. **Vercellin** ha espresso i volumi dei poliedri regolari in funzione del raggio della sfera inscritta e di quella circoscritta; e osservando che la sfera inscritta in un poliedro dato è quella circoscritta al poliedro che ha per vertici i centri delle faccie del primo, determina il rapporto pei primi tre poliedri. Anche al caso dei primi tre poliedri si sono limitati i sigg. **Maracci** (R. I. T. di *Ancona*), **Casalasco** (R. L. di *Cuneo*); e al solo caso del cubo i sigg. **Cirillo** (R. I. T. di *Ancona*), **Castaldi** e **Reggio** (R. I. T. di *Firenze*). Sono solo in parte inesatte le risoluzioni dei sigg. **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa**, **Levi** e **Mosca** (R. I. T. *Torino*), **Cera**, **Formato**, **Salonia** e **Sosso** (L. P. di *Caserta*). Sono errate quelle dei sigg. **Cutore** e **La Spina** (R. I. T. di *Catania*.)

E. Nannei.

719. *Dimostrare che la funzione*

$$\frac{1+\operatorname{sen}^2(x+h)}{1-\operatorname{sen}^2(x+h)} \times \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

dove h *è un arco costante, compreso fra* 0 *e* $\frac{1}{2}\pi$, *cresce quando* x *cresce da* $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - h)$ *a* $\frac{1}{2}(\pi - h)$.

G. Pesci.

Dimostrazione I, del sig. **Vercellin**, R. I. T. *Torino*.

Supposto che si sappia che una funzione cresce, se la sua derivata (nell'intervallo che si considera) è positiva, si trova, con ingegnosi artifizî elementari, la derivata della espressione data, sotto la forma

$$\frac{2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - 2 \cos x \cos(2x+h) + \cos^2(x+h)}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2(x+h)};$$

e poi si dimostra che questa è positiva, osservando che, nell'intervallo stabilito, $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} h$ e $\cos(x+h)$ sono sempre positivi, mentre $\cos x \cos(2x+h)$ è sempre negativo.

Data però l'indole di questo periodico, la dimostrazione richiesta non doveva essere basata sopra un teorema di *Calcolo infinitesimale*.

Dimostrazione II, del sig. **Casalasco**, o del sig. **Chiesa**, R. L. *Cuneo*).

L'espressione data si trasforma facilmente nell'altra

$$\frac{1+2\tan^2(x+h)}{\tan x}, \tag{1}$$

il cui valore, fra i limiti stabiliti, è certamente maggiore del valore dell'altra

$$\frac{1+2\tan^2(x+h)}{\tan(x+h)}. \tag{2}$$

Diasi ora ad $x+h$ un aumento arbitrario δ, tale però che $x+h+\delta$ non superi $\frac{1}{2}\pi$, si vuol dimostrare che la (2) cresce. Per ciò, se si pone

$$\tan(x+h+\delta) = \tan(x+h) + \varepsilon,$$

si ha

$$\frac{1+2\tan^2(x+h+\delta)}{\tan(x+h+\delta)}=\frac{1+2\tan^2(x+h)}{\tan(x+h)}+\varepsilon\left\{2-\frac{1}{\tan(x+h)\tan(x+h+\delta)}\right\}$$

quindi, per dimostrare che la (2) cresce, basta dimostrare che

$$\frac{1}{\tan(x+h)\tan(x+h+\delta)}<2;$$

e questa è evidente, perchè, sempre fra i limiti stabiliti,

$$\tan(x+h)>1 \qquad (3) \qquad \text{e} \qquad \tan(x+h+\delta)>1. \qquad (4)$$

Supposto che questa dimostrazione fosse esatta, non sarebbe completa, perchè varrebbe fra $\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}h$ e $\frac{1}{2}\pi$, e non fra $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}h$ e $\frac{1}{2}\pi-h$; ma non è neppure esatta, perchè vi si ammette che, essendo il valore della (1) maggiore del valore della (2), quando il secondo cresce debba crescere anche il primo; e questo non sempre è vero. Così, per esempio, si sa che fra 0 e $\frac{1}{2}\pi$ (l'estremo superiore esclusa)

$$\csc x>\operatorname{sen} x;$$

ora, nello stesso intervallo, mentre il seno cresce sempre, la cosecante cala sempre.

Dimostrazione III, pure del sig. **Casalasco**, o del sig. **Chiesa**.

Con successive trasformazioni, alquanto laboriose, l'espressione data si trasforma nell'altra

$$\frac{1+2\tan^2 x}{\tan x}+\frac{2\operatorname{sen} h}{\cos x\cos(x+h)}\left\{2+\frac{2\operatorname{sen} h}{\operatorname{sen}(2x+h)-\operatorname{sen} h}\right\}, \qquad (5)$$

poscia si osserva che al crescere di x, fra i limiti stabiliti, $\cos x\cos(x+h)$ e $\operatorname{sen}(2x+h)$ calano, mentre $\frac{1+2\tan^2 x}{\tan x}$ cresce, quindi il valore della (5) cresce.

Perchè questa dimostrazione fosse completa, bisognerebbe, prima di tutto, ripetere tutto il ragionamento che si è fatto sulla (2), per dimostrare che $\frac{1+2\tan^2 x}{\tan x}$ cresce; e neppure così si raggiungerebbe lo scopo, perchè, essendo ora $h=0$, la (3) non sarebbe vera in tutto l'intervallo stabilito.

Dimostrazione IV, del sig. **Pelosio**, o del sig. **Scopinich** (R. I. T. *Venezia*).

Attribuendo ad x il suo valore minimo $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}h$, l'espressione data si riduce facilmente all'altra

$$\frac{3+\operatorname{sen} h}{1-\operatorname{sen} h}\operatorname{ctn}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}h\right); \qquad (6)$$

dando poscia ad x un valore compreso fra $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}h$ e $\frac{1}{2}\pi-h$, per esempio $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}h$, si ha invece l'altra

$$\frac{3+\operatorname{sen}\frac{4}{3}h}{3-\operatorname{sen}\frac{4}{3}h}\operatorname{ctn}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}h\right). \qquad (7)$$

Ora, fra i limiti indicati, si ha certamente

$$\operatorname{sen}\tfrac{4}{3}h>\operatorname{sen} h, \qquad (8) \qquad \operatorname{ctn}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{4}{3}\right)>\operatorname{ctn}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}h\right), \qquad (9)$$

quindi il valore della (7) è maggiore del valore della (6).

Prima di tutto se questa dimostrazione fosse esatta, non sarebbe generale; ma poi è errata, perchè, se $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}h$ è compreso fra $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}h$, e $\frac{1}{2}\pi - h$, non può esser vera la (9).

Concludendo: la prima dimostrazione non è elementare e tutte le altre sono, più o meno, sbagliate. Mentre una dimostrazione elementare poteva, per esempio, essere la seguente.

Si osservi che l'espressione data si può scomporre nei tre fattori

$$1 + \operatorname{sen}^2(x+h),$$

$$\frac{\cos x}{\cos(x+h)} = \frac{1}{\cos h - \tan x \operatorname{sen} h},$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos(x+h)} = \frac{2}{\operatorname{sen}(2x+h) - \operatorname{sen} h};$$

e che, al crescere di x fra i limiti indicati, ognuno di questi fattori è sempre positivo e cresce sempre.

G. Pesci.

730. *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos^3 \alpha}{\cos x} = 1.$$

E.-N. Barisien.

1ª Risoluzione dei sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*, alquanto semplificata.

L'equazione proposta si può scrivere

$$\frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos^3 \alpha}{\cos x} = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha,$$

da cui

$$\operatorname{sen}^2 \alpha \cos x (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} x) + \cos^2 \alpha \operatorname{sen} x (\cos \alpha - \cos x) = 0,$$

ossia

$$\operatorname{sen}^2\alpha \cos x \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha - x) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + x) - \cos^2\alpha \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha - x) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha + x) = 0, \quad (1)$$

che si scinde nelle due

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha - x) = 0, \quad (2)$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(\alpha + x) \tan x = \tan^2 \alpha. \quad (3)$$

La prima ha per soluzione generale

$$x = 360^\circ k + \alpha. \quad (4)$$

In quanto alla seconda, ponendo per semplicità

$$\tan \tfrac{1}{2} x = y \quad \text{e} \quad \tan \tfrac{1}{2} \alpha = a, \quad (5)$$

essa si trasforma facilmente nell'altra

$$2a^3y^3 - (1 + a^4) y^2 - a (1 + a^4) y + 2a^2 = 0, \quad (6)$$

che, a sua volta, si scinde nelle due

$$y = a, \quad (7)$$

$$2a^3y^2 + (a^4 - 1) y - 2a = 0; \quad (8)$$

di queste, la prima ha le stesse soluzioni della (2), e dalla seconda, ricordando le (5), si ricava

$$\tan \tfrac{1}{2} x = \frac{1}{4 \tan^3 \frac{1}{2}\alpha} \left\{(1 - \tan^4 \tfrac{1}{2} \alpha) \pm \sqrt{\tan^8 \tfrac{1}{2} \alpha + 14 \tan^4 \tfrac{1}{2} \alpha + 1}\right\}. \quad (9)$$

In tutto questo procedimento non si è, evidentemente, introdotto nessuna radice estranea (salvo il caso in cui sia $\tan \frac{1}{2} \alpha = 0$, ma allora $\alpha = 360^\circ k$, e dalla proposta si ha, senz'altro, $x = 360^\circ k$, che è appunto quel che si avrebbe della (4)); dunque tutte, e sole, le soluzioni cercate sono quelle che si hanno dalla (4) e dalla (9).

2ª Risoluzione dei sigg. **De Bei, Pelosio e Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

L'equazione proposta si può scrivere

$$\cos x (\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen} x) = - \cos^2 \alpha \operatorname{sen} x , \tag{10}$$

da cui, elevando al quadrato ed esprimendo tutto per seno,

$$\operatorname{sen}^4 x - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 x - 3 (\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha) \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen}^3 \alpha \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^6 \alpha = 0. \tag{11}$$

Questa equazione si scinde nelle due

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha , \tag{12}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + 2 (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^4 \alpha = 0 ; \tag{13}$$

di queste, la prima ha per soluzione generale

$$x = 180^\circ h + (-1)^h \alpha , \tag{14}$$

e dalla seconda si ricava

$$\operatorname{sen} x = - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \pm \operatorname{sen} \alpha \sqrt{\operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^2 \alpha} . \tag{15}$$

Qui si fermano i due risolutori, senza neppure accennare a una discussione; la quale è ora necessaria, perchè, in causa della operazione che si è fatta per passare dalla (10) alla (11), invece della proposta soltanto si è risolta l'equazione più generale

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} x} \pm \frac{\cos^2 \alpha}{\cos x} = 1 . \tag{16}$$

Questa discussione è assai laboriosa, perchè dalla (15) non è possibile separare le radici estranee, e bisogna perciò ricorrere anche ai valori di $\cos x$. Limitandoci ad esaminare un caso particolare, supponiamo $\alpha = 45^\circ$: l'equazione proposta si riduce all'altra

$$\sqrt{2} (\cos x + \operatorname{sen} x) = 2 \operatorname{sen} x , \tag{17}$$

da cui, senz'altro,

$$\operatorname{sen} (45^\circ + x) = \operatorname{sen} 2x ,$$

e quindi

$$x = 360^\circ k + 45^\circ, \qquad x = 360^\circ k + 165^\circ, \qquad x = 360^\circ k + 285^\circ; \tag{18}$$

queste sono dunque tutte e sole le radici della (17). Invece dalla (14) e dalla (15), oltre le (18), si avrebbero anche tutte le altre

$$x = 360^\circ k + 135^\circ, \qquad x = 360^\circ k + 15^\circ, \qquad x = 360^\circ k + 255^\circ; \tag{19}$$

e queste sono appunto le radici dell'altra equazione

$$\sqrt{2} (\cos x - \operatorname{sen} x) = 2 \operatorname{sen} 2x .$$

Questa risoluzione fu mandata anche dai sigg. **Cera, Formato, Salonia, Sosso**, L. P. di *Caserta* e **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; tutt'e cinque però sbagliarono il segno davanti al primo termine del secondo membro della (15).

3ª Risoluzione del sig. **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*, corretta.

L'equazione proposta può scriversi

$$\operatorname{sen}^3 \alpha \cos x + \cos^3 \alpha \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \cos x, \tag{20}$$

dalla quale, esprimendo $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ per $\tan x$ ed elevando a quadrato,

$$(1 + \tan^2 x)(\operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^3 \alpha \tan x)^2 = \tan^2 x \tag{21}$$

ossia

$$\cos^6 \alpha \tan^4 x + 2 \operatorname{sen}^3 \alpha \cos^3 \alpha \tan^3 x + (\operatorname{sen}^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1) \tan^2 x + \\ + 2 \operatorname{sen}^3 \alpha \cos^3 \alpha \tan x + \operatorname{sen}^6 \alpha = 0, \tag{22}$$

Da questa equazione, dividendo per $\cos^6 \alpha$ e osservando che

$$\frac{\operatorname{sen}^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1}{\cos^6 \alpha} = - \frac{3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^6 \alpha} = - 3 \tan^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha),$$

e ponendo inoltre, per semplicità,

$$\tan x = z \quad \text{e} \quad \tan \alpha = b, \tag{23}$$

si ha l'altra equivalente

$$z^4 + 2 b^3 z^3 - 3 (b^2 + b^4) z^2 + 2 b^3 z + b^6 = 0; \tag{24}$$

che si scinde nelle due

$$z = b, \tag{25}$$

$$z + 2 (b + b^3) z + b^4 = 0. \tag{26}$$

E da queste, ricordando la (23), si ha

$$x = 180^0 k + \alpha, \tag{27}$$

$$\tan x = - (\tan \alpha + \tan^3 \alpha) \pm \tan \alpha \sqrt{\tan^4 \alpha + \tan^2 \alpha + 1}. \tag{28}$$

Il solutore si ferma a questo punto, sbagliando però il passaggio dalla (24), alle (25) e (26), chè egli, invece della (26), trova

$$z^2 + 2b^3 z - 2 (b^2 + 2b^4) = 0,$$

e sbagliando quindi anche la (28).

Ma, pur prescindendo da questo errore, la soluzione non sarebbe compiuta, perchè in causa delle operazioni che si sono fatte per passare dalla (20) alla (21), invece della proposta, si è risolta l'equazione più generale

$$\frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos^3 \alpha}{\cos x} = \pm 1, \tag{29}$$

e quindi è necessaria la discussione. Procedendo, per ciò, come nella 2ª risoluzione, si osservi, per es., che per $\alpha = 45^0$, dalla (27) e dalla (28) oltre le (18) si hanno anche le altre

$$x = 360^0 k + 105^0, \qquad x = 360^0 k + 225^0, \qquad x = 360^0 k + 345^0 \tag{30}$$

e queste sono appunto le radici dell'altra equazione

$$\sqrt{2} (\cos x + \operatorname{sen} x) = - 2 \operatorname{sen} 2x.$$

Altre risoluzioni. Il sig. **Cernuschi** (R. I. T. *Torino*) si limita a considerare il caso particolare in cui sia

$$\operatorname{sen}^3 \alpha = \cos^3 \alpha = a \tag{31}$$

e arriva a una equazione del quarto grado reciproca in $\tan x$, che risolve col noto procedimento, tralasciando ogni semplificazione e ogni discussione.

Mentre, per la (31), l'equazione proposta si riduce alla (17), da cui si ricavano *immediatamente* le (18).

Il sig. **Vercellin** di *Torino*, giunto alle (2) e (3), risolve la prima, ma per la seconda non indica nessun artifizio, e dichiara che occorrerebbero le formule generali che servono per le equazioni cubiche.

I sigg. **Casalasco**, R. L. di *Cuneo* e **Rinaldi**, R. I. T. di *Ancona*, si limitano ad osservare che l'equazione è risolta per $x = \alpha$; per cui, secondo loro, per risolvere una equazione qualunque basta trovare *indirettamente* una sola radice.

I sigg. **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*, dalla (3) deducono che deve essere

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + x) = x = \alpha,$$

da cui, come dalla (2), la (4). Con questo ragionamento le radici della equazione

$$x(x-6) = 16$$

sarebbero 4 e 10!

Il sig. **Jodi**, R. I. T. di *Modena*, fa questo strano ragionamento,

La (1) può scriversi

$$\operatorname{sen}^2 \alpha\,[\cos x \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + x) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha + x)] = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha + x), \qquad (32)$$

ma

$$\cos x \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + x) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha + x) = \cos[x - \tfrac{1}{2}(\alpha + x)] = \cos[\tfrac{1}{2}(\alpha + x) - x];$$

dunque deve essere

$$x - \tfrac{1}{2}(\alpha + x) = \tfrac{1}{2}(\alpha + x) - x,$$

dalla quale $x = \alpha$; risultato che si prevedeva.

Ma il secondo membro della (32) a che serve? Con questo ragionamento si dimostra subito che qualunque numero N è uguale a zero: infatti, posto

$$x^2 - 2ax + a^2 = N,$$

sapendo

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 = (a-x)^2$$

sarà (col ragionamento accennato) $x = a$ e quindi $N = 0$!

G. Pesci.

QUISTIONI DA RISOLVERE

741. La somma dei quadrati delle distanze del circoncentro dai centri dei cerchi tangenti ai lati d'un triangolo è il triplo del quadrato del diametro del cerchio circoscritto.

742. Risolvere il sistema

$$\left.\begin{aligned} 16(x^4 + y^4 + z^4 + u^4) &= 289 \\ xy - zu = z + u &= \tfrac{3}{2} \\ x + y &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

E. Cutore.

743. Dato un triangolo qualunque ABC, si costruiscano internamente ad esso (coi vertici in A, B, C), i triangoli isosceli BAB_1, CBC_1,

ACA_1, aventi uno stesso angolo φ al vertice; analogamente si costruiscano esternamente i triangoli isosceli BAB_2, CBC_2, ACA_2.

1. Determinare l'area dei triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, mediante l'area del dato e funzioni goniometriche di φ, e degli angoli di ABC.

2. Discutere le formole trovate, stabilendo in quali casi A_1, B_1, C_1 sono in linea retta.

3. Considerare alcuni casi particolari.

744. Trovare quattro numeri in proporzione, conoscendone la somma, la somma dei quadrati e quella dei cubi.

R. VERCELLIN.

745. Trovare

$$\sum_1^n \frac{a_i\, a_{i+1}\, a_{i+2}}{a_i + a_{i+2}},$$

sapendo che i numeri a_i sono in progressione aritmetica.

746. Dimostrare l'identità

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \\ + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)} = a+b+c+d;$$

e generalizzare la questione.

747. Costruire il segmento minimo che divide un dato triangolo in due parti equivalenti.

C. CIAMBERLINI.

748. Semplificare la frazione

$$\frac{(x+y)^{2m+3} - x^{2m+3} - y^{2m+3}}{(x+y)^{2m+1} - x^{2m+1} - y^{2m+1}}.$$

749. Dimostrare che se

$$\alpha + \beta + \gamma = k\pi,$$

e k, m sono numeri interi, si ha

$$\tan\frac{m\alpha}{k} + \tan\frac{m\beta}{k} + \tan\frac{m\gamma}{k} = \tan\frac{m\alpha}{k} \cdot \tan\frac{m\beta}{k} \cdot \tan\frac{m\gamma}{k}.$$

E.-N. BARISIEN.

750. Risolvere il sistema

$$\left.\begin{aligned} 2\cos x \cos 3y &= 1 \\ \tan x + \tan 3y &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

G. PESCI.

N. B. — Le soluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. LAZZERI, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 30 aprile 1906.

Si pregano vivamente i signori risolutori di *inviare ogni quistione o giuoco in foglio separato, scrivendo su ciascuno il proprio nome e l'istituto al quale essi appartengono.*

Le lettere non francate o insufficientemente francate vengono respinte.

ERRATA-CORRIGE. — Ai risolutori delle quistioni 701, 712, 714, si aggiunga il sig. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 26 marzo 1906

3ª Risoluzione del sig. **Gneme** di *Roma*.

Se x, y, z rappresentano rispettivamente l'età attuale della donna, del giovanotto, e del bambino, si deve avere

$$x = 24 + (z + 2) \qquad z = y - (z + 2) \qquad x = y + (y - z)$$

donde si ha il sistema

$$x = 26 + z, \qquad y = 2z + 2, \qquad x = 2y - 2,$$

che risolto da

$$z = 11, \qquad y = 24, \qquad x = 37,$$

cioè

l'età della donna è di 37 anni
" del giovanotto " " 24 "
" " bambino " " 11 "

Altre risoluzioni delle sig.ne **Castiglioni**, I. T. P. di *Varese* e **Montanari**, L. P. di *Ravenna* e dei sigg. **Abate** e **Naccarati**, R. L. e **Fusco** di *Benevento*; **Abbrescia**, **Cariucci**, **Cristini** e **Giardina**, R. I. T. di *Bari*; **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. *Messina*; **Belvederi**, R. L. Galvani e **Ravaioli**, R. U. di *Bologna*; **Beltrami** e **Urbani**, R. S. T. e **Cellini** di *Forlì*; **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa**, **Levi** e **Vercellin**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **Cera**, **Formato**, **Salonia** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **Cirillo**, **Lucaroni** e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **De Bei** e **Scopinich**, R. I. T. e **Giacometti**, R. L. Polo di *Venezia*; **De Cardenas**, R. I. T. e **Sadun** di *Livorno*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Fiachetti**, R. L. di *Cuneo*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Manzi**, L. P. di *Domodossola*; **Orsaria** e **Tosi**, I. T. P. di *Varese*; **Pomodoro**, R. L. di *Molfetta*; **Serano**, R. I. T. di *Chieti* e **Zaglia** (?)

SPIEGAZIONE DEL 10° GIUOCO A CONCORSO.

Il giuoco proposto era il seguente:

Determinare tre numeri differenti di 2 cifre tali che sommandoli due a due si ottengano i tre numeri che si hanno invertendo le cifre di quelli dati. (Quante sono le soluzioni?) G. C.-L.

Questa volta dobbiamo purtroppo notare che il concorso non ha avuto buon esito; i sigg. **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Brenta**, **Cernuschi** e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **Fusco** di *Benevento* e **Longo** di *Napoli* non hanno trovato tutte le soluzioni che ammette il problema, però specialmente le risoluzioni dei sigg. Longo e Perez sono degne di nota. I sigg. **Abate** e **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **De Bei** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Passalacqua**, R. L. di *Voghera* e **Zaglia** (?) hanno trovato tutte le soluzioni; ma i metodi da essi adoperati non ci sono sembrati i più adatti. L'unica risoluzione che, a nostro parere, presenti qualche pregio è quella firmata dai sigg.

CERA, FORMATO, SALONIA e **SOSSO** del L. P. di *Caserta*

e, quantunque neppure questa risoluzione ci sembri pubblicabile, inviamo ai predetti giovani il premio promesso.

Risoluzione.

Indicando con $10a_1 + b_1$, $10a_2 + b_2$, $10a_3 + b_3$ i tre numeri dati, dovremo avere uno dei seguenti tre sistemi

$$\text{I)} \begin{cases} (10a_2 + b_2) + (10a_3 + b_3) = 10b_1 + a_1 \\ (10a_3 + b_3) + (10a_1 + b_1) = 10b_2 + a_2 \\ (10a_1 + b_1) + (10a_2 + b_2) = 10b_3 + a_3 \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} (10a_1 + b_1) + (10a_2 + b_2) = 10b_2 + a_2 \\ (10a_1 + b_1) + (10a_3 + b_3) = 10b_3 + a_3 \\ (10a_2 + b_2) + (10a_3 + b_3) = 10b_1 + a_1 \end{cases} \qquad \text{III)} \begin{cases} (10a_1 + b_1) + (10a_2 + b_2) = 10b_1 + a_1 \\ (10a_2 + b_2) + (10a_3 + b_3) = 10b_2 + a_2 \\ (10a_3 + b_3) + (10a_1 + b_1) = 10b_3 + a_3 . \end{cases}$$

I. — Consideriamo intanto il 1° sistema. Sottraendo membro a membro e due a due le tre equazioni si ha:

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \tag{1}$$

e, sommando invece membro a membro:

$$19\,(a_1 + a_2 + a_3) = 8\,(b_1 + b_2 + b_3), \tag{2}$$

e poichè deve essere

$$b_1 + b_2 + b_3 \leqq 27,$$

sarà:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 8, \qquad b_1 + b_2 + b_3 = 27 \tag{3}$$

e quindi (1):

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = \tfrac{1}{2}(8 + 19) = 9. \tag{4}$$

Per i dati del problema e per le (4), a_1, a_2, a_3 debbono essere diseguali e quindi poichè le tripartizioni dell'8 in parti diverse sono

$$1 + 2 + 5 \quad \text{e} \quad 1 + 3 + 4,$$

avremo

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_3 = 5$$
$$a'_1 = 1, \qquad a'_2 = 3, \qquad a'_3 = 4.$$

e quindi per le (4)

$$b_1 = 8, \qquad b_2 = 7, \qquad b_3 = 4$$
$$b'_1 = 8, \qquad b'_2 = 6, \qquad b'_3 = 5,$$

e perciò le terne di numeri

18, 27, 54 e **18, 36, 45**

sono soluzioni del problema.

II. — Consideriamo ora il 2° sistema; come nel caso precedente si possono stabilire le (3). Inoltre le prime due equazioni del sistema si possono scrivere

$$\left.\begin{array}{l} 10a_1 + b_1 = 9(b_2 - a_2) \\ 10a_1 + b_1 = 9(b_3 - a_3) \end{array}\right\} \tag{5}$$

le quali ci dànno le seguenti:

$$10a_1 + b_1 = 9k, \qquad b_2 = a_2 + k, \qquad b_3 = a_3 + k. \tag{6}$$

essendo k intero e positivo.

Dalle stesse (5) si ha inoltre

$$b_2 - a_2 = b_3 - a_3, \qquad \text{cioè} \qquad b_2 + a_3 = a_2 + b_3. \tag{7}$$

Sommando la 1ª e la 3ª equazione del sistema II) e tenendo conto delle (7) e delle (3), si ha

$$a_1 + b_1 = b_2 + a_3 = a_2 + b_3 = 9. \tag{8}$$

Dalla (6) si ha, tenendo conto delle (8):

per $k = 1$, $\quad 10a_1 + b_1 = 9 \quad$ non ammissibile per le condizioni date;

" $k = 2$, $\quad 10a_1 + b_1 = 18 \quad \left\{\begin{array}{llll} a_2 = 1, & b_2 = 3, & a_3 = 6, & b_3 = 8 \\ a_2 = 2, & b_2 = 4, & a_3 = 5, & b_3 = 7 \\ a_2 = 3, & b_2 = 5, & a_3 = 4, & b_3 = 6 \end{array}\right.$

per $3 < a_2 < 7$ si hanno di nuovo le stesse soluzioni; per $a_2 \geqslant 7$ non si hanno soluzioni ammissibili;

" $k = 3$, $\quad 10a_1 + b_1 = 27 \quad \left\{\begin{array}{llll} a_2 = 1, & b_2 = 4, & a_3 = 5, & b_3 = 8 \\ a_2 = 2, & b_2 = 5, & a_3 = 4, & b_3 = 7 \end{array}\right.$

per $a_2 > 2$ non si hanno soluzioni ammissibili;

" $k = 4$, $\quad 10a_1 + b_1 = 36 \quad \left\{\begin{array}{llll} a_2 = 1, & b_2 = 5, & a_3 = 4, & b_3 = 8 \\ a_2 = 2, & b_2 = 6, & a_3 = 3, & b_3 = 7 \end{array}\right.$

per $2 < a_2 < 5$ si hanno di nuovo le stesse soluzioni. per $a_2 \geqslant 5$ non si hanno soluzioni ammissibili;

" $k = 5$, $\quad 10a_1 + b_1 = 45$, $\quad a_2 = 1, \quad b_2 = 6, \quad a_3 = 3, \quad b_3 = 8$

per $a_2 > 1$ non si hanno soluzioni ammissibili;

" $k = 6$, $\quad 10a_1 + b_1 = 54$, $\quad a_2 = 1, \quad b_2 = 7, \quad a_3 = 2, \quad b_3 = 8$

per $a_2 > 1$ non si hanno soluzioni ammissibili.

Per $k > 6$ non si hanno soluzioni accettabili e quindi, riepilogando, in questo 2° caso si hanno le soluzioni

18, 13, 68; 18, 24, 57; 18, 35, 46; 27, 14, 58; 27, 25, 47;
36, 15, 48; 36, 26, 37; 45, 16, 38; 54, 17, 28.

III. — Consideriamo finalmente il 3° sistema e cioè

$$10a_2 + b_2 = 9(b_1 - a_1), \qquad 10a_3 + b_3 = 9(b_2 - a_2), \qquad 10a_1 + b_1 = 9(b_3 - a_3).$$

Da questo si ha che $10a_1 + b_1$, $10a_2 + b_2$, $10a_3 + b_3$ sono multipli di 9 e quindi tali debbono essere anche $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ e poichè, come negli altri casi, si possono stabilire le (3) e quindi è

$$\Sigma a_i + \Sigma b_i = 27, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sarà

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = 9. \tag{9}$$

Sostituendo con le (9) nella 1ª equazione del sistema si ha

$$10(9 - b_2) + b_2 = 9b_1 - 9(9 - b_1)$$

da cui

$$2b_1 + b_2 = 19.$$

Analogamente sostituendo con le (9) nelle altre due equazioni del sistema si avrebbe

$$2b_2 + b_3 = 19, \qquad 2b_3 + b_1 = 19$$

e per le (3)

$$b_1 = b_2 = b_3 = \tfrac{1}{3}\,19.$$

Essendo giunti ad un resultato assurdo, in questo 3° caso non si hanno soluzioni. In tutto dunque il problema proposto ammette *undici* soluzioni.

G. C.-L.

GIUOCHI PROPOSTI.

254. Trovare il massimo numero delle parti in cui un piano è diviso da m rette.

255. Trovare il massimo numero delle parti in cui un piano è diviso da n circonferenze.

256. Trovare il massimo numero delle parti in cui un piano è diviso da m rette e da n circonferenze.

C. Ciamberlini.

257. Es[illegible]ere ai numeri di [illegible] cifre il 10° giuoco a concorso.

G. C.-L.

Le ri[illegible] si accettano fino al 31 marzo.

ANNO IX — APRILE 1906 — FASC. VI

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al **Periodico di Matematica**

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Sull'analisi indeterminata di 1° grado ad n incognite. (G. CALVITTI.)

69ª quistione a concorso.

Risoluzione della 66ª quistione a concorso.

Risoluzioni delle quistioni 717, 720, 721, 724, 726, 727 e 729.

Quistioni da risolvere 751-760.

Copertina:

Spiegazione dei giuochi 244, 247, 248 e 249.

Giuochi proposti 258-264.

LIVORNO

RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE

LIBRAIO-TIPOGRAFO

1906

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, alla quale destiniamo tre pagine della copertina, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes**, a *Savona, Via Luigi Corsi-Villa Garroni.*

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 244, 247, 248 e 249

244. *Trovare un numero di tre cifre tale che la somma della cifra delle centinaia, del quadrato di quella delle decine e del cubo di quella delle unità sia eguale al numero formato dalle due ultime cifre.*

S. Catania.

Risoluzione.

Per i dati del problema si deve avere

$$x + y^2 + z^3 = 10y + z$$

cioè

$$y(10-y) - x = (z-1).z.(z+1). \qquad (1)$$

Il prodotto $y(10-y)$ di due fattori la cui somma è costante acquista, com'è noto, il valor massimo quando i due fattori sono eguali, cioè per $y = 10 - y$, che dà $y = 5$, $y(10-y) = 25$.
Poichè inoltre, per la (1), supposto $x > 0$, deve essere

$$(z-1).z.(z+1) < y(10-y), \quad \text{sarà} \quad (z-1).z.(z+1) < 25$$

e quindi, tenendo conto anche che deve essere

$$z - 1 \geqslant 0, \quad \text{sarà} \quad 1 \leqslant z \leqslant 3.$$

a) Per $z = 1$ la (1) dà $y(10-y) = x$ e poichè deve essere

$$1 \leqslant x \leqslant 9 \qquad (2)$$

e quindi anche $1 \leqslant y(10-y) \leqslant 9$, uno dei fattori y e $10-y$ deve essere eguale a 1 e l'altro perciò eguale a 9; in ambedue i casi si ha $x = 9$ e perciò si hanno le soluzioni

$$x_1 = 9, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 1 \quad (911)$$
$$x_2 = 9, \quad y_2 = 9, \quad z_2 = 1 \quad (991).$$

b) Per $z = 2$, a causa delle (1) (2), dovrà essere $7 \leqslant y \leqslant 15$, e perciò y o $10-y$, anche in questo caso, deve essere eguale a 1 e quindi $y(10-y) = 9$, $x = 3$; dunque avremo le soluzioni

$$x_3 = 3, \quad y_3 = 1, \quad z_3 = 2 \quad (312)$$
$$x_4 = 3, \quad y_4 = 9, \quad z_4 = 2 \quad (392).$$

c) Finalmente per $z = 3$, per le (1) (2), dovrà essere $25 \leqslant y(10-y) \leqslant 33$ e perciò, per le ragioni già dette in principio, $y(10-y) = 25$ cioe $y = 5$, $x = 1$ e quindi si ha la soluzione

$$x_5 = 1, \quad y_5 = 5, \quad z_5 = 3 \quad (153).$$

Riepilogando dunque i numeri che soddisfano alle condizioni poste sono: 911, 991, 312, 392 e 153.
Infatti

$$9 + 1^2 + 1^3 = 11, \quad 9 + 9^2 + 1^3 = 91,$$
$$3 + 1^2 + 2^3 = 12, \quad 3 + 9^2 + 2^3 = 92, \quad 1 + 5^2 + 3^3 = 53.$$

Inviarono risoluzioni i sigg. **Abbrescia**, **Cariucci**, **Cristini**, **Giardina** e **Priore**, R. I. T. di *Bari*; **Beltrani**, R. S. T. di *Forlì*; **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Belvederi**, R. L. Galvani di *Bologna*; **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Levi** e **Vercellin**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Cera**, **Fermato**, **Salonia** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **Cirillo**, **Lucaroni** e **Maracci**, R. I. T. e **Miozzi**, R. L. di *Ancona*; **D'Angelo** e **Marra**, R. S. delle miniere di *Caltanissetta*; **De Bei** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Fiachetti**, R. L. di *Cuneo*; **Fusco** e **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **Gneme** di *Roma*; **Lattanzi**, R. I. T. di *Pesaro*; sig.na **Montanari**, L. P. di *Ravenna*; **Serano**, R. I. T. di *Chieti*; **Ventola**, L. P. di *Bitonto*; **Zaglia** (?)

G. C.-L.

247. *Trovare tre numeri dispari consecutivi tali che la somma dei loro quadrati sia un numero di 4 cifre eguali.*

***

Risoluzione.

Indicando con x il medio dei tre numeri, dovremo avere

$$(x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 1111y \qquad (y \leqslant 9)$$

cioè

$$3x^2 + 8 = 1111y.$$

SULL'ANALISI INDETERMINATA DI 1° GRADO AD n INCOGNITE

1. Data un'equazione di primo grado a più incognite, io qui consiglio un metodo semplicissimo per trovare se essa ammette soluzioni intere, e, nel caso affermativo, per aver subito la formola che le compendia tutte.

Il presente lavoretto non dimostra dunque verità nuove; ma sono convinto abbia nel campo didattico una discreta importanza, come quello che, suggerendo un procedimento speciale chiaro e semplice, mette gli alunni al riparo da diverse cause di errori.

2. Un'equazione di 1° grado ad n incognite può sempre ridursi alla forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = k \tag{1}$$

con $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, k$ interi e positivi.

Dedotta dalla (1) chiameremo l'equazione

$$a_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots + b_nx_n = k \tag{2}$$

ottenuta col lasciare in (1) invariato il coefficiente minimo, non nullo, che, per fissare le idee, supponiamo sia a_1; e ponendo al posto dei rimanenti coefficienti i relativi resti per a_1. I coefficienti delle (1) e (2) sono dunque legati fra loro dalla relazione

$$a_i = a_1a'_i + b_i \tag{3}$$

con a'_i intero e positivo e per $i = 2, 3, \ldots, n$.

3. *Se la* (1) *ammette una soluzione intera, anche la sua ridotta ammette una soluzione intera. E viceversa.*

a) Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ è una soluzione intera della (1), l'eguaglianza

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = k,$$

che per la (3) diventa

$$a_1\alpha_1 + (a_1a'_2 + b_2)\,\alpha_2 + \ldots + (a_1a'_n + b_n)\,\alpha_n = k,$$

posta sotto la forma

$$a_1(\alpha_1 + a'_2\alpha_2 + \ldots + a'_n\alpha_n) + b_2\alpha_2 + \ldots + b_n\alpha_n = k,$$

ci dice che la (2) ammette la soluzione intera

$$\alpha_1 + a'_2\alpha_2 + \ldots + a'_n\alpha_n, \qquad \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n.$$

b) Viceversa, se

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$$

è una soluzione intera della (2), l'eguaglianza

$$a_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 + \ldots + b_n\beta_n = k,$$

che per la (3) diventa

$$a_1\beta_1 + (a_2 - a_1a'_2)\,\beta_2 + (a_3 - a_1a'_3)\,\beta_3 + \ldots + (a_n - a_1a'_n)\,\beta_n = k,$$

posta sotto la forma

$$a_1(\beta_1 - a'_2\beta_2 - a'_3\beta_3 - \ldots - a'_n\beta_n) + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \ldots + a_n\beta_n = k$$

ci dice che la (1) ammette la soluzione intera.

$$\beta_1 - a'_2\beta_2 - a'_3\beta_3 - \ldots - a'_n\beta_n\,, \qquad \beta_2\,,\ \beta_3\,,\ldots,\ \beta_n\,.$$

Osservazione. — C' è dunque tra le soluzioni intere dell'equazione data e quelle della sua ridotta una corrispondenza univoca.

Si fissi poi bene questo, che alla soluzione

$$(\beta_1\,,\ \beta_2\,,\ \beta_3\,,\ldots,\ \beta_n)$$

della ridotta corrisponde la soluzione

$$(\beta_1 - a'_2\beta_2 - a'_3\beta_3 - \ldots - a'_n\beta_n\,,\ \beta_2\,,\ \beta_3\,,\ldots,\ \beta_n)$$

della data equazione. Il significato delle a'_1 è spiegato innanzi.

4. È facile dimostrare che *il massimo comun divisore di più dati numeri, anche se alcuni di essi sono nulli, è uguale al massimo comun divisore di uno di essi, diverso da zero, comunque scelto, e dei resti, anche nulli, che si ottengono dividendo ciascuno degli altri pel numero scelto.* (1)

Si capisce subito come nella pratica convenga scegliere il numero minimo (diverso da zero), o uno dei minori uguali (diversi da zero), perchè così dei nuovi numeri uno solo è uguale ad uno dei numeri dati, e gli altri sono tutti minori di esso. Con questo teorema e con quest'avvertenza abbiamo compilato il seguente quadro, per la ricerca del massimo comun divisore dei coefficienti della data equazione

$$\begin{array}{llll} a_1 & a_2 & a_3\ldots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3\ldots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3\ldots c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_1 & p_2 & p_3\ldots p_n \\ q_1 & q_2 & q_3\ldots q_n\,, \end{array} \tag{4}$$

nel quale i numeri dell'ultima linea, tranne uno, poniamo q_1, sono tutti nulli. È q_1 il m. c. d. dei numeri dell'ultima linea, e quindi di quelli della penultima, e quindi di quelli della terzultima, ecc...., e quindi dei coefficienti $a_1\,,\ a_2\,,\ldots,a_n$ della data equazione. (2)

5. Ciò posto, siccome delle seguenti equazioni

$$\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = k \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots + b_nx_n = k \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n = k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots + p_nx_n = k \\ q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + \ldots + q_nx_n = k \end{array} \tag{5}$$

ognuna è (§ 1) ridotta della precedente, così c'è (§ 3) una corrispondenza univoca tra le soluzioni intere della prima e quelle dell'ultima, per cui possiam dire che: *la condizione necessaria e sufficiente perchè*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = k\,,$$

(1) È però necessario che tra i multipli di un dato numero si comprenda lo zero, e quindi si definisca la frase "a è multiplo di b" mediante l'altra "esiste un intero che moltiplicato per b genera a".

(2) Questa regola per la ricerca del m. c. d. di più dati numeri non è esposta, ch'io mi sappia, in nessuna aritmetica. La sua semplicità la rende preferibile alle altre note.

ammetta soluzione intera è che l'equazione

$$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + \ldots + q_nx_n = k$$

ammetta soluzione intera, ossia che q_l, *massimo comun divisore dei coefficienti della data equazione, sia divisore di* k.

6. Verificata detta condizione, e posto $q'_l = \frac{k}{q_l}$, l'equazione

$$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + \ldots + q_nx_n = k$$

è verificata da

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \ldots, x_{l-1} = s_{l-1}, \quad x_l = q'_l, \quad x_{l+1} = s_{l+1}, \ldots, x_n = s_n$$

essendo $s_1, s_2, \ldots, s_{l-1}, s_{l+1}, \ldots, s_n$ numeri interi scelti ad arbitrio fra $-\infty$ e $+\infty$.

Pertanto i numeri interi che soddisfano l'equazione data sono funzioni di questi $n-1$ numeri interi s. Per determinarli bisognerà risalire (se ne studi il modo al § 3) da una soluzione intera dell'ultima delle equazioni (5) alla corrispondente della penultima; da questa soluzione alla corrispondente della terzultima, e così via, sino ad avere la soluzione corrispondente della prima, che è l'equazione data.

Verificata dunque la condizione, l'equazione data ammette infinite soluzioni intere, funzioni di $n-1$ parametri arbitrarii.

Si noti che la condizione è verificata se i coefficienti della data equazione sono primi fra loro, se cioè il loro massimo comun divisore è 1, perchè 1 è divisore di qualsiasi valore che possa assumere k.

7. Possiamo ora applicare ad un esempio le cose dette. Suppongasi data l'equazione

$$-3780x + 2340y - 1980z + 1260\omega = 720. \qquad (6)$$

Ponendo $x_1 = -x$, $x_2 = y$, $x_3 = -z$, $x_4 = \omega$, l'equazione diventa

$$3780x_1 + 2340x_2 + 1980x_3 + 1260x_4 = 720. \qquad (7)$$

La disposizione da dare ai risultati dei calcoli (vantaggiosissima perchè, appena dopo aver assodato la esistenza di soluzioni intere della (6), facilmente e subito si trova la formola che le porge tutte) è la seguente

1ª	3780	2340	1980	1260
	3	1	1	
	k_1	$3k_2 - 2k_3 - 4$	$3k_3 - k_2$	$-k_3 - 4k_2 - 3k_1 + 8$
2ª	0	1080	720	1260
	0	1		1
	k_1	$3k_2 - 2k_3 - 4$	$3k_3 - k_2$	$-2k_2 + 4$
3ª	0	360	720	540
	0		2	1
	k_1	$3k_2 - 2k_3 - 4$	k_3	$-2k_2 + 4$
4ª	0	360	0	180
	0	2	0	
	k_1	k_2	k_3	$-2k_2 + 4$
5ª	0	0	0	180
	k_1	k_2	k_3	4

Basteranno poche parole d'illustrazione.

Abbiamo scritto innanzi tutto, nella prima riga, i coefficienti dell'equazione (7), che sono poi i valori assoluti dei coefficienti della data equazione (6). In una seconda riga abbiamo scritto di nuovo, conservandogli la colonna, il 1260, che tra i numeri della prima riga è il minimo, e poi i resti degli altri numeri della prima riga per 1260, notando i quozienti immediatamente sotto ai rispettivi dividendi, dicendo p. es.: 1980 diviso per 1260 dà 1 per quoziente (ed abbiamo scritto l'1 al disotto di 1980) e 720 per resto (ed abbiamo scritto il 720 nella seconda riga). Siamo andati avanti così, fino ad avere in una riga (nel caso attuale è la 5ª) un solo numero diverso da zero.

Siccome il 180 trovato, massimo comun divisore dei coefficienti della (7), è divisore di 720, termine noto della stessa, così abbiamo conchiuso che questa (e quindi anche l'equazione data) ammette infinite soluzioni intere. Per aver poi la formola che le compendia tutte, al disotto degli zeri dell'ultima riga abbiamo scritto numeri interi indeterminati k_1, k_2, k_3, e, al disotto di 180, il quoto $\frac{720}{120}=4$. Dei quattro numeri $k_1, k_2, k_3, 4$, i primi tre sono preceduti, in senso verticale, dai quozienti 0, 2, 0, l'ultimo da uno spazio vuoto; e noi abbiamo trascritti immediatamente dopo i detti quozienti i primi tre numeri, ed abbiamo scritto sulla stessa riga, in corrispondenza dello spazio vuoto, la differenza tra il quarto e la somma dei prodotti di quei tre numeri per i soprastanti quozienti. Il $-2k_2+4$, p. es., è dunque eguale a $4-(k_1 . 0+k_2 . 2+k_3 . 0)$. Così, continuando a procedere dal basso in alto siamo pervenuti alle quattro espressioni

$$k_1, \qquad 3k_2-2k_3-4, \qquad 3k_3-k_2, \qquad -k_3-4k_2-3k_1+8$$

che costituiscono una soluzione intera generale dell'equazione (7), giusta l'osservazione del § 3. Si ha dunque

$$\begin{cases} x_1=k_1 \\ x_2=3k_2-2k_3-4 \\ x_3=3k_3-k_2 \\ x_4=-k_3-4k_2-3k_1+8 \end{cases}$$

e quindi la *formola generale* di risoluzione della data equazione è la seguente

$$\begin{cases} x=-k_1 \\ y=3k_2-2k_3-4 \\ z=-3k_3+k_2 \\ \omega=-k_3-4k_2-3k_1+8 \end{cases}$$

Per avere una soluzione intera determinata, basta dare alle indeterminate k_1, k_2, k_3, valori arbitrarî, interi positivi o negativi. Così, p. es., per $k_1=k_2=k_3=0$ si ha la soluzione intera $(0, -4, 0, 8)$.

8. Il procedimento esposto può applicarsi naturalmente anche all'equazione a due sole incognite

$$ax+by=c.$$

Ma per questa riesce più comodo un procedimento diverso, da me indicato in altra nota (" Supplemento al Periodico di Matematica ", Anno VIII, fasc. VIII, giugno 1905).

G. Calvitti
Ascoli.

69ª QUISTIONE A CONCORSO

Dimostrare che se esiste un quadrangolo inscritto in un dato circolo e circoscritto ad un altro ne esistono infiniti.

G. Pesci.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 31 maggio 1906.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONE DELLA 66ª QUISTIONE A CONCORSO

1°. Determinare il volume V *di una lente biconvessa, conoscendo la distanza dei centri* d *ed i raggi* R, R′ *delle due superficie sferiche che limitano la lente.*

2°. Determinare i raggi R, R′, *conoscendo* V, d *ed il rapporto* $\frac{R}{R'} = m$.

G. L.

Hanno inviato lavori per questo concorso i sigg. **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa**, **Vercellin**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*.

I concorrenti hanno interpretato giustamente l'enunciato della quistione (ritenendo che *d* rappresentasse la distanza dei centri delle sfere che hanno per parte comune la lente), ad eccezione di Terracini e Vercellin che hanno presentato la risoluzione d'un problema alquanto diverso da quello posto, perchè hanno ritenuto che con *d* si dovesse indicare lo spessore della lente, cioè la somma delle altezze dei due segmenti sferici che la compongono.

Alla prima domanda della questione hanno ben risposto i sigg. Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa, Cutore, De Bei, Maracci, Pelosio e Scopinich. Il sig. Urbani, per un errore commesso nella semplificazione della formula che dà il volume della lente, giunge ad un risultato inesatto. Il sig. Castaldi presenta un calcolo lungo e perviene ad una formula complicatissima per il volume richiesto, che egli non cerca di semplificare; anche il sig. Casalasco presenta un lavoro assai lungo, in cui neppure si trova un'espressione ridotta per il volume richiesto. A questi due ultimi alunni è da raccomandare una cura maggiore nella scrittura delle formule, affinchè non s'incontrino difficoltà nella decifrazione di esse.

Il sig. Vercellin ha assai ben risoluto la prima parte del problema nell'ipotesi che i dati di esso fossero i raggi delle due sfere

e lo spessore della lente, giungendo in modo semplice alla relazione (5) (V. *Risoluzione* seguente), nella quale con δ è indicato tale spessore. Anche il Terracini segue un metodo semplice per la ricerca del volume nella stessa ipotesi; ma presenta una formula suscettibile di riduzioni.

Quanto alla seconda parte del problema, l'equazione che dà uno dei raggi (R') delle sfere in funzione di V, d, e $m = \frac{R}{R'}$, è stata posta esattamente dagli alunni Bongini, Brenta, Cutore, De Bei, Pelosio, Scopinich e Cernuschi nella forma (6) o in altra poco diversa; i primi sei trovano che questa equazione non si risolve che seguendo uno dei metodi generali di risoluzione dell'equazione di 4° grado; il Cernuschi afferma (e ciò non è) che l'equazione si riduce ad un'equazione biquadratica con la trasformazione

$$R' = z + \frac{4d(m^2+1)}{3(m^2-1)^2};$$

Costa e Maracci, che pur avevano ben trattata la prima parte, non trovano l'equazione suddetta; non si vede nessuna traccia di questa ricerca neanche nel lavoro dell'Urbani. Il Castaldi, in seguito ad alcune sviste, trova per i raggi delle sfere espressioni indipendenti dal volume della lente.

Se invece di d, è dato lo spessore δ, dalla relazione (5), posto $R = R'm$, si deduce un'equazione di 2° grado in R', che il Vercellin risolve e discute esattamente. Il Terracini, che ha interpretato il problema nello stesso modo del Vercellin, non si è occupato della seconda parte.

Per il risultato del concorso non si può tener conto che dei lavori nei quali è stata trattata la quistione com'era posta. I migliori lavori che soddisfano a questa condizione appartengono ai sigg. Bongini, Brenta, De Bei, Pelosio e Scopinich; e tra essi mi pare debba esser posto in prima linea quello del sig.

DE BEI, R. I. T. *Venezia*,

che ha inviato due diversi procedimenti, entrambi rigorosi e semplici, per giungere alla formula relativa al volume, che infine ha applicato a qualche caso particolare.

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

1°. Se h, h' indicano le altezze dei segmenti sferici di cui si compone la lente, si ha

$$h + h' = R + R' - d; \tag{1}$$

e poichè ognuno dei prodotti $h(2R - h)$, $h'(2R' - h')$ è eguale al quadrato del raggio della base comune dei due segmenti sferici, si ha anche

$$h(2R - h) = h'(2R' - h'). \tag{2}$$

Dalle relazioni (1) e (2) si deduce

$$h = \frac{1}{2d}(R + R' - d)(R' - R + d); \qquad h' = \frac{1}{2d}(R + R' - d)(R - R' + d). \tag{3}$$

Ora il volume V della lente è dato da

$$V = \tfrac{1}{3}\pi[h^2(3R - h) + h'^2(3R' - h')];$$

quindi, eliminando h e h' da questa relazione e dalle (3), si ha subito l'espressione di V in funzione dei dati R, R', d del problema. Dopo alcune trasformazioni si ottiene

$$V=\frac{\pi}{12d}(R+R'-d)^2[2d(R+R'-d)+3(R'-R+d)(R-R'+d)]. \quad (4)$$

Osservazione 1ª. — Tenendo conto della (1) e delle (3) si trova facilmente per l'espressione di V in funzione di h, h', d

$$V=\tfrac{1}{3}\pi(h+h')^2+\pi dhh'.$$

Quindi, poichè $h+h'$ è lo *spessore* della lente:

Una lente biconvessa è equivalente alla somma della sfera che ha per diametro il suo spessore, e del cilindro che ha altezza eguale alla distanza dei centri delle superficie sferiche che la limitano, e raggio medio proporzionale tra le altezze dei segmenti sferici che compongono la lente.

Osservazione 2ª. — Se si pone

$$h+h'=\delta,$$

cioè si indica con δ lo spessore della lente, si deduce facilmente dalle (1) e (4) l'espressione seguente di V in funzione di R, R', δ

$$V=\frac{\pi\delta^2}{12(R+R'-\delta)}[\delta^2-4\delta(R+R')+12RR']. \quad (5)$$

2°. Ponendo $R=R'm$ nella (4), si ha, dopo alcune riduzioni, per la determinazione di R', l'equazione

$$3(m^2-1)^2R'^4-8(m^3+1)dR'^3+6(m^2+1)d^2R'^2+d\left(\frac{12V}{\pi}-d^3\right)=0 \quad (6)$$

che non è in generale trasformabile in altra che si possa risolvere mediante equazioni di 2° grado. (¹)

C. Ciamberlini.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 717, 720, 721, 724, 726, 727 E 729

Non è stato tenuto conto delle risoluzioni pervenuteci dopo la data prescritta.

717. *Trovare quattro numeri in progressione geometrica data la differenza* a *degli estremi e quella* b *dei medi; e provare che se il rapporto fra* b *ed* a *è dato dalla*

$$\frac{b}{a}=\frac{q^2-1}{3q^2+1}, \quad (1)$$

dove q *è un numero qualunque, le soluzioni diventano razionali.*

***

Risoluzione sostanzialmente analoga dei sigg. **Bongini, Brenta, Costa, Cernuschi, De Angelis, Galleano, Mosca, Terracini** e **Vercellin** del R. I. T. di *Torino*; **Alicesa,**

(¹) Il proponente la questione, al quale mi son rivolto in proposito, mi ha fatto osservare che nell'enunciato della 66ª quistione era incorsa una svista, poichè era sua intenzione che, invece del rapporto $\frac{R}{R'}$, fosse data la somma $R+R'$; in questo caso, come si può facilmente vedere, la determinazione dei raggi R, R' dipende da un'equazione di 2° grado. C. C.

Casalasco e **Marchisio** del R. L. di *Cuneo*; **Jodi** e **Freguglia** del R. I. T. di *Modena*; **Cirillo Maracci Urbani** del R. I. T. di *Ancona*; **De Bei, Pelosio,** e **Scopinich** del R. I. T. di *Venezia*; **Cutore** e **La Spina** del R. I. T. di *Catania*; **Baduel** del R. I. T. di *Perugia*; **Belvedere** del R. I. T. di *Messina*; **Campetti**, dell'I. T. P. di *Lucca*; **Castaldi** del R. I. T. di *Firenze*; **De Castro** del R. L. di *Milano*; **Papa** del R. I. T. di *Napoli*.

Indichiamo con x il primo numero e con y la ragione; allora i quattro numeri domandati sono x, xy, xy^2, xy^3 e la questione proposta si riduce al sistema

$$x(y^3-1)=a\ldots; \qquad xy(y-1)=b\ldots$$

Da queste, dividendo membro a membro, si ha la equazione

$$y^2+\frac{b-a}{b}y+1=0,$$

da cui

$$y=\frac{a-b\pm\sqrt{(b-a)^2-4b^2}}{2b},$$

e quindi

$$x=\frac{b}{y(y-1)}=\frac{a(a-3b)\mp(a-2b)\sqrt{(b-a)^2-4b^2}}{2(3b-a)}.$$

Poichè si ha

$$\Delta=(-3b+a)(b+a),$$

per la realità delle radici basta che sia $\frac{a}{b}\leqslant-1$ oppure $\frac{a}{b}\geqslant 3$. Sostituendo nella espressione

$$\frac{\Delta}{a^2}=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{3b}{a}\right)$$

il valore dato dalla (1) si ha

$$\frac{\Delta}{a^2}=\frac{16q^2}{(3q^2+1)^2}.$$

Ciò che prova la seconda parte della quistione.

Nota del Red. — Si ottengono pure soluzioni razionali ponendo $b=2q$ ed $a=q+2q+4$, giacchè si ha $\Delta=(q-4)^2$.

G. Candido.

720. *Dimostrare col metodo d'induzione la nota formula*

$$\lim_{n=\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

essendo p *un numero intero positivo.* Catania.

Risoluzione (parzialmente modificata) dei sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania* e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*.

Scriviamo

$$S_p=1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p,$$

ed abbiamo

$$(n+1)^{p+1}=\binom{p+1}{1}S_p+\binom{p+1}{2}S_{p-1}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{p+1}{p-1}S_2+\binom{p+1}{p}S_1+(n+1), \qquad (1)$$

e facendo successivamente $p=1, 2, 3, \ldots$, abbiamo

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2},$$
$$S_2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$
$$S_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e da queste

$$\frac{S_1}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n},$$
$$\frac{S_2}{n^3} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right),$$
$$\frac{S_3}{n^4} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e andando al limite, per $n = \infty$ abbiamo rispettivamente, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...

Ammettiamo vera la legge fino a S_{p-1} e dividiamo (1) per n^{p+1}, e ordiniamo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1} = \binom{p+1}{1}\frac{S_p}{n^{p+1}} + \binom{p+1}{2}\frac{S_{p-1}}{n^p}\cdot\frac{1}{n} + \\ + \binom{p+1}{3}\frac{S_{p-2}}{n^{p-1}}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^{p+1}}.$$

Al limite, per $n = \infty$ abbiamo

$$1 = \binom{p+1}{1}\lim_{n=\infty}\frac{S_p}{n^{p+1}},$$

annullandosi per ipotesi, tutti i rimanenti termini del secondo membro, ed infine

$$\lim_{n=\infty}\frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Le risoluzioni inviate, si riducono, in generale, o ad una *successiva verifica* della formula data per $p = 1, 2, 3, \ldots$, od alla ordinaria dimostrazione algebrica. Alcuni solutori hanno poi direttamente applicato le relazioni date in questo " Supplemento ", an. IX, pag. 21. Tali sono i sigg. **Cera, Formato, Solonia** e **Sosso**, R. L. di *Caserta*. I sigg. Cutore e La Spina estendono la relazione proposta alla determinazione del volume della piramide.

I nomi dei rimanenti risolutori sono: **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. di *Torino*; **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*; **Freguglia** e **Jodi** del R. I. T. di *Modena*; **Casalasco, Marchisio** e **Chiesa** del R. L. di *Cuneo*; **Cirillo** e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; e **Perelli** di *Roma*.

C. Alasia.

721. *Un serbatoio emette continuamente acqua da un foro di area* s *praticato nel suo fondo; quest'acqua viene riceruta da un secondo serbatoio avente anche esso nel suo fondo un foro d'eflusso di area* s'.

Il primo serbatoio è alimentato da un getto d'acqua che vi mantiene costante il livello h *d'acqua; nel secondo serbatoio invece il liquido in principio s'inalza, ma poi assume anch'esso un lirello costante* h'.

Si determini l'area s' *del secondo serbatoio in modo che si abbia*

$$h + h' = a, \qquad h^2 + h'^2 = q, \qquad ss' = p$$

essendo h, h', *numeri che misurano* in metri *le altezze di livello, ed* s', s *i numeri che misurano* in cm² *le aree dei due fori.* (1)

Si consideri il caso particolare in cui a = 45, q = 1377, $p = 18$.

Esame di concorso alla R. Accademia Navale. Agosto, 1905.

Risoluzione

Indicando con v, v' le velocità d'eflusso nei due recipienti, avremo per la legge di Torricelli (2)

$$v = \sqrt{2gh}, \qquad v' = \sqrt{2gh'},$$

(1) Sebbene l'enunciato chieda esplicitamente soltanto il valore di s', si capisce che h, h', s, s' sono quattro incognite da calcolarsi in funzione di a, q, p che sono i soli *dati* del problema.

(2) Vedi ad es. Ròiti I, § 251.

e dovendo essere eguali le *portate* dei due orifizi quando il *regime permanente* è raggiunto, sarà (assumendo per unità di superficie il quadrato dell'unità lineare)

$$vs = v's' \tag{1}$$

cioè

$$\frac{s}{s'} = \frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{h'}{h}}.$$

Si avrà dunque il sistema

$$h + h' = a, \quad (2) \qquad h^2 + h'^2 = q, \quad (3) \qquad ss' = p, \quad (4) \qquad \frac{s}{s'} = \sqrt{\frac{h'}{h}}. \quad (5)$$

Dalle due prime si deduce

$$\left.\begin{matrix} h \\ h' \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{2q - a^2}}{2} \tag{6}$$

e dovendo h, h' essere *reali* e *positivi*, si ricava di qui la condizione di possibilità del problema

$$q < a^2 \leqslant 2q. \tag{7}$$

Moltiplicando e dividendo fra loro le (4) (5) si ha poi

$$s^2 = p\sqrt{\frac{h'}{h}}, \qquad s'^2 = p\sqrt{\frac{h}{h'}}$$

e, tenendo presente la (6) si ha infine, dopo qualche semplificazione

$$\left.\begin{matrix} s \\ s' \end{matrix}\right\} = \sqrt[4]{p^2 \frac{q \mp a\sqrt{2q - a^2}}{a^2 - q}} \tag{8}$$

con l'avvertenza che *nelle* (6), (8) *i segni superiori si corrispondono e così pure gli inferiori.*

Se dunque è verificata la (7) il problema ha due soluzioni che differiscono fra loro per lo scambio dei valori di h e di s con quelli di h' e di s' rispettivamente. Si può dunque dire che, per passare dalla 1ª alla 2ª soluzione, basta *scambiare fra loro i due recipienti* com'era da prevedersi. Nel caso limite in cui $2q = a^2$ le due soluzioni si riducono ad una

$$h = h' = \tfrac{1}{2}a, \qquad s = s' = \tfrac{1}{2}p.$$

Osservazione. — Nell'applicazione numerica proposta, mentre le lunghezze h, h', a sono misurate in metri, le aree s, s' sono valutate in cm². Ciò però non porta modificazioni nelle formule precedenti. Ed infatti, qualunque sia il rapporto λ fra il quadrato dell'unità lineare e l'unità di superficie adottata, valutando le superficie con questa unità, anzichè con quella, le aree degli orifizi vengono ad essere moltiplicate per λ, e perciò la (1) e le sue conseguenze sussistono ancora nella nuova ipotesi.

In nessuno dei lavori presentati risulta esplicitamente che il calcolo numerico sia stato fatto tenendo presente questa osservazione.

Applicazione.

$$a = 45, \qquad q = 1377, \qquad p = 18.$$

Dalle (6) e (8) si hanno le due soluzioni del problema

h	36	9
s	3	6
h'	9	36
s'	6	3

con le unità di misura adottate.

Dei 26 lavori presentati, il migliore e più completo è quello del sig. **Jodi** del R. I. T. di *Modena*, il quale mette in rilievo in tutte le sue parti, la duplice soluzione del problema.

I rimanenti 25 lavori possono classificarsi in varî gruppi.

1°. Buone risoluzioni hanno presentato i sigg. **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Costa**, **Bongini** e **Brenta**, R. I. T. di *Torino*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Macchi** e **Magnani**, I. T. di *Varese*. Tutti costoro trovano la condizione $q < a^2 \leqslant 2q$, ma sebbene osservino la permutabilità di h ed h' non determinano s, ma soltanto s', e perciò non risulta evidente la permutabilità dei due recipienti, quando lo stato permanente è raggiunto.

2°. Il sig. **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino* dimentica la condizione $a^2 > q$. Il sig. **Vercellin** di *Torino* trova la condizione erronea $q < a \leqslant \sqrt{2}$.

3°. I sigg. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*; **Mosca** e **Patellani**, R. L. di *Como*; **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Rinaldi** e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Reggio**, R. I. T. di *Firenze*; **Urbani**, R. I. T. di *Ancona* scelgono senza plausibile motivo nella (6) il segno + per h e il segno — per h' ed ottengono quindi un sol valore per s'. Due di essi dimenticano la prima parte della limitazione (7).

4°. I sig. **Scopinich** e **Pelosio**, R. I. T. di *Venezia*; **Castaldi**, **Ghe** e **Bonacci**, R. I. T. di *Firenze* non cercano affatto la condizione di possibilità pel problema.

5°. Altri quattro lavori sono troppo incompleti od affatto sbagliati. In uno di questi si trova che $s : s' = \sqrt{2gh} : \sqrt{2gh'} = h : h'$. In altri è posta, senza giustificazione, l'eguaglianza erronea $sh = s'h'$.

In questi, come del resto in parecchi altri dei precedenti lavori, sono state dimenticate ovvie semplificazioni.

AUSSANT CARÀ.

724. *Un punto materiale pesante è abbandonato a sè stesso in* A *senza velocità iniziale, e cade nel vuoto liberamente da* A *in* O, *punto ove tocca il suolo. Nell' istante in cui parte da* A, *un altro punto materiale parte da* O *e si muove sulla orizzontale* OX *con moto uniforme di cui la velocità è di* v *metri al secondo. Studiare le variazioni della distanza dei due punti durante la caduta da* A.

Se questa distanza passa per un massimo o un minimo, trovare quali sono in quell'istante le distanze rispettive dei due mobili da O *e la distanza dei medesimi.*

La distanza OA *è data ed è eguale ad* h *metri.*

(Concorso alla scuola speciale militare di Francia, 1905).

Risoluzione dei sigg. **Castaldi**, **Chiarugi** e **Ghe**, R. I. T. di *Firenze*.

Sia s lo spazio percorso dal primo punto materiale nel tempo t per andare da A in H ed s' lo spazio percorso dal secondo punto per andare nello stesso tempo t da O in K nella direzione OX. È

$$s = \tfrac{1}{2} gt^2, \qquad s' = vt.$$

La distanza dei due punti mobili è data ad ogni istante dall'ipotenusa d di un triangolo rettangolo i cui cateti sono rispettivamente $(h - s)$ ed s', cioè

$$d = \sqrt{(h - \tfrac{1}{2} gt^2)^2 - v^2t^2}.$$

Questa relazione sviluppata ed ordinata rispetto a t si scrive

$$t^4g^2 - 4t^2(hg - v^2) + 4(h^2 - d^2) = 0, \tag{1}$$

dalla quale

$$t^2 = \frac{2(hg - v^2) \pm 2\sqrt{v^4 - 2hgv^2 + g^2d^2}}{g^2}, \tag{2}$$

e perchè t sia reale dovrà evidentemente essere

$$v^4 - 2hgv^2 + g^2d^2 \geqq 0.$$

Uguagliando a zero questo trinomio, ricaviamo

$$d = \pm \frac{v}{g}\sqrt{2hg - v^2}.$$

Il secondo dei valori di d non corrisponde ai dati del problema, per cui si dovrà tener conto del primo valore solamente, cioè del valore minimo di (1). Il valore di t che soddisfa a tal minimo si ha sostituendo il valore di d in (2), e si ha

$$t = \frac{\sqrt{2(hg - v^2)}}{g}.$$

In questo momento la distanza s' del punto da O su OX è

$$s' = \frac{v}{g}\sqrt{2(hg - v^2)},$$

e la distanza s del punto da O su OA è

$$s = \tfrac{1}{2} gt^2 = \tfrac{1}{2} g\left(\frac{2(hg - v^2)}{g^2}\right) = h - \frac{v^2}{g}.$$

Evidentemente

per $t = 0$ è $OH = h$, $OK = 0$, $HK = h$;

per $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, è $OH = 0$, $OK = 2h$, $HK = 2h$.

Altre risoluzioni dei sigg. **Brenta, Cernuschi, Mosca, Terracini** e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei, Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **De Castro**, R. L. di *Milano*; **Fiachetti** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Maracci, Rinaldi** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona* e del sig. **F. Verde**.

La soluzione di quest'ultimo è pregevole, ma la discussione dell'ultima parte, dato il modo col quale è fissata, porterebbe in un campo che esorbiterebbe da una discussione elementare; la soluzione del sig. De Castro, rigorosa e completa, non è però adatta al " Supplemento ", ricorrendo egli alla forma delle derivate per ottenere le condizioni di possibilità del problema. La soluzione del sig. Brenta, accurata più di tutte le rimanenti, considera in particolare i casi nei quali è isoscele il triangolo OHK o che sia uguale la velocità dei due punti materiali. La soluzione del sig. Cernuschi è pressochè analoga a quella riportata. Le altre sono meno complete.

C. Alasia.

726. *Dimostrare, indipendentemente dalla teoria della somiglianza, che il triangolo equilatero avente per lato l'ipotenusa di un triangolo rettangolo qualsiasi è equivalente alla somma dei triangoli equilateri aventi per lati i cateti.*

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Siano BCA', CAB', ABC' i triangoli equilateri aventi per lati l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo ABC; O il punto medio dell'ipotenusa. I triangoli ACA', BCB' sono eguali; ma BCB', essendo il doppio di B'CO, è equivalente al quadrangolo AB'CO (perchè B'O è l'asse di AC); perciò anche il triangolo ACA' è equivalente al quadrangolo AB'CO. Similmente, il triangolo ABA' è equivalente al quadrangolo AC'BO. Segue che il quadrangolo ABA'C è equivalente al pentagono concavo BCB'AC'; e quindi (tolta la parte comune ABC) il triangolo BCA' è equivalente alla somma di CAB', ABC'.

Inviarono risoluzioni geometriche poco diverse dalla precedente i sigg. **Brenta**, e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*. Risoluzioni geometriche lunghe, o in cui non tutto quanto si asserisce vien dimostrato i sigg. **Bongini**, R. I. T. di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*. Risoluzioni non indipendenti dalla teoria della somiglianza i sigg. **Bonetti**, R. L. di *Arezzo*; **Costa**, R. I. T. di *Torino*. Risoluzioni basate sul teorema di Pitagora e sulla tooria della misura i sigg. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; **Castaldi** e **Ghe**, R. I. T. di *Firenze*;

Cutore, R. I. T. di *Catania*; **De Bei, Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **De Cardenas** e **Paoletti**, R. I. T. di *Livorno*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Fiachetti**, R. L. di *Cuneo*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Maracci, Rinaldi** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Patellani**, R. L. di *Como*; **Marangio**, R. L. di *Aquila*.

C. Ciamberlini.

727. *Eseguire le somme seguenti:*

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)} = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

R. Vercellin.

Risoluzione dei sigg. **Costa, Bongini, Brenta**, R. I. T. di *Torino* e **Pelosio**, R. I. T. di *Venezia*.

1°. Essendo

$$\frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{r(r+2)}, \qquad (a)$$

ed

$$\frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1},$$

facendo successivamente $r = 1, 2, 3, \ldots, n$, abbiamo

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots$$

$$\ldots, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

e sommando membro a membro

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r(r+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \qquad (1)$$

Abbiamo analogamente,

$$\frac{2}{r(r+2)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+2},$$

e facendo successivamente $r = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{2}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{2.4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}, \ldots$$

$$\ldots, \quad \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \quad \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2},$$

e sommando membro a membro

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{2}{r(r+2)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)},$$

e dunque,

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}. \qquad (2)$$

Dalle (1) e (2), tenendo conto della (a), abbiamo ora

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{n}{n+1} - \frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2°. Si ha

$$\frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)} = \frac{1}{r(r+1)(r+2)} - \frac{1}{r(r+1)(r+3)}.$$

Il valore del minuendo è già noto (parte 1ª), e possiamo calcolare il sottraendo collo stesso procedimento. Si ha infatti

$$\frac{2}{r(r+1)(r+3)}=\frac{1}{r(r+1)}-\frac{1}{r(r+3)}, \qquad \frac{3}{r(r+3)}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r+3},$$

ed in quest'ultima relazione facendo successivamente $r=1, 2, 3, \ldots, n$, è

$$\frac{3}{1.4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}, \qquad \frac{3}{2.5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}, \qquad \frac{3}{3.6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}, \ldots$$

$$\ldots, \quad \frac{3}{(n-2)(n+1)}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1},$$

$$\frac{3}{(n-1)(n+2)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}, \qquad \frac{3}{n(n+3)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3},$$

e sommando membro a membro

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{3}{r(r+3)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)=$$

$$=\frac{11}{6}-\frac{3n^2+12n+11}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{11n^3+48n^2+49n}{6(n+1)(n+2)(n+3)},$$

da cui

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{r(r+3)}=\frac{11n^3+48n^2+49n}{18(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Dunque

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{2}{r(r+1)(r+3)}=\frac{n}{n+1}-\frac{11n^3+48n^2+49n}{18(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{7n^3+42n^2+59n}{18(n+1)(n+2)(n+3)},$$

ossia,

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{r(r+1)(r+3)}=\frac{7n^3+42n^2+59n}{36(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Abbiamo così

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{r(r+1)(r+2)(r+3)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}-\frac{7n^3+42n^2+59n}{36(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{9n(n+3)^2-7n^3-42n^2-59n}{36(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n[n(n+6)+11]}{18(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Osservazione. — Generalizzando le formule precedenti si trova

$$\frac{1}{r(r+1)(r+2)\ldots(r+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{r(r+1)\ldots(r+k-1)}-\frac{1}{(r+1)(r+2)\ldots(r+k)}\right),$$

dalla quale

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{r(r+1)\ldots(r+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right),$$

ed al limite

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{r(r+1)\ldots(r+k)}\right)=\frac{1}{k.(k!)}.$$

Altre risoluzioni dei sigg. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Casalasco** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cernuschi**, **Mosca** e **Terracini**, R. I. T. di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **De Castro** e **Valagussa**, R. L. di *Milano*; **Gargano** e **Giardina**, R. L. di *Bari*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*.

Le risoluzioni inviate da questi giovani di poco differiscono da quella che abbiamo riportata. È rimarchevole la risoluzione del sig. De Castro per la rapidità colla quale giunge dalle relazioni date all'espressione generale.

C. Alasia.

729. *Risolvere l'equazione*

$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0.$$

E. N. Barisien.

Risoluzione del sig. **Naccarati**, R. I. T. di *Benevento*.

L'equazione data può scriversi:

$$(x + a + b)\,[x^2 - (a + b)\,x + (a^2 - ab + b^2)] = 0$$

che si scinde nelle due

$$x + a + b = 0, \qquad \text{donde} \qquad x = -(a + b)$$

$$x^2 - (a + b)\,x + (a^2 - ab + b^2) = 0 \quad \text{donde} \quad x = \begin{cases} \frac{1}{2}\,[(a+b) + (a-b)\sqrt{-3}], \\ \frac{1}{2}\,[(a+b) - (a-b)\sqrt{-3}]. \end{cases}$$

Risoluzione del sig. **Ghè**, R. I. T. di *Firenze*.

Ponendo $x = by - a$ l'equazione diventa

$$b^3\,(y^3 + 1) - 3ab^2y\,(y + 1) + 3a^2b\,(y + 1) = 0$$

che si scinde nelle altre due

$$y + 1 = 0 \quad \text{da cui } y = -1 \quad \text{e perciò} \quad x = -(a + b)$$

$$b^3\,(y^2 - y + 1) - 3ab^2y + 3a^2b = 0$$

da cui si ricava facilmente y, e quindi si deduce x.

Risoluzione del sig. **Casalasco**, R. I. T. di *Cuneo*.

Ponendo $x = (a + b)\,y$, l'equazione diventa

$$(a + b)^3\,y^3 - 3ab\,(a + b)\,y + a^3 + b^3 = 0$$

che può scrivere dividendo prima per $(a + b)$ e poi raggruppando

$$(a^2 + b^2)\,(y^3 + 1) + ab\,(y + 1)\,(2y^2 - 2y - 1) = 0$$

ossia

$$(g + 1)\,[(a^2 + b^2)\,(y^2 - y + 1) + ab\,(2y^2 - 2y - 1)]$$

che si scinde in altre due che sono rispettivamente di 1° e di 2° grado.

Risolvettero nel primo modo l'equazione proposta i signori **De Castro**, R. L. di *Milano*; **Bonetti**, R. L. di *Arezzo*; **Bianchi**, **Paoletti** e **Sadun**, R. I. di *Livorno*; **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **Terracini**, R. L. Cavour, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa**, **Vercellin**, R. I. T. e **Costa**, I. T. Privato di *Torino*; **Fiachetti** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **La Spina** e **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Giardina**, R. I. T. di *Bari*; **Maracci**, **Urbani** e **Rinaldi**, R. I. T. di *Ancona*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Cera**, **Formato**, **Solonia** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **Belvederi**, R. L. di *Bologna*; **Patellani**, R. L. Volta di *Como*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*.

Il sig. **Cardenas** risolve nello stesso modo l'equazione, e dice che essa ha tre soluzioni (dimenticando di aggiungere *reali*) solo quando $a = b$.

Sono errate le risoluzioni dei sigg. **Bongini** e **Chiarugi**.

QUISTIONI DA RISOLVERE

751. Si considerino due rette perpendicolari Ox, Oy, due circonferenze l'una di raggio a tangente in O a Ox, l'altra di raggio b tangente in O ad Oy, ed infine una retta r che ruoti attorno ad O. La retta r incontra le due circonferenze nei punti A, B che si proiettano in A′, B′ sulla Ox. Studiare la variazione della lunghezza del segmento A′B′.

(Baccalaureato in matematiche. Besanzone, Ottobre 1905.)

752. Un blocco di vetro ha la forma di un prisma retto a base quadrata. Numeriamo le sue faccie laterali consecutive con 1, 2, 3, 4. Un fascio sottilissimo di luce bianca, situato in un piano perpendicolare all'asse del prisma, e formato di raggi paralleli cade obliquamente sulla faccia 1 si riflette sulla faccia 2 adiacente, ed esce per la faccia 3 parallela ad 1.

1°. Dimostrare che i fasci colorati convergenti sono paralleli e dire in qual ordine si succedono i colori per un osservatore che si sposti normalmente alla faccia 3 allontanandosi da essa.

2°. I fasci convergenti sono ricevuti sopra una lente acromatica avente l'asse parallelo a questi raggi. Al di là della lente si colloca uno schermo. In qual ordine si succederanno i colori sullo schermo, secondo che questo sarà più o meno vicino alla lente che il suo fuoco principale? Che cosa si vedrà quando lo schermo sarà esattamente nel fuoco?

(Baccalaureato classico in lettere e matematiche. Parigi, Luglio 1905.)

753. Essendo dati in un piano tre rette a, b, c ed un punto O condurre per O una retta che tagli le tre rette in tre punti A_1, B_1, C_1 tali che sia

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{m}{n}$$

essendo m, n segmenti dati ad arbitrio.

754. Ogni numero intero che sia scomponibile nella somma del quadrato di un numero dispari e nel triplo del quadrato di un numero dispari, può essere decomposto nella stessa forma almeno in due altri modi. G. L.

755. Costruire " geometricamente " un triangolo, conoscendone un lato, l'angolo opposto e la bisettrice relativa. VACCHI.

756. Costruire un triangolo, essendo dati $b-c$, $\beta-\gamma$ e $r-r_a$.

757. Essendo S l'area d'un triangolo ABC, A' il punto d'incontro delle rette BC, H_bH_c, si ha

$$\overline{AA'}^2 = \frac{2S}{\operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C}\left(1 + \frac{4}{(\tan B - \tan C)^2}\right).$$

758. Risolvere l'equazione

$$x^4 + ax^3\sqrt{3} + a^4 = 0.$$

R. VERCELLIN.

759. Risolvere il sistema di equazioni

$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y = \tfrac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}(x+y) = \tfrac{1}{2}.$$

G. PESCI.

760. Dimostrare l'identità

$$\sqrt{a^2+a+1+(a+1)\sqrt{a^2+1}} - \sqrt{a^2-a+1-(a+1)\sqrt{a^2+1}} =$$
$$= \sqrt{a^2-a+1+(a-1)\sqrt{a^2+1}} + \sqrt{a^2+a+1-(a+1)\sqrt{a^2+1}}.$$

E. N. BARISIEN.

N. B. — Le soluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. LAZZERI, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 31 maggio 1906.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 22 aprile 1906

Ponendo $x^2 = z$ e risolvendo in numeri interi l'equazione

$$1111y - 3z = 8$$

si ha

$$z = \tfrac{1}{3}(1111y - 8) = 370y - 2 + \tfrac{1}{3}(y - 2)$$

e quindi una soluzione è $y = 9$, $z = 738$ e perciò tutte le soluzioni saranno date dalle formule

$$y = 2 + 3\theta, \qquad z = 738 + 1111\theta \qquad (\theta \text{ intero}).$$

Poichè deve essere $y \leqq 9$, dovrà essere $\theta < 3$ e poichè z deve essere dispari, si potrà solo avere $\theta = 1$; in questo caso è $y = 5$ e $z = 1849$ e perciò $x = \sqrt{1849} = 43$; i numeri richiesti sono dunque 41, 43 e 45.

Infatti $41^2 + 43^2 + 45^2 = 1681 + 1849 + 2025 = 5555$.

Inviarono risoluzioni i predetti sigg. **Abbrescia**, **Belvedere**, **Belvederi**, **Bongini**, **Brenta**, **Cera**, **Cernuschi**, **Cirillo**, **Cristini**, **D'Angelo**, **De Bei**, **Formato**, **Giardina**, **Gneme**, **Levi**, **Lucaroni**, **Maracci Marra**, **Miozzi**, **Montanari**, **Naccarati**, **Priore**, **Salonia**, **Scopinich**, **Sosso**, **Ventola** e **Vercellin** ed i sigg. **Angrisani**, L. P. di *Nocera Inferiore*; **Baduel**, R. I. T. di *Perugia*; **Casalasco** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cellini** e **Ravajoli** di *Forlì*; **Costa G.** e **Galleano**, R. I. T. e **Costa I.** di *Torino*; **Guerrini** e **Podesti**, R. L. di *Pesaro*; **Lorenz**, R. I. T. di *Milano*; **Pelosio**, R. I. T. di *Venezia*; **San Mauro**, R. I. T. di *Bari*.

G. C.-L.

248. *Trovare un quadrato perfetto di 4 cifre che abbia le prime due eguali fra loro ed eguali fra loro le ultime due.* ***

Risoluzione.

Per i dati del problema dovremo avere

$$1100x + 11y = z^2, \qquad \text{cioè} \qquad 11(100x + y) = z^2$$

e perciò sarà $z^2 = 11^2 . m^2$ e la precedente equazione diviene

$$100x + y = 11m^2. \tag{1}$$

Se il numero $100x + y$ è multiplo di 11, anche $x + y$ deve essere multiplo di 11; ma poichè x e y debbono essere inferiori a 10, sarà

$$x + y = 11 \tag{2}$$

e quindi la (1) diviene

$$99x + 11 = 11m^2, \qquad \text{cioè} \qquad 9x + 1 = m^2.$$

Poichè deve essere $z^2 < 10000$, sarà $m^2 < \frac{10000}{121}$ e quindi m^2 è un numero di due cifre; ma fra i quadrati perfetti di due cifre l'unico che sia congruo a 1 rispetto al modulo 9 è 64 e quindi è $9x + 1 = 64$, da cui $x = 7$ e, per la (2), $y = 4$. Il numero richiesto è dunque 7744 ($= 88^2$).

Inviarono risoluzioni i predetti sigg. **Abbrescia**, **Angrisani**, **Belvedere**, **Belvederi**, **Bongini**, **Brenta**, **Casalasco**, **Cellini**, **Cera**, **Cernuschi**, **Cirillo**, **Costa G.**, **Costa I.**, **Cristini**, **D'Angelo**, **De Bei**, **Formato**, **Galleano**, **Gargano**, **Giardina**, **Gneme**, **Guerrini**, **Levi**, **Lucaroni**, **Maracci**, **Marra**, **Marchisio**, **Miozzi**, **Montanari**, **Naccarati**, **Pelosio**, **San Mauro**, **Salonia**, **Scopinich**, **Sosso**, **Ventola** e **Vercellin**.

G. C.-L.

249. *I membri di una società pagano ciascuno un'eguale quota per avere un fondo di* m *lire. L'anno passato, la società avendo* p *membri meno, ciascuno pagava* n *lire di più per lo stesso fine. Quanti sono gli attuali soci e quant'è la quota di ciascuno?*
(*Caso particolare:* m = 150, p = 5, n = 1). ***

Risoluzione.

Indicando con x il numero dei soci attuali e con y il numero di lire che paga ciascuno di essi, dovremo avere

$$xy = m \tag{1}$$
$$(x - p)(y - n) = m,$$

dalle quali si ha $nx - py = px$ e quindi

$$y = \frac{n(x - p)}{p}. \tag{2}$$

Sostituendo nella (1) e riducendo, si ha

$$nx^2 - npx - mp = 0.$$

Questa equazione, avendo una variazione ed una permanenza, ha una radice positiva ed una negativa; soltanto la prima è accettabile. Risolvendo si ha

$$x = \frac{1}{2n}\left(np + \sqrt{np(np + 4m)}\right). \tag{3}$$

e, per la (2):

$$y = \frac{1}{2p}\left(-np + \sqrt{np(np + 4m)}\right). \tag{4}$$

Affinchè x e y siano interi occorre innanzi tutto che sia

$$np(np+4m)=k^2 \quad (k \text{ intero}) \qquad \text{cioè} \qquad np+4m=npk^2 \quad (k \text{ intero})$$

ossia

$$m=\tfrac{1}{4}np(k^2-1). \tag{5}$$

Se tale condizione è soddisfatta, dalle (3) (4) si ha

$$x=\tfrac{1}{2}p(k+1), \qquad y=\tfrac{1}{2}n(k-1).$$

È facile vedere che x e y hanno valori interi se n e p sono entrambi pari o entrambi dispari, poichè, a causa della (5), se n e p sono dispari k^2-1 è pari e quindi sono pari $k-1$ e $k+1$.

Per $m=150$, $n=1$, $p=5$ si ha dalle (3) (4)

$$x=30, \qquad y=5$$

cioè, attualmente la società ha 30 soci, ciascuno dei quali paga 5 lire.

Infatti $30\times5=150$; $(30-5)\times(5+1)=25\times6=150$.

Inviarono risoluzioni i predetti sigg. **Abbrescia, Angrisani, Baduel, Belvedere, Belvederi, Bongini, Brenta, Casalasco, Cera, Cerusechi, Cirillo, Costa G., Costa I., D'Angelo, De Bei, Formato, Galleano, Gneme, Guerrini, Levi, Lorenz, Lucaroni, Maracci, Marchisio, Marra, Miozzi, Montanari, Naccarati, Pelosio, Podesti, Priore, Ravajoli, Salonia, San Mauro, Scopinich, Sosso, Ventola** e **Vercellin**, ed il sig. **Giansuzzi**, L. P. di *Maglie* (Lecce).

G. C.-L.

GIUOCHI PROPOSTI.

258. Costruire internamente a un triangolo ABC un triangolo A'B'C' in modo che i vertici A', B', C' siano rispettivamente i punti medi di B'C, C'A, A'B.

259. Due montagne alte l'una 1200 *m.*, e l'altra 2000 *m.* si trovano in due isole vicine, e la distanza delle loro sommità è di 36 *km.* Dalla sommità di una di esse si vede l'altra emergere esattamente sull'orizzonte.

Da questi dati ricavare il raggio della terra, supposta sferica.

C. Ciamberlini.

260. Trovare tre numeri tali che la metà del 1°, la terza parte del 2° e la quarta parte del 3° abbiano per somma 9, e il doppio del 1° il triplo del 2° e il quadruplo del 3° abbiano per somma 99.

261. Quali sono gli angoli le cui funzioni trigonometriche sono espresse da sei frazioni i termini delle quali corrispondono alle disposizioni due a due di tre numeri interi consecutivi? (A quale altro problema equivale questa quistione?)

262. In quanti modi si possono disporre le 28 pedine del *domino* seguendo le regole del giuoco?

263. Un tale in una lieta occasione di famiglia distribuì L. 100 fra le sue persone di servizio, dando ad alcune L. 15, ad altre 17 e ad altre infine 19. Si domanda quante persone aveva al suo servizio e come fece la repartizione.

G. C.-L.

264. In Oviedo, città delle Asturie, si trova la chiesa di San Salvatore, fabbricata a spese dell'antico principe Silone. La lapide sepolcrale del principe porta l'iscrizione seguente:

t	i	c	e	f	s	p	e	c	n	c	e	p	s	f	e	c	i	t
i	c	e	f	s	p	e	c	n	i	n	c	e	p	s	f	e	c	i
c	e	f	s	p	e	c	n	i	r	i	n	c	e	p	s	f	e	c
e	f	s	p	e	c	n	i	r	p	r	i	n	c	e	p	s	f	e
f	s	p	e	c	n	i	r	p	o	p	r	i	n	c	e	p	s	f
s	p	e	c	n	i	r	p	o	l	o	p	r	i	n	c	e	p	s
p	e	c	n	i	r	p	o	l	i	l	o	p	r	i	n	c	e	p
e	c	n	i	r	p	o	l	i	[illegible]	i	l	o	p	r	i	n	c	e
p	e	c	n	i	r	p	o	l	i	l	o	p	r	i	n	c	e	p
s	p	e	c	n	i	r	p	o	l	o	p	r	i	n	c	e	p	s
f	s	p	e	c	n	i	r	p	o	p	r	i	n	c	e	p	s	f
e	f	s	p	e	c	n	i	r	p	r	i	n	c	e	p	s	f	e
c	e	f	s	p	e	c	n	i	r	i	n	c	e	p	s	f	e	c
i	c	e	f	s	p	e	c	n	i	n	c	e	p	s	f	e	c	i
t	i	c	e	f	s	p	e	c	n	c	e	p	s	f	e	c	i	t

In quante maniere, partendo dalla S e procedendo verso i 4 vertici *t, t, t, t*, si può leggere l'iscrizione: *Silo princeps fecit?*

Generalizzare il giuoco.

(Dalla raccolta di esempi e quesiti di Aritmetica ed Algebra di E. Heis.)

Le risoluzioni si accettano fino al 31 maggio 1906.

Errata-Corrige. — Nella 3ª pagina della copertina del Fasc. V la 2ª delle equazioni (3) deve avere per secondo membro 19 invece di 27.

ANNO IX — MAGGIO 1906 — FASC. VII

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al **Periodico di Matematica**

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo; devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Alcune identità e loro applicazioni. (R. VERCELLIN.)

70ª quistione a concorso.

Risoluzione della 63ª quistione a concorso.

Risoluzioni delle quistioni 710, 722, 723, 731, 732, 733, 734, 735, 738 e 740.

Quistioni da risolvere 761-770.

Copertina:

Spiegazione dei giuochi 245, 251 e 252.

Spiegazione dell'11° giuoco a concorso.

Giuochi proposti 265-274.

LIVORNO

RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE

LIBRAIO-TIPOGRAFO

1906

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, alla quale destiniamo tre pagine della copertina, rivolgersi al redattore

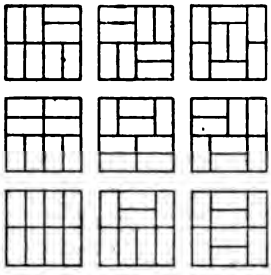
Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes, a Savona,** *Via Luigi Corsi, Villa Garroni.*

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 245, 251 e 252.

245. *In quanti e quali modi si possono disporre 8 rettangoli di dimensioni* a, 2a *per formare un quadrato?*

G. C.-L.

Risoluzione.



Hanno trovato esattamente le 9 soluzioni fondamentali i sigg **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Gemelli**, R. I. T. di *Milano*; **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

Inviarono risoluzioni incomplete o sovrabbondanti (avendo considerato come soluzioni diverse quelle che si ottengono l'una dall'altra con movimenti delle figure) i sigg. **Abbrescia**, **Carlucci**, **Cristini** e **Giardina**, R. I. T. di *Bari*; **Cera**, **Formato**, **Salonia** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **Cirillo**, **Lucaroni** e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*; **Fusco** di *Benevento*; **Gneme** di *Roma*; **Minguzzi** e sig.na **Montanari**, L. P. di *Ravenna*; **Orsaria** e **Tosi** I. T. P. di *Varese*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Zaglia** (?).

G. C.-L.

251. *Una bicicletta che ha la velocità* v_1 *parte dalla città* A *per la città* B, *che ha una distanza* d *da quella; dopo un certo tratto di strada incontra una automobile che ha la velocità* v_2 *ed è diretta verso* A. *Questa, giunta in* A, *si trattiene in città un tempo* t *e riparte per* B *con la stessa velocità* v_2, *sorpassa la bicicletta prima di giungere in* B *ed arriva in questa città un tempo* τ *prima della bicicletta. Si domanda in quali punti della strada* AB *si siano incontrati ciascuna volta i due veicoli.*

G. C.-L.

Risoluzione.

Sieno M ed N rispettivamente i punti nei quali i due veicoli si sono incontrati la 1a e la 2a volta; ponendo $|AM| = x$ e $|BN| = y$, sarà $|MN| = d - x - y$.

Per i dati del problema e per la nota formula del moto uniforme, dovremo avere

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v_1}(d - x - y) = \dfrac{1}{v_2}(d - y + x) + t \\ \dfrac{y}{v_1} - \dfrac{y}{v_2} = \tau \end{cases}$$

La 2a equazione dà

$$y = \frac{v_1 v_2 \tau}{v_2 - v_1}$$

e, sostituendo nella 1a, dopo semplici riduzioni, si ha

$$x = \frac{d(v_2 - v_1) - v_1 v_2 (t + \tau)}{v_1 + v_2}.$$

Le condizioni di possibilità del problema sono

$$v_2 > v_1 \qquad \text{e} \qquad \frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2} > \frac{t + \tau}{d}.$$

Inviarono risoluzioni i predetti sigg. **Abbrescia**, **Belvedere**, **Bongini**, **Brenta**, **Cera**, **Cernuschi**, **Cirillo**, **Costa**, **De Bei**, **Formato**, **Gneme**, **Lucaroni**, **Montanari**, **Salonia**, **Sosso** e **Scopinich** ed i sigg. **Angrisani**, L. P. di *Nocera Inferiore*; **Baduel**, R. I. T. di *Perugia*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **D'Angelo** e **Marra**, R. S. delle Miniere di *Caltanisetta*; **Guerrini** e **Podesti**, R. L. di *Pesaro*; **Levi** e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **Maccarati**, R. L. di *Benevento*; **San Mauro**, R. I. T. di *Bari*; **Pelosio**, R. I. T. di *Venezia*.

G. C.-L.

ALCUNE IDENTITÀ E LORO APPLICAZIONI

1. Qualunque siano le quantità

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\quad a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ e_1,\ f_1,\ g_1,\ h_1$$

è identicamente verificata la relazione [1]

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2+e_1^2+f_1^2+g_1^2+h_1^2)= \\ =(aa_1+bb_1+cc_1+dd_1+ee_1+ff_1+gg_1+hh_1)^2 \\ +(ab_1-ba_1+cd_1-dc_1+ef_1-fe_1+gh_1-hg_1)^2 \\ +(ac_1-bd_1-ca_1+db_1+eg_1-fh_1-ge_1+hf_1)^2 \\ +(ad_1+bc_1-cb_1-da_1-eh_1+fg_1-gf_1-he_1)^2 \\ +(ae_1-bf_1+cg_1-dh_1-ea_1+fb_1-ge_1+hd_1)^2 \\ +(af_1+be_1-ch_1-dg_1-eb_1-fa_1+gd_1+hc_1)^2 \\ +(ag_1-bh_1-ce_1+df_1+ec_1-fd_1-ga_1+hb_1)^2 \\ +(ah_1+bg_1+cf_1+de_1-ed_1-fc_1-gb_1-ha_1)^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

Questa identità esprime il seguente

Teorema. — *Il prodotto di due quantità, ognuna delle quali è la somma di otto quadrati, si può ancora decomporre nella somma di otto quadrati.*

Si fecero molti tentativi, per ottenere una formola analoga alla (1) per il prodotto di due somme di 16 quadrati, finchè recentemente (1898) l' Urwitz ne dimostrò l'impossibilità. [2]

Dalla (1) si possono dedurre numerose identità assai notevoli.

2. Se supponiamo successivamente

$$\begin{aligned}c=d=e=f=g=h=c_1=d_1=e_1=f_1=g_1=h_1=0\,, \\ d=e=f=g=h=d_1=e_1=f_1=g_1=h_1=0\,, \\ e=f=g=h=e_1=f_1=g_1=h_1=0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

avremo rispettivamente

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)=(aa_1+bb_1)^2+(ab_1-ba_1)^2= \\ =(ab_1+ba_1)^2+(aa_1-bb_1)^2, \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)=(aa_1+bb_1+cc_1)^2+ \\ +(ab_1-ba_1)^2+(ac_1-ca_1)^2+(bc_1-cb_1)^2, \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)=(aa_1+bb_1+cc_1+dd_1)^2+ \\ +(ab_1-ba_1+cd_1-dc_1)^2+(ac_1-bd_1-ca_1+db_1)^2+ \\ +(ad_1+bc_1-cb_1-da_1)^2, \qquad (4)\end{aligned}$$

e così di seguito. Avremo quindi i seguenti

Teoremi. — *Il prodotto di due quantità, ognuna delle quali è la somma di due quadrati, si può decomporre nella somma di due quadrati.*

---

(1) Degen, *Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg*, a. 1892, t. 8, p. 4.
(2) V. il *Formulaire Mathématique*, par G. Peano, p. 321.

Il prodotto di due quantità, ognuna delle quali è la somma di tre quadrati, si può scomporre nella somma di quattro quadrati.

Il prodotto di due quantità, ognuna delle quali è la somma di quattro quadrati, può decomporsi nella somma di quattro quadrati.

Ed altre relazioni interessanti si potrebbero dedurre dalla (1) supponendo che nei fattori del suo primo membro s'annulli un numero diverso di termini.

3. Dalle (2), (3), (4), (1), supponendo eguali tra di loro tutti i termini d'un fattore del primo membro d'ognuna di esse, si trae facilmente

$$2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2, \tag{5}$$

$$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2, \tag{6}$$

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2+ \\ +(a-b+c-d)^2+(a-b-c+d)^2+(a+b-c-d)^2, \tag{7}$$

$$8(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)= \\ =(a+b+c+d+e+f+g+h)^2+ \\ +(a-b+c-d+e-f+g-h)^2+(a-b-c-d+e-f-g+h)^2+ \\ +(a+b-c-d+e+f-g-h)^2+(a-b+c-d-e+f-g+h)^2+ \\ +(a+b-c-d-e-f+g+h)^2+(a-b-c+d+e-f-g+h)^2+ \\ +(a+b+c+d-e-f-g-h)^2. \tag{8}$$

Supposto $d=0$, la (7) dà

$$4(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+ \\ +(a-b+c)^2+(a+b-c)^2. \tag{9}$$

Dalla (7) stessa, mutandovi d in $-d$ si ha

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(-a+b+c+d)^2+(a-b+c+d)^2+ \\ +(a+b-c+d)^2+(a+b+c-d)^2. \tag{10}$$

4. Le identità

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2; \tag{11}$$

$$(a^2-b^2)=(a^2+b^2)^2-(2ab)^2, \tag{11'}$$

esprimono i seguenti

Teoremi. — *Se un numero è la somma di due quadrati, anche il suo quadrato è la somma di due quadrati.*

Se un numero è la differenza di due quadrati, anche il suo quadrato è la differenza di due quadrati.

Dall' identità

$$(a^2-b^2)(a_1^2-b_1^2)=(aa_1\pm bb_1)^2-(ab_1\pm ba_1)^2, \tag{12}$$

ricaviamo:

Teorema. — *Il prodotto di due quantità, ognuna delle quali è la differenza di due quadrati, si può scomporre nella differenza di due quadrati.*

5. Se nella (3) poniamo

$$c_1=a; \qquad b_1=b; \qquad a_1=c,$$

risulta

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(b^2\pm 2ac)^2+2b^2(a\mp c)^2+(a^2-c^2)^2, \tag{13}$$

Dunque: *Il quadrato d'una quantità somma di tre quadrati, si può scomporre nella somma di quattro quadrati.*

Analogamente dalla (4) si trae

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(2ac\pm 2bd)^2+(2bc\mp 2ad)^2+ \\ +(a^2+b^2-c^2-d^2)^2; \qquad (14)$$

avremo dunque il

Teorema. — *Il quadrato d'una quantità che sia la somma di quattro quadrati si può scomporre nella somma di tre quadrati.*

Si ha poi, osservando la (3),

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)^2-(a^2+b^2+c^2-d^2-e^2-f^2)^2= \\ =4(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)=(2ad+2be+2cf)^2+ \\ +(2ae-2bd)^2+(2af-2cd)^2+(2bf-2ce)^2,$$

onde, in conclusione

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)^2=(a^2+b^2+c^2-d^2-e^2-f^2)^2+ \\ +(2ad+2be+2cf)^2+(2ae-2bd)^2+(2af-2cd)^2+(2bf-2ce)^2. \qquad (15)$$

da cui il

Teorema. — *Il quadrato d' una quantità che sia la somma di sei quadrati, si può decomporre nella somma di cinque quadrati.*

Analogamente applicando la (4) si ricava

Teorema. — *Il quadrato d'una quantità che sia la somma di otto quadrati si può scomporre nella somma di cinque quadrati.*

Finalmente, seguendo sempre lo stesso procedimento, ed applicando la (1), si giunge alla seguente conclusione:

Teorema. — *Il quadrato d' una somma di sedici quadrati si può scomporre nella somma di nove quadrati.*

6. Ed altre notevoli proprietà si possono dedurre, combinando opportunamente tra di loro i teoremi precedentemente enunciati.

Applicazioni.

I. — *Il prodotto*

$$(13x^2+18x+10)(34y^2+44y+20),$$

è la somma di due quadrati.

G. Candido.
Quist. 607 " Supplemento ".

Esso può mettersi sotto la forma

$$f(x,\ y)=[(2x+3)^2+(3x+1)^2][(3y+4)^2+(5y+2)^2],$$

e quindi applicando la (2), si ha

$$f(x,\ y)=[(2x+3)(3y+4)\pm(3x+1)(5y+2)]^2+ \\ +[(2x+3)(5y+2)\pm(3x+1)(3y+4)]^2. \qquad \text{c. v. d.}$$

II. — *L'espressione*

$$2(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1),$$

è la somma di due quadrati.

Infatti, applicando successivamente la (2) si ha

$$2(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=2(x^2+1)[(yz\pm 1)^2+(y\mp z)]^2= \\ =2[(x(yz\pm 1)+(y\mp z))^2+(x(y\mp z)-(yz\pm 1))^2];$$

e quindi per la (5)

$$2(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=[(x-1)(yz\pm 1)+(x+1)(y\mp z)]^2+ \\ +[(x+1)(yz\pm 1)-(x-1)(y\mp z)]^2. \qquad \text{c. v. d.}$$

III. — *Il quadrato dell'espressione*

$$\varphi(x) = 2x^2 + 7,$$

è la somma di tre quadrati.

Abbiamo infatti

$$\varphi(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2 + 2^2 + 1^2,$$

onde, per la (14)

$$[\varphi(x)]^2 = [(x+1)^2 + (x-1)^2 - 5]^2 + [4(x+1) \pm 2(x-1)]^2 + \\ + [4(x-1) \mp 2(x+1)]^2;$$

$$[\varphi(x)]^2 = (2x^2-3)^2 + (2x+6)^2 + (6x-2)^2 = \\ = (2x^2-3)^2 + (6x+2)^2 + (2x-6)^2. \quad \text{c. v. d.}$$

R. Vercellin.

70ª QUISTIONE A CONCORSO

Se AH_a, BH_b, CH_c sono le altezze di un qualunque triangolo ABC, si ha

$$\overline{CH_c}^2 = \pm\, \overline{BH_c \,.\, H_cA} \pm \overline{BC \,.\, H_aC}, \qquad \text{(ed analoghe)},$$

intendendo che i doppi segni sieno indipendenti l'uno dall'altro e debba scegliersi in ciascun termine il superiore o l'inferiore secondo che i due segmenti che compariscono nel termine stesso hanno eguale direzione o direzione contraria.

Dedurre da questo teorema, come casi particolari, i due notissimi teoremi di Euclide sul triangolo rettangolo.

Dedurre altresì la nota formula trigonometrica che dà $\cos(\widehat{A}+\widehat{B})$

G. Cardoso-Laynes.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 30 settembre 1906.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONE DELLA 63ª QUISTIONE A CONCORSO

Risolvere l'equazione

$$\sqrt[p]{x} + \sqrt[qp]{a - x^q} = b. \tag{1}$$

G. Candido.

La quistione proposta conteneva un errore di stampa perchè era scritta così: $\sqrt[p]{a} + \sqrt[pq]{a - x^q}$. Conforme alla (1) fu corretta e risoluta dai sigg. **De Aloysio**, R. I. T. di *Aquila*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*. Crediamo di non poter assegnare il premio perchè in tutte le risoluzioni pervenute manca un qualsiasi cenno di discussione. G. Candido.

Risoluzione. — Ponendo

$$\sqrt[p]{x} = y\,, \qquad \sqrt[pq]{a - x^q} = z\,,$$

la (1) dà luogo al sistema

$$\left.\begin{array}{r} y^{pq} + z^{pq} = a \\ y + z = b \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Il sistema (2) coll'impiego della formola di Waring si risolve per mezzo della equazione

$$a = b^n - \frac{n}{1} b^{n-2} u + \frac{n(n-3)}{1.2} b^{n-4} u^2 - \ldots \tag{3}$$

dove si è posto $pq = n$, $yz = u$. La (3) è di grado $\frac{1}{2} n$ se n è pari, di grado $\frac{1}{2}(n-1)$ se n è dispari, ed in questo caso il sistema viene ad avere una soluzione $(+\infty, -\infty)$ oppure $(-\infty, +\infty)$.

Le radici della risolvente (3) non possono essere accettate se non sotto alcune condizioni. Per fissare le idee supponiamo che si abbia nella (1) $p = q = 2$; allora il sistema (2) diviene

$$y^4 + z^4 = a\,, \qquad x + y = b$$

e la risolvente (3) è

$$2u^2 - 4b^2 u + b^4 - a = 0\,, \tag{4}$$

da cui

$$u = \frac{2b^2 \pm \sqrt{2(b^4 + a)}}{2}\,,$$

ed i valori di y e z sono dati dalla equazione

$$\xi^2 - b\xi + u = 0.$$

Ora affinchè un valore della u soddisfaccia alla questione, prendendo nella (1) i radicali col segno positivo, devono essere soddisfatte le due condizioni

$$(\alpha)\ u > 0\,, \qquad\qquad (\beta)\ \ b^2 - 4u \geqslant 0$$

Nella (4) si ha $\Delta = 2(b^4 + a)$ e poichè $a > 0$ la condizione (α) è sempre soddisfatta dalla soluzione u_2 corrispondente al segno $+$ ed è soddisfatta anche dalla soluzione u_1 corrispondente al segno $-$ soltanto se

$$2b^2 > \sqrt{2(b^4 + a)} \qquad \text{ossia} \qquad b^4 > a\,,$$

La condizione (β) porta alle altre due

$$(\beta_1)\ \ b^2 - 4u_1 \geqslant 0\,, \qquad\qquad (\beta_2)\ \ b^2 - 4u_2 \geqslant 0$$

ossia

$$(\beta_1)\ \ 2\sqrt{2(b^4 + a)} - 3b^2 \geqslant 0\,, \qquad (\beta_2)\ \ -\left(3b^2 + 2\sqrt{2(b^4 + a)}\right) \geqslant 0\,,$$

delle quali solamente la (β_1) può verificarsi, ciò che ci porta a concludere che *delle radici della* (4) *solamente la minore può dare una soluzione della equazione*

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{a - x^2} = b\,. \tag{5}$$

La (β_1) si risolve nella diseguaglianza $b^4 \leqslant 8a$, e siccome abbiamo già visto che per la radice u_1 deve essere

$$2b^2 - \sqrt{2(b^4 + a)} > 0,$$

possiamo dire che *la equazione* (5) *avrà una soluzione ed una sola se sarà soddisfatta la doppia diseguaglianza*

$$a < b^4 \leqslant 8a\,. \qquad\qquad \text{G. Candido.}$$

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI
710, 722, 723, 731, 732, 733, 734, 735, 738 E 740

710. *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = 3 \\ 2x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - 2y^3 = 36. \end{cases}$$

De Bei.

Risoluzione.

Il sistema dato può scriversi anche

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + xy\,(x-y) = 3 \\ 2\,(x^3 - y^3) - 3xy\,(x-y) = 36 \end{cases}$$

dal quale, risolvendo rispetto a $x^3 - y^3$ e $xy\,(x-y)$, si ha

$$x^3 - y^3 = 9\,; \qquad (1) \qquad\qquad xy\,(x-y) = -6. \qquad (2)$$

Dalla identità

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy\,(x-y)$$

si ha, per le (1) (2)

$$(x-y)^3 = 27$$

ossia, indicando con α una delle radici cubiche dell'unità, $x - y = 3\alpha$.

Il sistema proposto si riduce perciò all'altro

$$x + (-y) = 3\alpha$$
$$x\,(-y) = \frac{2}{\alpha},$$

e quindi x, $-y$ sono le radici dell'equazione

$$\alpha u^2 - 3\alpha^2 u + 2 = 0$$

che sono

$$\left.\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{3}{2}\alpha \pm \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\alpha}.$$

Si hanno dunque le sei seguenti soluzioni

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\alpha} \\ y = -\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\alpha} \\ y = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\alpha}. \end{cases}$$

I tre valori di α, sono, come abbiamo già detto, le radici dell'equazione $\alpha^3 - 1 = 0$ cioè, $1, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; dunque le soluzioni reali del sistema dato corrispondono ad $\alpha = 1$, cioè sono

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Inviarono risoluzioni i sigg **Algranati**, R. L. e **Sadun** di *Livorno*; **Arata**, R. L. di *Voghera*; **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa**, **Galleano**, **Levi**, **Mosca**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Casalasco** e **Chiesa**, R. L. di *Cuneo*; **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **Cera**, **Formato**, **Salonia** e **Sosso**, R. L. di *Caserta*; **Cirillo**, **Lucaroni**, **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*; **De Bei** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; sig.^{na} **Montanari** L. P. di *Ravenna*.

(G. C.-L.)

722. *Stabilire una regola per trovare la più grande frazione avente per numeratore l'unità che sia minore di una frazione data* $\frac{a}{b} < 1$.

Applicare questa regola alle frazioni $\frac{7}{22}$ *e* $\frac{113}{355}$; *poi decomporre ciascuna di queste in una somma di frazioni decrescenti aventi per numeratore l'unità.*

(Certificato d'attitudine al professorato delle scuole normali in Francia. Concorso del 1905.)

Risoluzione del sig. **Sadun**, R. L. di *Livorno*.

Indicando con n il denominatore della frazione, si deve avere

$$\frac{1}{n} < \frac{a}{b} < \frac{1}{n-1} \qquad \text{cioè} \qquad n > \frac{b}{a} > n-1.$$

Applicando successivamente questa regola, si trova essere n uguale alla parte intera del quoziente $\frac{b}{a}$ aumentata di uno.

$$\frac{7}{22} = \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{660}, \qquad \frac{113}{355} = \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{609} + \frac{1}{864780}.$$

Risoluzioni sostanzialmente analoghe dei sigg. **Baduel**, R. I. T. di *Perugia*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa** e **Mosca**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Casalasco** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **De Castro** e **Valagussa**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Della Mura**, **Gargano**, **Giardina** e **San Mauro**, R. I. T. di *Bari*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Maracci**, **Rinaldi** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*.

723. *Quali sono i valori che si può dare ad* x, *affinchè esista un angolo* α *tale che*

$$\cos\alpha = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}.$$

(Concorso per l'Istituto nazionale agronomico di Francia, 1905.)

Risoluzione del sig. **Sadun**, R. L. di *Livorno*.

Si deve avere $\left(\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right)^2 \leqslant 1$, ovvero $(x^2 - 5x + 4)^2 - (x^2 - 4)^2 \leqslant 0$, cioè $(2x^2 - 5x)(8 - 5x) \leqslant 0$, da cui $x\left(x - \frac{8}{5}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \geqslant 0$. Se ne ricava $x \geqslant \frac{5}{2}$ oppure $\frac{8}{5} \geqslant x \geqslant 0$.

Risoluzioni analoghe dei sig. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini**, **Brenta**, **Costa G.**, **Costa I.**, **Cernuschi**, **Galleano** e **Mosca**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Bonetti**, R. L. di *Arezzo*; **Casalasco**, **Fiachetti** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cera**, **Formato**, **Salonia** e **Sosso**, R. L. di *Caserta*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Castro**, R. L. di *Milano*: **Ghè**, R. I. T. di *Firenze*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Manzi**, L. di *Domodossola*; **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

731. *Dato il sistema*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x + y + z = b, \qquad y^2 = xz,$$

determinare per a^2 *e* b *coppie di valori tali che il sistema abbia soluzioni intere e positive, e trovare tali soluzioni.*

CATANIA.

Risoluzione dei sigg. **Costa G.** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.

Dalla seconda delle equazioni date si ha

$$x + z = b - y, \qquad x^2 + z^2 = b^2 + y^2 - 2(by + xz),$$

e sostituendo ad xz il suo valore y^2, si ha

$$x^2 + z^2 = b^2 - 2by - y^2.$$

Questo valore introdotto nella prima equazione dà:

$$b^2 - 2by = a^2, \qquad \text{da cui} \qquad y = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Dalla seconda, dopo aver sostituito questo valore, si ricava

$$x + z = b - \frac{b^2 - a^2}{2b} = \frac{a^2 + b^2}{2b},$$

e dalla terza,

$$xz = \left(\frac{a^2 - b^2}{2b}\right)^2.$$

Possiamo quindi costruire l'equazione

$$4b^2u^2 - (a^2 + b^2)\,2bu + (a^2 - b^2)^2 = 0,$$

dalla quale si ha

$$\left.\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{10a^2 - 3(a^4 + b^4)}}{4b}. \qquad (\alpha)$$

Discussione. — I valori di x, y, z saranno evidentemente positivi sempre che sarà $b^2 > a^2$, cioè $b > a$ e $10a^2 \geqslant 3(a^4 + b^4)$.

Poniamo $\dfrac{b^2 - a^2}{2b} = \varphi$, indicando con φ un numero intero e positivo, e sarà, $a^2 = b^2 - 2b\varphi$, valore che introdotto in (α) ci dà

$$\left.\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(b - \varphi \pm \sqrt{b^2 - \varphi(2b + 3\varphi)}\right),$$

valore che potrà essere intero e positivo se il trinomio sotto al radicale sarà un quadrato perfetto.

Tale trinomio si può scrivere

$$b^2 - \varphi(2b + 3\varphi) = (b + \varphi)(b - 3\varphi),$$

e facendo

$$b + \varphi = k^2(b - 3\varphi),$$

ove k è un numero intero qualunque, abbiamo

$$(1 + 3k^2)\,\varphi - (k^2 - 1)\,b = 0,$$

dalla quale equazione

$$\varphi = (k^2 - 1)\,\theta, \qquad b = (3k^2 + 1)\,\theta$$

essendo θ un numero intero e positivo arbitrario.

Questi due ultimi valori insieme alla relazione $a^2 = b^2 - 2b\varphi$ dànno le condizioni alle quali devono soddisfare a e b affinchè il sistema dato possa avere soluzioni intere e positive.

Le risoluzioni dei sigg. **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Marchisio** e **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Pomodoro**, R. L. di *Molfetta*; **Cera. Formato** e **Salonia**, R. L. di *Caserta*; **Boselli**, R. L. di *Roma* e **Macchi**, R. I. T. di *Varese*, non differiscono dalla precedente se non in qualche punto della discussione. Il sig. **Naccarati**, R. L. di *Benevento*, non completa la risoluzione nè quindi la discute.

C. Alasia.

732. *Risolvere le equazioni*

$$x(x - 3a)^2 + a(3x - a)^2 = 0;$$
$$8(x - a)(x - 3a)^2 + a(7x - 9a)^2 = 0;$$
$$(x - a)(x - 4a)^2 + a(3x - 4a)^2 = 0.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzioni sostanzialmente uguali dei sigg. **Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa F. A., Costa G.** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Daddi**, R. L. di *Ravenna*; **Bassi, De Castro** e **Valagussa**, R. L. di *Milano*; **Bianchi, Marenco** e **Priami**, R. I. T. di *Livorno*; **Casalasco, Chiesa** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Pomodoro**, R. L. di *Molfetta*; **Borracci, Castaldi** e **Ghè**, R. I. T. di *Firenze*; **Boccetti**, R. L. di *Arezzo*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Giannuzzi**, R. L. di *Maglie*; **Campetti**, R. I. T. di *Lucca*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Cera, Formato** e **Salonia**, R. L. di *Caserta*; **Maracci, Rinaldi** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **De Blasio** e **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **Macchi** e **Mazzucchelli**, R. I. T. di *Varese*.

Posto

$$y = \frac{x}{a} \tag{α}$$

le tre equazioni proposte diventano rispettivamente

$$y(y-3)^2 + (3y-1)^2 = 0\,, \tag{1}$$
$$8(y-1)(y-3) + (7y-9)^2 = 0\,, \tag{2}$$
$$(y-1)(y-4)^2 + (3y-4)^2 = 0\,. \tag{3}$$

a) La (3) può scriversi

$$y^3 = 0\,,$$

per cui

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0\,.$$

b) Posto $y = z - 1$, per cui $z = y + 1$, la (1) diviene

$$(z-1)(z-4)^2 + (3z-4)^2 = 0\,,$$

e perciò

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0\,: \qquad y_1 = y_2 = y_3 = -1\,.$$

c) La (2) si trasforma successivamente come segue:

$$8(y-1)(y-3)^2 + [8(y-1) - (y+1)]^2 = 0\,,$$
$$8(y-1)[(y-3)^2 + 8(y-1)] + (y+1)^2 - 16(y+1)(y-1) = 0\,,$$
$$8(y-1)(y+1)^2 + (y+1)^2 - 16(y+1)(y-1) = 0\,,$$
$$(y+1)(8y^2 - 15y + 9) = 0\,;$$

e quindi,

$$y_1 = -1\,; \qquad y_{2,3} = \frac{3(5 \pm i\sqrt{7})}{16}\,.$$

Le radici delle equazioni proposte sono dunque rispettivamente,

$$x_1 = x_2 = x_3 = -a\,,$$
$$x_1 = -1\,, \qquad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{3(5 \pm i\sqrt{7})}{16}\,a\,,$$
$$x_1 = x_2 = x_3 = 0\,.$$

C. Alasia.

733. *Risolvere la seguente equazione:*

$$\operatorname{tang} 2x = 8\cos^2 x - \operatorname{cotg} x.$$

U. Perelli.

1ª **Soluzione**, dei sigg. **Costa G.**, R. I. T. di *Torino*; **Maracci, Rinaldi** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Naccarati**, R. L. di *Benevento*.

L'equazione proposta si può scrivere

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = 8\cos^2 x - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,, \tag{1}$$

ossia

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x + \cos 2x \cos x = 4 \cos x \operatorname{sen} 2x \cos 2x ,$$

e quindi

$$\cos x = 2 \cos x \operatorname{sen} 4x .$$

Sarà dunque

$$\cos x = 0 , \qquad (2) \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} 4x = \tfrac{1}{2} , \qquad (3)$$

da cui

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} , \qquad (4) \qquad \text{e} \qquad x = k\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{24} ; \qquad (5)$$

e queste sono tutte, e sole, le radici della equazione proposta.

Un procedimento analogo, ma un po' meno semplice, seguirono i sigg. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Chiarugi**, R. I. T. di *Firenze*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Bianchi**, R. I. T. di *Livorno*; **Cera**, **Salonia** e **Formato**, L. P. di *Caserta*. A questi vanno aggiunti: i sigg. **Ghè**, R. I. T. di *Firenze* e **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*, i quali non tennero conto della soluzione (4); i sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Campetti**, R. I. T. di *Lucca*, i quali, non solo caddero nella inesattezza ora accennata, ma, invece della (5), dettero soltanto la soluzione particolarissima $\frac{\pi}{24}$.

2ª **Soluzione** dei sigg. **Marenco di Moriondo**, R. I. T. di *Livorno*; **Terraccini**, R. L. di *Torino*; **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Bonelli**, R. L. di *Arezzo*.

Essendo

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} , \qquad (6)$$

l'equazione proposta si trasforma nell'altra

$$\tan x = 8 \cos^2 x - \operatorname{ctn} x - 8 \operatorname{sen}^2 x, \qquad (7)$$

ossia

$$\operatorname{sen}^2 x = 8 (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x,$$

od anche

$$4 \cos 2x \operatorname{sen} 2x = 1,$$

che è equivalente alla (3) e da cui quindi si ricava la (5).

Questo procedimento è meno semplice del precedente e inoltre fa perdere la (4); ciò perchè il passaggio dalla proposta alla (7), per mezzo della (6), può esser fatto solo nella ipotesi che x sia diverso da $k\pi \pm \frac{1}{2}\pi$; questa ipotesi va quindi esaminata separatamente e si trova così la (4) stessa.

3ª **Soluzione** dei sigg. **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa G.**, **Levi**, R. I. T. e **Costa I.**, I. T. P. di *Torino*; **Casalasco**, **Chiesa** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*.

Esprimendo tutto per $\tan x$ e ordinando, si ha

$$\tan^4 x + 8 \tan^3 x + 2 \tan^2 x - 8 \tan x + 1 = 0, \qquad (8)$$

che si può facilmente risolvere col seguente, noto, procedimento. Si divida per $\tan^2 x$ e si ponga

$$\tan x - \frac{1}{\tan x} = y \qquad (9)$$

la (8) diventa allora

$$y^2 + 8y + 4 = 0, \tag{10}$$

da cui

$$y = -4 \pm 2\sqrt{3}; \tag{11}$$

quindi per la (9), sarà

$$\tan x = -(2 \mp \sqrt{3}) \pm 2\sqrt{2 \mp \sqrt{3}}, \tag{12}$$

dove il primo e il terzo doppio segno si devono corrispondere. Si hanno così *quattro* valori per $\tan x$, e questi forniscono le radici cercate.

Come si vede questo procedimento è molto meno semplice del precedente; inoltre esso richiede una discussione, dalla quale risulta che si è perduta la radice (4).

Ai precedenti risolutori va aggiunto il sig. **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*, il quale dalla (10), invece della (11), ha ricavato

$$y = 4 + 2\sqrt{3},$$

e così la sua soluzione risulta incompleta ed errata; e un altro errore ha commesso poi nel risolvere la (9) con questo valore di y, perchè sotto l'ultimo radicale della (12), invece di $2 + \sqrt{3}$ ha scritto $4 + \sqrt{3}$.

4ª **Soluzione**, corretta, del sig. **De Castro**, R. L. di *Milano*.

Moltiplicando per $\tan x$ si ha subito

$$\tan x \tan 2x + 1 = 8 \cos x \operatorname{sen} x, \tag{13}$$

ossia

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{2 \cos^2 x - 1} + 1 = 8 \cos x \operatorname{sen} x, \tag{14}$$

ossia

$$\frac{1}{\cos 2x} = 4 \operatorname{sen} 2x, \tag{15}$$

da cui la (3).

Questa soluzione, come la seconda, fa perdere la (4). Il solutore poi si è sbagliato nel passare dalla (14) alla (15), perchè, per coefficiente del secondo membro, ha trovato 8, invece di 4.

5ª **Soluzione**, del sig. **Vercellin** di *Torino*. Il procedimento è analogo a quello della seconda, ma è, molto ingegnosamente, semplificato e completato.

Posto

$$\operatorname{ctn} x = \theta, \tag{16}$$

da cui

$$2 \operatorname{ctn} 2x = \theta - \frac{1}{\theta}, \tag{17}$$

l'equazione proposta si può scrivere

$$\frac{2\theta}{\theta^2 - 1} = \frac{8\theta^2}{\theta^2 + 1} - \theta;$$

che si scinde facilmente nella equazione

$$\theta = 0, \tag{18}$$

da cui per la (16), si ha la (4), e in un'altra equazione, che, senza introdurre o togliere delle radici, si può scrivere

$$\theta^4 - 8\theta^3 + 2\theta^2 + 8\theta + 1 = 0. \tag{19}$$

Questa si risolve col procedimento già indicato, ponendo

$$\theta - \frac{1}{\theta} = z, \tag{20}$$

e si trova così

$$z = 2(2 \pm \sqrt{3}); \tag{21}$$

sarà dunque, per la (20) e per la (17),

$$\operatorname{ctn} 2x = 2 \pm \sqrt{3};$$

e di qui, essendo

$$2 + \sqrt{3} = \operatorname{ctn} \frac{\pi}{12} \qquad \text{e} \qquad 2 - \sqrt{3} = \operatorname{ctn} \frac{5\pi}{12},$$

si ha

$$x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \qquad \text{e} \qquad x = k\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{24},$$

che, insieme, equivalgono alla (5).

G. Pesci.

734. *Se sopra i lati di un triangolo qualunque* ABC *si costruiscono i triangoli equilateri* BCA′, CAB′, ABC′, *i tre segmenti* AA′, BB′, CC′ *sono eguali e s'incontrano in un punto* O, *dal quale i lati del triangolo sono visti sotto angoli eguali.*

K.

Risoluzioni sostanzialmente eguali dei sigg. **Bassi, De Castro, Spinelli** e **Valagussa**, R. L. di *Milano*; **Brenta, Costa** e **Levi**, R. I. T. di *Torino*; **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*; **Casalasco** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Manzi**, L. P. di *Domodossola*; **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*.

I cerchi circoscritti ai due triangoli equilateri ABC′ e A′BC si incontrano oltrechè in B, in un altro punto che diremo O; i due angoli al cerchio A(O)B e B(O)C sono entrambi eguali a $\frac{2}{3}$ di angolo retto e per conseguenza pure l'angolo COA è $\frac{2}{3}$ di angolo retto ed il cerchio circoscritto al triangolo ACB′ passa anch'esso per il punto O. Se ora conduciamo i segmenti OA′, OB′, OC′ si ha immediatamente dalla figura che i sei angoli consecutivi AOC′, C′OB, BOA′, A′OC, COB′, B′OA, sono tutti eguali a $\frac{2}{3}$ di retto, dunque le coppie dei segmenti OA, OA′; OB, OB′; OC, OC′; sono per diritto e le tre rette AA′, BB′, CC′ concorrono in O.

I due triangoli CBC′, ABA′ sono eguali perchè hanno gli angoli in B eguali (come somme di angoli eguali) compresi fra lati rispettivamente eguali; dunque AA′ = CC′ e analogamente, dall'eguaglianza dei due triangoli BAB′, CAC′ risulta

$$BB' = CC'.$$

Nota 1ª. — Il sig. De Castro osserva che il teorema è vero anche se i triangoli invece di essere costruiti esternamente al triangolo sono costruiti tutti dalla stessa banda, e si dimostra nella stessa guisa.

Nota 2ª. — Il sig. Scopinich osserva che il punto O è quello per il quale la somma delle distanze dei tre vertici è minima e fu trovata da Torricelli espressa dalla formula

$$\sqrt{2S\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Altre risoluzioni meno semplici, dei sigg. **Bongini, Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Borracci, Castaldi, Chiarugi** e **Ghè**, R. I. T. di *Firenze*; **Cera, Formato** e **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Ravagnan**, R. L. Foscarini di *Venezia*.

735. *Tagliare una sfera con un piano in modo che il volume di uno dei segmenti sferici ottenuti abbia un rapporto dato* K *al cono inscritto nell'altro segmento. Discussione.*

K.

Risoluzione dei sigg. **Baduel**, R. I. T. di *Perugia*; **Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa, Levi, Mosca**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*; **Casalasco, Chiesa** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cera, Formato** e **Solonia**, L. P. di *Caserta*; **Castaldi** e **Raggio**, R. I. T. di *Firenze*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Maracci, Rinaldi** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Pery**, R. I. T. di *Messina*.

Indicando con x l'altezza del segmento considerato, l'altezza del cono inscritto nell'altro segmento è $2r - x$, ed il raggio della base è $\sqrt{x(2r-x)}$, perciò i rispettivi volumi sono

$$v = \tfrac{1}{3}\pi x^2 (3r - x), \qquad v' = \tfrac{1}{3}\pi x (2r - x)^2;$$

e dovendo essere $\frac{v}{v'} = k$, si avrà

$$\frac{x(3r-x)}{(2r-x)^2} = k,$$

ossia, tenendo conto che l'altezza x non può superare il diametro,

$$f\left(\frac{x}{r}\right) = (k+1)\left(\frac{x}{r}\right)^2 - (4k+3)\frac{x}{r} + 4k = 0, \tag{1}$$

$$0 < \frac{x}{r} < 2. \tag{2}$$

Poichè k è per la natura del problema un numero positivo, si ha

$$f(0) = 4k > 0, \qquad f(2) = -2 < 0$$

perciò l'equazione (1) deve avere le sue radici reali; ma soddisfa al problema dato soltanto la minore cioè

$$\frac{x}{r} = \frac{4k + 3 - \sqrt{8k+9}}{2(k+1)}.$$

Nota. — Il sig. Baduel fa anche la seguente osservazione:

È interessante determinare per quali valori interi di k, Δ risulti un quadrato perfetto.

Ponendo $9 + 8k = m^2$, da cui

$$k = \frac{m^2 - 9}{8},$$

osserviamo che, affinchè $m^2 - 9$ sia multiplo di 8 è necessario che $m^2 - 1$ sia multiplo di 8, quindi m dovrà essere un numero dispari. Questa condizione è anche sufficiente giacchè

$$(2n+1)^2 - 1 = 4n(n+1)$$

che è sempre multiplo di 8 per qualunque valore intero di n, allora

$$k = \frac{n(n+1)}{2} - 1,$$

in cui, astrazione fatta dal problema, n può assumere qualunque valore intero da -1 a $+\infty$.

I numeri k che risultano da questa formula sono i seguenti: $-1, 0, 2, 5, 9, 14, 20, 27, 35, \ldots$ Al problema dato soddisfano tutti tranne i due primi.

Se dato un termine qualunque della serie precedente si vuol determinare il termine che lo segue, osserviamo che la relazione che lega un termine qualunque k della serie col valore corrispondente della indeterminata n, è il seguente

$$n = \frac{-1 + \sqrt{9 + 8k}}{2},$$

e siccome d'altronde, se il termine k è originato da $\frac{n(n+1)}{2}-1$, il termine seguente proviene da $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$, e la differenza fra questo e quello è $n+1$, ne consegue che, dato il termine k, per ottenere il successivo, bisognerà aggiungere

$$\frac{1+\sqrt{9+8k}}{2}.$$

738. *Dato un triangolo* ABC *condurre nel suo piano per il vertice* C *una retta* r *tale che il volume generato da* ABC *rotando attorno ad* r *sia eguale a quello di una sfera data.*

(Baccalaureato. Parigi 1905).

Risoluzione.

Indicata con x la distanza della r dal punto medio di AB, l'area generata da AB è $2\pi cx$, e quindi il volume generato dal triangolo ABC è espresso da

$$2\pi cx \,.\, \tfrac{1}{3} h_c \,.$$

Se R è il raggio della sfera data si deve perciò avere

$$\tfrac{2}{3}\pi c h_c \,.\, x = \tfrac{4}{3}\pi \,.\, R^3;$$

d'onde

$$x = \frac{2R^3}{c \,.\, h_c} = \frac{R^3}{S};$$

e perciò x è il quarto proporzionale dopo h_c, 2R, m (essendo m il terzo proporzionale dopo c, R). Costruito x, la r si otterrà conducendo da C la tangente alla circonferenza di raggio x, che ha il centro nel punto medio di AB.

Il problema ha due soluzioni, una, o nessuna secondo che

$$\frac{R^3}{S} \lesseqgtr m_c \,.$$

Osservazione. — Se, essendo $\frac{R^3}{S} < m_c$, accade che la retta r attraversi il triangolo dato, per volume generato da ABC rotando attorno ad r deve intendersi la differenza tra i volumi generati dai triangoli in cui ABC resta diviso dalla r.

Risoluzioni eguali alla precedente furono inviate dai sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Maracci**, **Rinaldi** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*. I sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia* assumono come incognita la distanza della r dal baricentro del triangolo ABC, e risolvono la quistione applicando il teorema di Guldino. Il sig. **Mosca**, R. I. T. di *Torino*, basandosi anche su qualche relazione trigonometrica, invia una risoluzione analoga a quella pubblicata; ma in seguito ad una svista commessa, invece di $x = \frac{R^3}{S}$, trova $x = \frac{R^3}{3S}$.

La *discussione* è stata omessa del tutto dai sigg. Maracci, Pelosio, Rinaldi, Scopinich e Urbani; il sig. Cutore ne invia una errata, giacchè egli dice esservi due soluzioni, una o nessuna secondo che $Sh_c \gtreqless R^3$; anche il sig. La Spina ne invia una errata, giacchè in essa si afferma che si hanno due soluzioni, una o nessuna secondo che $x \gtreqless \frac{1}{2}c$. Abbastanza buona è invece l'analisi dei varî casi fatta dal sig. Mosca.

C. Ciamberlini.

740. *Si sa che quando una sfera di raggio* R *si sposta con moto rettilineo uniforme con una velocità* V *sufficientemente piccola nell'aria, la resistenza opposta dall'attrito dell'aria a questo movimento è dato dalla formula* $F = 6\eta\pi RV$ *η essendo un coefficiente che nel sistema c. g. s. ha per valore 0,00019.*

Ciò posto, si consideri una nebbia che cada con una velocità uniforme di cm. 1,15 al secondo.

1°. Si domanda il diametro delle goccie che compongono la nebbia.

2°. Si dimostri che in questo movimento le goccie si scaldano, e si calcoli l'altezza da cui devono cadere perchè la goccia si scaldi di 0°,1.

NOTA. — *Si supporrà che tutto il calore prodotto sia impiegato a scaldare la goccia.*

(Baccalaureato. Parigi, 1905.)

Risoluzioni sostanzialmente eguali dei sigg. Piatti, I. T. P. di *Varese*; **Jodi** R. I. T. di *Modena*; **Campetti,** I. T. P. di *Lucca*. Altre risoluzioni con qualche svista nei calcoli dei sigg. **Urbani,** R. I. T. di *Ancona*; **Pelosio e Scopinich,** R. I. T. di *Venezia*.

1ª domanda. — Essendo $6\eta\pi RV$ la resistenza dell'attrito opposta dall'aria alla caduta della goccia, questa resistenza dev'essere necessariamente eguale al peso della goccia stessa che cade. Sicchè, essendo $P = \frac{4}{3}\pi R^3 . d . g$ il peso della goccia, avremo

$$F = 6\eta\pi RV, \qquad F = \tfrac{4}{3}\pi R^3 . d . g,$$

da cui si ricava

$$6\eta\pi RV = \tfrac{4}{3}\pi R^3 . d . g,$$

nella quale equazione si avrà la sola incognita r = raggio della goccia. Risolvendo rispetto ad R si trova

$$R = \sqrt{\frac{9\eta V}{2dg}},$$

e sostituendo alle lettere i loro valori, ridotti al sistema c. g. s.

$$R = \sqrt{\frac{9 \times 0{,}00019 \times 1.15}{2 \times 1 \times 981}} = \sqrt{\frac{0{,}0019665}{1962}} = \sqrt{0{,}000001} = \text{cm. } 0{,}001$$

$$\text{cm. } 0{,}001 \times 2 = \text{cm. } 0{,}002 \textit{ (diametro della goccia).}$$

2ª domanda. — Indicando con x l'altezza da cui cade con velocità costante la goccia di rugiada di massa m, il lavoro eseguito dal peso per vincere la resistenza dell'aria è $m . g$ cioè $m . 981 \times x$ ergons. D'altra parte la quantità di calore occorrente per elevare di gradi 0,1 la massa m d'acqua è calorie $m . 0{,}1$, ossia $m . 0{,}1 \times 417 \times 10^5$ ergon.

Poichè tutto il calore sviluppato nella caduta si suppone speso ad aumentare la temperatura della goccia, si avrà

$$m . 981 . x = m . 0{,}1 . 417 . 10^5,$$

ossia

$$x = \frac{0{,}1 . 417 . 10^5}{981} = 4250$$

Dunque l'altezza x è eguale a metri 42,50.

QUISTIONI DA RISOLVERE

761. In ogni triangolo la somma delle distanze del circoncentro dei lati è uguale alla somma dei raggi dei cerchi iscritto e circoscritto.

762. Risolvere l'equazione

$$abx^3 + 2ax^2(a - c) + 2bx(a + c)a^2 - c^2 = 0.$$

E. CUTORE.

763. Costruire " geometricamente " un triangolo, conoscendo un lato, la differenza degli altri due, e la differenza delle altezze ad essi corrispondenti.

M. SCOPINICH.

764. Una piastrella materiale di densità d e che ha la forma d'un quadrato ABCD di lato $2a$, mantenuta pel vertice B al disopra di una massa liquida di densità δ, vi è lasciata cadere; essa galleggia verticalmente mantenendosi col vertice D opposto a B al disotto del livello del liquido. Se ne determini la posizione di equilibrio.

C. ALASIA.

765. Risolvere l'equazione

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 36 = 0.$$

G. BOSELLI.

766. Il prodotto

$$xy\,(3x+2)\,(5y+2),$$

è la differenza di due quadrati.

767. Il quadrato dell'espressione

$$7\,(x^2+1),$$

è la somma di cinque quadrati.

R. VERCELLIN.

768. Le misure λ_1, λ_2, λ_3 dei lati dei quadrati inscrittibili in un triangolo sono date dalle formule

$$\lambda_i = \frac{2l_i A}{2A + l_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

essendo A l'area ed l_1, l_2, l_3 le misure dei lati.

769. Risolvere il sistema

$$\binom{x}{y+1} = 2\binom{x}{y}$$
$$\binom{x}{y+2} = 3\binom{x}{y}$$

G. CARDOSO-LAYNES.

770. Se quattro rette uscenti dai vertici di un tetraedro ABCD, passano per uno stesso punto O e incontrano le facce rispettivamente opposte nei punti A', B', C', D', si ha

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

K.

N. B. — Le soluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. LAZZERI, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 30 settembre 1906.

ERRATA-CORRIGE.

Nella copertina del Fasc. VI pag. 3 riga 5: invece di $y = 9$ si legga $y = 2$
" " " " " 4 giuoco 260: invece di *numeri* si legga *numeri interi e positivi.*

Ai risolutori della quistione 721 si aggiunga il sig. **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; a quelli della quistione 729 si aggiunga **Mosca**, R. I. T. di *Torino.*

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 30 maggio 1906

252. *Per indovinare un numero pensato si può fare nel modo seguente:*

1° *far triplicare il numero;*
2° „ *sottrarre 1 dal resultato;*
3° „ *triplicare il nuovo resultato;*
4° „ *aggiungere il numero pensato e dire il resultato.*

Aggiungendo 3 a quest'ultimo numero, le diecine del numero che resulta rappresentano il numero pensato. (Dare la spiegazione di questo giuoco.) ***

Risoluzione.

La spiegazione è data dall'identità $3(3x-1)+x+3=10x$.

Inviarono risoluzioni i predetti sigg. **Abbrescia**, **Angrisani**, **Baduel**, **Belvedere**, **Bongini**, **Brenta**, **Carlucci**, **Cera**, **Cernuschi**, **Costa**, **Cristini**, **De Bei**, **Formato**, **Guerrini**, **Maracci**, **Montanari**, **Naccarati**, **Orsaria**, **Pelosio**, **Podesti**, **Saionia**, **San Mauro**, **Sosso**, **Scopinich**, **Terracini** e **Vercellin** ed i sigg. **Abbati**, R. L. di *Benevento*; **Bonetti** e **Ferro**, R. L. di *Arezzo*; **Buzzi**, I. T. P. di *Varese*; **Cellini** e **Ravaioli** di *Forlì*; **Cecere**, L. P. della *Badia di Cava*; **Costa I.** di *Torino*; **Della Mura** e **Priore**, R. I. T. di *Bari*; **Fiachetti** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Lattanzi**, R. I. T. di *Pesaro*; **Manzi**, L. P. di *Domodossola*. (Una risoluzione non portava il nome dell'autore). G. C.-L.

SPIEGAZIONE DEL 11° GIUOCO A CONCORSO.

Il giuoco proposto era il seguente:

Trovare i quadrati perfetti di 4, 6 e 8 cifre che possono rappresentarsi scrivendo di seguito due numeri consecutivi. ***

Inviarono risoluzioni i sigg. **Belvederi**, R. L. Galvani di *Bologna*; **Brenta**, **Cernuschi** e **Vercellin**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco** e **Fiachetti**, R. L. di *Cuneo*; **Cera**, **Formato**, **Saionia** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

La sola risoluzione del sig.

FRANCESCO BELVEDERI del R. L. Galvani di *Bologna*

era completa; la riproduciamo integralmente ed all'autore inviamo il premio promesso.

Notiamo che una parte della quistione (per i numeri di 8 cifre) era stata posta nel *Journal de Mathématiques élémentaires* del VUIBERT e nel fasc. 1° della XXIII annata (1898) fu pubblicata una risoluzione incompleta.

G. C.-L.

Risoluzione del sig. Belvederi.

Sia x il numero formato dalle 2, 3, 4 prime cifre del quadrato perfetto y^2 cercato di 4, 6, 8 cifre. Dovrà essere:

I. — Nel caso di 4 cifre: $100x+x\pm1=y^2=101x\pm1$.

1°. Da $y^2=101x+1$, si ha $x=\frac{y^2-1}{101}=\frac{(y+1)(y-1)}{101}$; quindi 101 deve dividere il prodotto $(y+1)(y-1)$, ed essendo numero primo, anche $y\pm1$.

Sarà dunque $y\pm1=101m$, donde $y=101m\mp1$; ma y deve essere ancora $\leqslant 99$, quindi non potendo sussistere l'inequazione $101m\mp1\leqslant99$, (beninteso, nella classe dei numeri interi), da $y^2=101x+1$ non si ha alcuna soluzione.

2°. Da $y^2=101x-1=101(x-1+1)-1=101(x-1)+100$, si ha $x-1=\frac{y^2-100}{101}$; donde (come sopra) $y\pm10=101m$ ed infine $y=101m\mp10$. Quest'eguaglianza ci dà $y<100$ solo per

$$y=101-10=91.$$

Dunque in questo I caso si ha l'unica soluzione: $y^2=91^2=8281$.

II. — Nel caso di 6 cifre: $y^2=1001x\pm1$, cioè $1001x=y^2\pm1$.

1°. Da $1001x=y^2+1=7.143x$, si ha $143x=\frac{y^2+1}{7}$; quindi y^2 diviso per 7 dovrebbe dare per resto $7-1=6$, che è impossibile: *difatti, secondo che è* $y=7m$; $7m\pm1$; $7m\pm2$; $7m\pm3$, *sarà* $y^2=7^2m^2\pm2(7m)+1$; $7^2m^2\pm2(2)(7)(m)+4$; $7^2m^2\pm2(3)(7m)+9$; *quindi* y^2 *diviso per 7 dà rispettivamente per resto* 0, 1, 4, 2 *e in nessun caso* 6. c. d. d.] dunque da $1001x=y^2+1$ non si ha alcuna soluzione.

2°. Da $y^2-1=1001x=(y+1)(y-1)$, si ha $x=\frac{(y+1)(y-1)}{7.11.13}$; dovendo adunque $(y+1)(y-1)$ essere multiplo di $7.11.13$, nè potendolo essere $y+1$ (che sarebbe $y>999$), $y\pm1$ conterrà uno dei tre fattori 7; 11; 13 e $y\mp1$ conterrà gli altri. Dovrà cioè essere:

α) o $y\pm1=7m$ e quindi $y\mp1=11.13n$, donde si ha $y=7m\mp1=143\pm1$; $7m\mp2=143n$. $143n$ diviso per 7 deve dare per resto $7-2=5$ o 2. Osservando però che 143×1; 2, 3, diviso per 7 dà per resto 3, $3+3=6$; $6+3-7=2$... ossia 3, 6, 2, 5, 1, 4, 0, 3, 6..., si vede che può essere $n=\begin{cases}4, 11, 18, \ldots\\ 3, 10, 17, \ldots\end{cases}$; ma perchè y^2 sia di 6 cifre deve essere $316<y<1000$, quindi in corrispondenza: $2<n<7$; restan dunque per n i valori di 4 e 3, donde $y=4(143)+1$; $3(143)-1$; ossia in questo caso *α)* si hanno due soluzioni: $y^2=573^2=328\cdot329$; $y^2=428^2=183\cdot184$.

β) o $y\pm1=11m$ e quindi $y\mp1=7.13n$; ed allora, con metodo analogo, si trova l'unica soluzione $y^2=727^2=528\cdot529$.

γ) o finalmente $y\pm1=13m$ ed $y\mp1=7.11n$; e allora, sempre nello stesso modo, si trova l'unica soluzione $y^2=846^2=715\cdot716$.

III. — Finalmente nel caso di 8 cifre, $y^2=10001x\pm1$.

1°. Da $10001x+1=y^2$, si ha $x=\frac{y^2-1}{10001}=\frac{(y+1)(y-1)}{73.137}$, da cui, col metodo usato sopra (II, 2°, *α*), si trova l'unica soluzione $y^2=7810^2=60996100$.

2°. Da $10001x - 1 = y^2 = 10001(x-1) + 10000$, si ha $x - 1 = \frac{y^2 - 100^2}{10001} = \frac{(y+100)(y-100)}{73 \cdot 137}$, da cui, come sopra si trova $y^2 = (10001 - 100)^2 = 9901^2 = 9802 \times 9801$. Per vedere se ci sono altre soluzioni, si applica il solito metodo (III, 1°; II, 2°, a_1) e si vede che ce n'è solo un'altra

$$y^2 = 9079^2 = 82428241.$$

Dunque i numeri richiesti dal problema sono questi otto:

8281; 183184; 328329; 528529; 715716; 60996100; 98029801; 82428241.

Osservazione. — Analogamente ai casi I, 2°, e III, 2°, si può trovare una soluzione generale per ogni caso di $4n$ cifre; si avrebbe cioè $y^2 = (10^{2n} + 1 - 10^n)^2$, ossia y^2 sarebbe il quadrato di un numero di $2n$ cifre, di cui le prime n, sarebbero tutti 9, l'ultima 1, le altre zeri; in particolare, per $n = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$ si hanno i numeri già trovati $\begin{cases} 91 \\ 9901 \end{cases}$.

GIUOCHI PROPOSTI.

265. Trovare un numero di tre cifre tale che la somma dei quadrati delle cifre stesse sia eguale al numero formato dalla prima e dall'ultima. S. Catania.

266. Un individuo comprò un certo numero di colombe per L. 35; morte 2 di queste, vendette le rimanenti a mezza lira l'una più di ciò che le aveva pagate e nella vendita guadagnò 1 lira. Si domanda quante colombe aveva comperato. G. Costa.

267. In quanti modi si possono disporre n elementi in circolo?

In particolare: In quanti modi si possono disporre a tavola 8 persone?

268. In quanti modi possono disporsi circolarmente $2n$ elementi, n di una specie ed n di un'altra, ponendo la condizione che non debbano essere consecutivi due elementi della stessa specie?

In particolare: In quanti modi potranno disporsi a tavola 5 uomini e 5 signore se non debbono stare accanto due individui d'egual sesso?

269. In quanti modi n elementi si possono disporre se $n - 1$ debbono porsi circolarmente ed uno nel centro?

In particolare: In quanti modi possono disporsi 12 bambini che giuocano in circolo dandosi la mano due a due ad eccezione di uno che sta nel mezzo a loro?

270. Due persone giuocando a *briscola* fanno 60 punti ciascuno; sapendo che un giuocatore ha il doppio numero di figure dell'altro, si trovi quali carte di valore abbiano ciascuno dei due giuocatori. (A *briscola* l'asso, il 3, il re, la donna e il fante valgono rispettivamente 11, 10, 4, 3 e 2 punti.)

271. Trovare le coppie di numeri consecutivi che abbiano per somma numeri rappresentati da cifre tutte eguali.

272. Indicando con $(x, y, z, \ldots)$ il numero che si rappresenta con le cifre $x, y, z, \ldots$, dimostrare che se (a, b, c, d) e $(a+r, b+r, c+r, d+r)$ sono quadrati perfetti, se (m, n) è la radice quadrata di (a, b, c, d), $(m+r, n+r)$ è quella di $(a+r, b+r, c+r, d+r)$. Trovare per quali numeri si verifica questa proprietà.

273. Trovare un quadrato perfetto di 6 cifre (a, b, c, d, e, f) tale che, scomposte le sue cifre in gruppi binari ed ottenuti in tal modo i numeri (a, b), (c, d), (e, f), sia (c, d) doppio di (a, b) ed (e, f) triplo di (c, d). G. C.-L.

274. Trovare un numero di tre cifre nel quale la prima cifra a sinistra è l'ottava parte del numero rappresentato dalle altre due cifre e la prima cifra a destra è pure l'ottava parte del numero rappresentato dalle altre due.

***

Le risoluzioni si accettano fino al 30 settembre 1906.

È stato pubblicato:

GIULIO LAZZERI

TEORIA ELEMENTARE DELLE SEZIONI CONICHE

Prezzo L. 1,50 (*)

Questo volumetto, del formato del *Periodico di matematica* e del *Supplemento al Periodico di matematica* contiene la materia che di solito si svolge nel II biennio dei nostri istituti tecnici. In esso non si trovano le lacune che esistono in quasi tutti i trattati più in uso, e sono svolte interamente e colla massima generalità tutte le proprietà fondamentali delle sezioni coniche, che permettano di risolvere su queste importantissime curve innumerevoli quistioni e problemi, che di solito vengono risolute soltanto dopo lo studio della geometria analitica o della geometria proiettiva.

(*) Verrà spedito franco a chi invierà l'importo alla Libreria RAFFAELLO GIUSTI, Livorno.

ANNO IX — GIUGNO-LUGLIO 1906 — FASC. VIII-IX

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — **G. LAZZERI** *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1º luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al **Periodico di Matematica**

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1º novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati **anticipatamente** per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Frazioni ed equazioni irrazionali. (C. GERGIC.)

71ª quistione a concorso.

Risoluzioni delle 61ª e 67ª quistioni a concorso.

Risoluzioni delle quistioni 713, 725, 736, 737, 739, 743, 744, 745, 746, 747, 749, 750, 752, 754, 756, 757, 758, 759 e 760.

Quistioni da risolvere 771-790.

Copertina:

Spiegazione dei giuochi 250, 253, 254, 255 e 256.

LIVORNO

RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE

LIBRAIO-TIPOGRAFO

1906

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes, a Savona,** *Via Luigi Corsi, Villa Garroni.*

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 250, 253, 254, 255 e 256

250. *Trovare due numeri razionali tali che la somma dei loro quadrati sia 2.*

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Siano $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ i due numeri richiesti (a, b, c possono essere supposti interi). Si dovrà avere

$$a^2 + b^2 = 2c^2.$$

Posto

$$a = m + n; \qquad b = m - n$$

risulta

$$m^2 + n^2 = c^2.$$

Ora le soluzioni intere di quest'equazione sono date, com'è noto, da

$$m = 2xy, \qquad n = x^2 - y^2, \qquad c = x^2 + y^2,$$

essendo x, y numeri interi quali si vogliano.

Quindi i numeri richiesti saranno dati dalle formule

$$\frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{y^2 + 2xy - x^2}{x^2 + y^2}.$$

Così per es. per $x = 2$, $y = 1$ si ha la coppia di numeri $\frac{7}{5}$, $\frac{1}{5}$;

" $x = 3$, $y = 2$ " " " $\frac{17}{13}$, $\frac{7}{13}$; ecc.

Inviarono risoluzioni di questo giuoco i sigg. **Brenta, Cernuschi** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Cirillo, Lucaroni** e **Maracci**, R. I. T. e **Miozzi**, R. L. di *Ancona*; **De Bei, Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Gneme** di *Roma*; sig.na **Montanari**, R. L. di *Ravenna*; **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **San Mauro**, R. I. T. di *Bari*. In nessuno dei lavori inviati il giuoco è stato risolto esattamente.

C. Ciamberlini.

253. *Dimostrare che il prodotto di tutti i numeri della tavola-pitagorica estesa fino a 100 è un numero di 132 cifre, la 92ª delle quali (a partire da sinistra) è 6.*

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Indicando con P il prodotto dei primi 10 numeri, il prodotto di tutti i numeri della tavola pitagorica è

$$P.(2^{10}P).(3^{10}.P)\ldots(10^{10}.P) = P^{20}.$$

Ora

$$P = 3628800; \qquad \log_{10} P = 6{,}56\ldots;$$

$$\log_{10}(P^{20}) = 20 \times 6{,}56\ldots = 131,\ldots$$

perciò il prodotto di tutti i numeri della tavola pitagorica è un numero di 132 cifre.

Questo numero termina con 40 zeri e l'ultima cifra *significativa*, cioè la 92ª a partire da sinistra, è l'ultima cifra di 3628800^{20}, cioè l'ultima di 8^{20}, cioè l'ultima di 4^{40}, cioè 6.

Inviarono risoluzioni i sigg. **Abati** e **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **Abbreccia, Della Mura, Gargano, Giardina, Priore, San Mauro, Carlucci** e **Cristini**, R. I. T. di *Bari*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Bonetti**, R. L. di *Arezzo*; **Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa G., Costa L.**, R. I. T. di *Torino*; **Cera, Formato, Salonia** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **Cellini** di *Forlì*; **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*; **Fiachetti** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Guerrini** e **Podesti**, R. L. di *Pesaro*.

C. Ciamberlini.

FRAZIONI ED EQUAZIONI IRRAZIONALI

Risolvendo un' equazione letterale possiamo constatare il fatto seguente:

Se l'equazione è irrazionale le radici che si trovano con un metodo qualsiasi non soddisfano sempre l'equazione proposta, ed è quindi necessaria la discussione per trovare le relazioni fra i termini noti acciocchè le radici trovate la rendano identica.

Bellissimi esempi abbiamo nel lavoro del Ch.^{mo} prof. A. Bassi, " Equazione e sistemi irrazionali riducibili ai primi due gradi " *Supplemento,* Anno VII, Fasc. III, IV e V.

Se l'equazione è invece razionale, le radici la soddisfano sempre qualunque siano i valori assegnati ai coefficienti.

Potremo enunciare pure il teorema inverso: *Se si vuole determinare un'equazione che venga soddisfatta sempre e solamente dai valori* $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c, \ldots$ *per qualsiasi valore di* a, b, c, ... *l'equazione domandata dovrà essere razionale.*

Detta $\sqrt[m]{a}$ la radice emmesima aritmetica del numero a, la radice m-esima algebrica avrà m valori

$$r_1 \sqrt[m]{a}, \qquad r_2 \sqrt[m]{a}, \qquad r_3 \sqrt[m]{a}, \ldots r_m \sqrt[m]{a}$$

dove $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m$ sono le differenti radici dell' unità $(\sqrt[m]{1})$.

Essendo data l'equazione

$$\varepsilon_1 \sqrt[m]{a_1} + \varepsilon_2 \sqrt[n]{a_2} + \varepsilon_3 \sqrt[p]{a_3} + \ldots = 0$$

dove $a_1, a_2, a_3 \ldots$ sono funzioni di x, immaginiamo di sostituire in essa a ciascun radicale aritmetico i corrispondenti radicali algebrici, otterremo $m\,n\,p \ldots$ equazioni possibili.

Le radici $x_1, x_2, x_3 \ldots$ che si ricavano con un metodo qualsiasi *potranno* o meno soddisfare l'equazione aritmetica proposta, ma *dovranno* soddisfare certo qualcuna delle equazioni da essa ricavate nel modo indicato.

Moltiplicando fra di loro tutte le equazioni così ricavate, si ottiene una nuova equazione la quale *dovrà* essere soddisfatta sempre ed esclusivamente dalle radici $x_1, x_2, x_3, \ldots$ quindi in forza del teorema enunciato dovrà essere razionale. Si ha dunque il

Teorema. — *Il prodotto delle espressioni che si ottengono combinando in tutti i modi possibili i valori particolari algebrici di una somma di radicali, è razionale.*

Questo teorema generale è suscettibile di semplificazione per il caso particolare che tutti gl' indici dei radicali siano uguali. Per es. nell'espressione

$$\varepsilon_1 \sqrt[n]{a_1} + \varepsilon_2 \sqrt[n]{a_2} + \varepsilon_3 \sqrt[n]{a_3} + \ldots + \varepsilon_m \sqrt[n]{a_m} = 0$$

abbiamo m radicali d'indice n, e siccome ogni radicale ha n valori avremmo n^m combinazioni. Non è necessario però in questo caso prenderle tutte per ottenere un prodotto razionale. L'espressione data si può scrivere

$$\sqrt[n]{a_1}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1}}+\varepsilon_3\sqrt[n]{\frac{a_3}{a_1}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{a_m}{a_1}}\right)=0$$

e si vede subito che il prodotto delle $k=n^{m-1}$ combinazioni cui dànno luogo i termini nella parentesi è razionale, e razionale è pure $(\sqrt[n]{a_1})^k$ quindi nel caso di una somma di radicali ad indice uguale basterà eseguire il prodotto delle espressioni che si ottengono lasciando inalterato un radicale e combinando in tutti i modi possibili i valori particolari algebrici degli altri radicali.

Per $n=2$ abbiamo il caso considerato dal Ch.^{mo} prof. G. Sannia nel lavoro " Sulle frazioni il cui denominatore è somma di radicali quadratici „ *Supplemento,* Anno IV, Fasc. I, dal quale mi è venuta l'idea di un teorema generale valevole per qualsiasi esponente.

Questi due teoremi ci forniscono un metodo generale per rendere razionale un'equazione.

Più grande è il numero dei radicali, più grande è il valore degli esponenti più lungo e laborioso riesce il processo. Trattandosi di rendere razionale il denominatore di una frazione otterremo sempre la soluzione desiderata, ed è bene osservare che il prodotto dei radicali spesse volte immaginari, per i quali moltiplicheremo numeratore e denominatore della frazione data, *dovrà* essere reale. Per es.: per rendere razionale il denominatore della frazione $F=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ moltiplicheremo numeratore e denominatore per

$$(x+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})\{x+\sqrt{x}+(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})\sqrt[3]{x}\}$$
$$\{x-\sqrt{x}+(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})\sqrt[3]{x}\}\{x+\sqrt{x}+(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})\sqrt[3]{x}\}$$
$$\{x-\sqrt{x}+(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})\sqrt[3]{x}\}$$

ed otterremo

$$F=\frac{x^5-2x^4+2x^3+x^2-x^4\sqrt[3]{x}+(x^3+3x^2+x)\sqrt[3]{x^2}-(x^4-2x^3-x^2)\sqrt{x}+(2x^3-2x^2-x)\sqrt[6]{x^5}-(3x^3+x^2)\sqrt[6]{x}}{x^6-3x^5+5x^4+5x^3+x^2}.$$

Trattandosi di equazioni irrazionali, con questo metodo ci sarà sempre possibile di renderle razionali, ma siccome spesse volte otterremo delle equazioni di grado superiore, la possibilità di risolvere l'equazione proposta dipenderà dalla possibilità di risolvere l'equazione ricavata.

Molte volte però nella risoluzione delle equazioni irrazionali il lavoro può venir alleggerito colla sostituzione di una nuova incognita, e ciò è possibile nel caso che posto un radicale $\sqrt[m]{a_1}=y$ le espressioni che si trovano sotto gli altri radicali si possano esprimere mediante funzioni razionali di y.

Esempio. — Sia data l'equazione

$$\text{I} \qquad \sqrt[5]{x+7}+\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x}=0,$$

posto $\sqrt[5]{x+7}=y$ da cui $x=y^5-7$ si ha

$$\text{II} \qquad y+\sqrt[3]{y-5}-\sqrt{y-7}=0$$

$$\text{III} \qquad y+\sqrt[3]{y-5}+\sqrt{y-7}=0$$

$$\text{IV} \qquad y+(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})\sqrt[3]{y-5}-\sqrt{y-7}=0$$

$$\text{V} \qquad y+(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})\sqrt[3]{y-5}+\sqrt{y-7}=0$$

$$\text{VI} \qquad y+(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})\sqrt[3]{y-5}-\sqrt{y-7}=0$$

$$\text{VII} \qquad y+(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})\sqrt[3]{y-5}+\sqrt{y-7}=0.$$

Eseguendo il prodotto delle equazioni II in VII raccogliendo ed ordinando si ottiene l'equazione

$$y^{15}-3y^{12}-6y^{11}-22y^{10}+3y^9-2y^8+42y^7+71y^6+$$
$$+157y^5-21y^4+10y^3+147y^2-210y-368=0$$

che è razionale.

C. Gergic.

71ª QUISTIONE A CONCORSO

Se G_1, G_2 sono i baricentri di due sezioni qualunque di un prisma indefinito,

1° la retta G_1, G_2 è parallela agli spigoli del tronco di prisma;

2° il volume del tronco compreso fra le due sezioni ha per misura il prodotto delle misure di G_1 G_2 e dell'area della sezione normale;

3° tutti i tronchi del detto prisma aventi per una base comune S e l'altra base passante per G_2 sono equivalenti.

G. L.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 30 settembre 1906.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONE DELLA 61ª QUISTIONE A CONCORSO

Risolvere il sistema d'equazioni

$$\sqrt{a(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+b(\sqrt{x}+\sqrt{y})+c=0,$$
$$\sqrt{x^5}+\sqrt{y^5}=d.$$

APPLICAZIONE: $a=5$, $b=1$, $c=-10$, $d=275$.

G. CANDIDO.

Si sono ricevute venticinque risposte, di queste, tre solamente complete (**De Bei**, **Perelli** e **Vercellin**), una quarta (**De Aloysio**) manca dell'applicazione perchè ritenuta laboriosa e senza interesse. Delle prime tre abbiamo trovata la migliore quella del sig. Vercellin, ma essendo questo fuori concorso, il premio sarà sorteggiato fra i sigg. **DE BEI** e **PERELLI** nel modo seguente. Assegnato al primo i numeri dall'1 al 45 ed al secondo i numeri da 46 a 90, sarà vincitore del concorso colui che avrà il 1° estratto, nell'estrazione del R. Lotto di Roma del 21 luglio 1906.

Le altre ventuno vanno classificate come segue: **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bertoglio**, **Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Bifano**, R. L. di *Benevento*; **Borgonzoni** e **Graziani**, R. I. T. di *Bologna*; **Crugnola**, **Pomini** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Legnani**, R. L. di *Pesaro*; **Lutti**, R. L. Foscarini, **Marzocchi** e **Vacchi**, R. I. T. di *Venezia*; **Maraziti**, R. I. T. di *Piacenza*; **Marranghello** e **Signorini**, R. L. di *Arezzo*; **Mattioli**, I. T. P. di *Treviso*; **Santarella**, L. P. di *Bitonto*; **Tonali**, R. I. T. di *Pavia*.

G. CANDIDO.

Risoluzione.

Essendo

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^5=\sqrt{x^5}+\sqrt{y^5}+5\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})[(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-\sqrt{xy}],$$

posto

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=u; \qquad \sqrt{xy}=v, \tag{1}$$

il sistema proposto diviene

$$\begin{cases} bu+\sqrt{au}+c=0 & (2)\\ u^5-5uv(u^2-v)=d. & (3)\end{cases}$$

Dalla (2) si ricava

$$\sqrt{u}=\frac{-\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4bc}}{2b}; \qquad \left.\begin{matrix}u_1\\u_2\end{matrix}\right\}=\frac{a-2bc\pm\sqrt{a(a-4bc)}}{2b^2}.$$

La (3) può scriversi

$$5uv^2-5u^2v+u^5-d=0,$$

da cui, ritenendo u come noto,

$$v=\frac{5u^2\pm\sqrt{5u(u^5+4d)}}{10u}. \tag{4}$$

Ad ogni valore di u corrispondono due valori di v; siano v_1, v'_1 i valori di v corrispondenti ad u_1, e v_2, v'_2 quelli corrispondenti a u_2. Finalmente dalle (1) si ha

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{x}\\ \sqrt{y}\end{matrix}\right\} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4v}}{2}; \qquad \left.\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right\} = \frac{u^2 - 2v \pm u\sqrt{u^2 - 4v}}{2},$$

ovvero, se si pone $u^2 - 4v = \Delta$,

$$\left.\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{u^2 - 2v \pm u\sqrt{\Delta}\right\}. \tag{5}$$

Si osservi che per la (4) si ha

$$\Delta = u^2 - 4v = \frac{1}{10u}\left\{10u^3 - 20u^3 \mp 4\sqrt{5u\,(u^5 + 4d)}\right\} =$$
$$= -u^2 \mp \frac{2}{5u}\sqrt{5u\,(u^5 + 4d)}. \tag{6}$$

Poichè per u si hanno due valori u_1, u_2, dalle (5) si hanno otto soluzioni.

Discussione. — Studiamo ora le condizioni affinchè si abbiano soluzioni reali.

Affinchè sia reale u deve essere $a(a - 4bc) \geqslant 0$ cioè

$$\begin{cases} a > 0 \\ a > 4bc \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a < 0 \\ a < 4bc. \end{cases}$$

Affinchè sia positivo $u(u^5 + 4d)$ deve essere

$$\begin{cases} u > 0 \\ u^5 > -4d \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} u < 0 \\ u^5 < -4d. \end{cases}$$

Supposto verificate queste condizioni Δ è certamente negativo se si prende nella (6) dinanzi al radicale del secondo membro il segno contrario ad u; se si prende il segno di u l'altro valore di Δ è positivo, se

$$u^4 < \frac{4}{25u^2}\,5u\,(u^5 + 4d),$$

ossia

$$5u^6 < 4u\,(u^5 + 4d)$$

ossia

$$u\,(16d - u^5) > 0$$

cioè

$$\begin{cases} u > 0 \\ 16d > u^5, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} u < 0 \\ 16d < u^5. \end{cases}$$

Riassumendo affinchè si abbia per Δ *un* valore reale, supposto u reale, deve essere verificata uno o l'altro dei seguenti sistemi di ineguaglianze

$$\begin{cases} u > 0 \\ 16d > u^5 > -4d \end{cases} \qquad \begin{cases} u < 0 \\ 16d < u^5 < -4d. \end{cases}$$

In conclusione si vede che al massimo possono esistere quattro soluzioni reali.

Applicazione. — Nel caso particolare dato, si hanno due radici reali.

$$u_2 = 5; \qquad v_2 = 6.$$

1ª soluzione: $x = 9, \quad y = 4;$

2ª » $x = 4, \quad y = 9.$

G. Candido.

RISOLUZIONE DELLA 67ª QUISTIONE A CONCORSO

Dato un triangolo OA_1B_1 *trovare, con costruzioni piane, un triangolo* OAB *rettangolo in* O *ed isoscele, tale che* OA_1B_1 *sia proiezione ortogonale di esso.*

G. L.

Della 67ª quistione a concorso abbiamo ricevuto 13 risoluzioni fra le quali, quella del sig.

DE CASTRO del R. L. Beccaria di *Milano*

è di gran lunga superiore a tutte le altre, perchè il problema proposto è generalizzato e risoluto con considerazioni puramente geometriche; ad esso perciò abbiamo assegnato il premio.

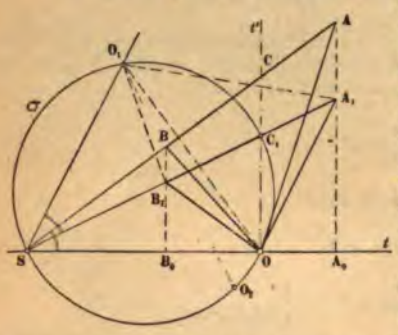
I sigg. **Brenta**, **Cernuschi**, R. I. T. e **Terracini** R. L. Cavour di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; e il sig. **Perez**, R. I. T. di *Messina*, hanno studiato analiticamente la quistione ed hanno poi cercato di costruire graficamente le formule che hanno trovato.

Le altre cinque risoluzioni che abbiamo ricevuto sono errate.

G. L.

Risoluzione del sig. De Castro.

Costruiamo più generalmente un triangolo simile a un triangolo dato la cui, proiezione ortogonale sia OA_1B_1; si tratta cioè di trasformare per affinità ortogonale il triangolo dato OA_1B_1 in un triangolo simile ad un altro. Supposto il problema risoluto sia S il punto comune alle rette AB, A_1B_1. Le rette BB_1, AA_1 sono perpendicolari ad OS, asse d'affinità; e, se la perpendicolare a OS in O taglia AB in C, A_1B_1 in C_1; le punteggiate SACB, $SA_1C_1B_1$ sono simili. Costruisco ora il triangolo $A_1B_1O_1$ simile al dato cioè simile ad OAB; le figure SACBO, $SA_1C_1B_1O_1$ sono simili; dunque l'angolo $C_1\widehat{O_1}S$ è eguale all'angolo $\widehat{COS}$, cioè ad un angolo retto; e inoltre $O_1\widehat{S}C_1 = \widehat{OSC}$.



Si ha dunque la costruzione seguente: Descritto su A_1B_1 il triangolo $A_1B_1O_1$ simile al dato, poi la circonferenza che passa per OO_1 ed ha il centro sulla retta A_1B_1, quest'ultima taglia la A_1B_1 in S e C_1; ed OS è l'asse di affinità; poi fatto $\widehat{OSC} = O_1\widehat{S}C_1$ abbiamo la retta AB. Le perpendicolari calate da A_1, B_1 sulla OS segano la AB in A e B. Se poniamo

$$\frac{A_1A_0}{AA_0} = \frac{B_1B_0}{BB_0} = \frac{C_1C_0}{CC_0} = \cos\theta,$$

il triangolo OAB dopo aver ruotato attorno all'asse di affinità di un angolo θ si proietta ortogonalmente nel triangolo OA_1B_1 supposto fisso.

Se prendiamo sul cerchio OSO_1 il punto O_2 simmetrico di O_1 rispetto al diametro SC_1, abbiamo $C_1\widehat{O_1}O_2 = \widehat{COO_1}$, e dunque le rette OO_2, OO_1 sono corrispondenti nella similitudine sopraindicata e l'angolo delle rette OO_1, AB, uguale a quello delle rette corrispondenti O_1O_2, A_1B_1, è retto. Ne segue la costruzione più semplice: trovato S da questo si conduce la perpendicolare ad OO_1 ecc. ecc.

Se il triangolo AOB è isoscele e rettangolo in O la questione proposta equivale a determinare gli assi di un'ellisse, della quale OA_1, OB_1 sono una coppia di semidiametri coniugati.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

713-25-36-37-39-43-44-45-46-47-49-50-52-54-56-57-58-59 E 760

713. *Siano* M_a, M_b, M_c *i punti medî dei lati di un triangolo* ABC (abc); *si conduca da* M_a *la perpendicolare* c′ *a* CA, *da* M_b *la perpendicolare* a′ *ad* AB *e da* M_c *la perpendicolare* b′ *a* BC; *se è*

$$A' \equiv (b', c'), \qquad B' \equiv (c', a'), \qquad C' \equiv (a', b'),$$

indicando con Δ *e* Δ' *rispettivamente le aree dei due triangoli* ABC *ed* A′B′C′, *si ha*

$$64 \,.\, \Delta \,.\, \Delta' = (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione.

I triangoli ABC, A′B′C′ sono evidentemente simili, poichè

$$\widehat{B'} \equiv \widehat{A}, \qquad \widehat{A'} \equiv \widehat{C}, \qquad \widehat{C'} \equiv \widehat{B};$$

sicchè

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\overline{A'C'}^2}{a^2}. \tag{1}$$

Ora

$$A'C' = A'M_c + M_cC' = M_aM_c \operatorname{cosec} A' + M_cM_b \operatorname{ctn} C' =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\operatorname{sen} C} + a \operatorname{ctn} B\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ab^2}{2\Delta} + \frac{a(a^2 - b^2 + c^2)}{4\Delta}\right) = \frac{a}{8\Delta}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Allora dalla (1) si ha immediatamente

$$64\,\Delta \,.\, \Delta' = (a^2 + b^2 + c^2)^2. \qquad \text{c. v. d.}$$

Altre risoluzioni dei sigg. **Brenta, Cernuschi, Costa G.** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Cirillo, Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*; **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*; **Freguglia** e **Jodi**, R. I. T. di *Modena*.

(G. C.-L.)

725. *È dato un triangolo* ABC, *rettangolo in* A, *avente per angoli* $B = \frac{1}{3}\pi$, $C = \frac{1}{6}\pi$, *e per altezza* $AH = h$.

Si domanda di determinare un punto P *sul lato* AB *ed uno* Q *sul lato* AC *in maniera che le rette* HP *e* HQ *facciano con* HA *due angoli eguali, ed inoltre sia verificata la relazione*

$$\frac{1}{HP} + \frac{1}{HQ} = \frac{2m}{h}$$

dove m *è un numero dato.*

Si prenderà per incognita $x = A\widehat{H}P = A\widehat{H}Q$, *e si discuterà tenendo conto che i punti* P, Q *devono essere sui lati del triangolo e non sui loro prolungamenti.*

(Baccalaureato matematico. Lione, ottobre 1905).

Risoluzione (semplificata) del sig. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*.

Servendosi del teorema dei seni si ricava subito:

$$\overline{HP} = \frac{h\sqrt{3}}{\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x}, \qquad \overline{HQ} = \frac{h}{\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x}.$$

Sostituendo nella relazione data dal problema e semplificando, si ha

$$\sqrt{3}\cos x + 2\operatorname{sen} x = m\sqrt{3} \tag{1}$$

ed esprimendo $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ in funzione di $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ si ottiene

$$f(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x) = (m+1)\sqrt{3}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x - 4\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x + (m-1)\sqrt{3} = 0 \tag{2}$$

e poichè $\frac{1}{2}x$ dev' essere compreso fra 0 e 45°, e perciò $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ è compreso fra 0 e 1, il sistema risolutivo del problema è

$$\begin{cases} f(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x) = 0 \\ 0 < \operatorname{tg}\frac{1}{2}x < 1. \end{cases}$$

Si ha

$$f(0) = (m-1)\sqrt{3} \qquad f(1) = 2(m\sqrt{3} - 2) \qquad \Delta = 7 - 3m^2$$

sicchè per m, che è certamente positivo, avremo i seguenti valori notevoli disposti in ordine crescente

$$1, \qquad \tfrac{1}{3}\sqrt{12}, \qquad \tfrac{1}{3}\sqrt{21},$$

e la discussione è riassunta nel seguente prospetto, dove con α e β ($\alpha < \beta$) sono indicate le radici dell'equazione (2)

m	$f(0)$	$f(1)$	Δ	Radici dell'equazione	Soluzioni del problema
$0 < m < 1$	$-$	$-$	$+$	reali $\alpha < 0 < 1 < \beta$	Nessuna.
$m = 1$	0	$-$	$+$	„ $0 = \alpha < 1 < \beta$	Una soluz. limite $\alpha = 0$. I punti P e Q coincidono con A.
$1 < m < \frac{1}{3}\sqrt{12}$	$+$	$-$	$+$	„ $0 < \alpha < 1 < \beta$	Una soluz. ordinaria α.
$m = \frac{1}{3}\sqrt{12}$	$+$	0	$+$	„ $0 < \alpha < 1 = \beta$	Una soluz. ordinaria α, e una limite β, in cui P e Q coincidono risp. con B e C.
$\frac{1}{3}\sqrt{12} < m < \frac{1}{3}\sqrt{21}$	$+$	$+$	$+$	„ $0 < \alpha < \beta < 1$	Due soluz. ord., α e β.
$m = \frac{1}{3}\sqrt{21}$	$+$	$+$	0	„ $0 < \alpha = \beta < 1$	Una soluzione doppia.
$m > \frac{1}{3}\sqrt{21}$	$+$	$+$	$-$	complesse	Nessuna.

Si ha poi facilmente

$$\left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{2 \pm \sqrt{7 - 3m^2}}{(m+1)\sqrt{3}}.$$

Risolvettero il problema e condussero press' a poco, come sopra, la discussione, e ottennero almeno in parte i medesimi risultati prendendo per incognita $\cos x$, in luogo di $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, i sigg. **Baduel**, R. I. T. di *Perugia*; **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*.

Risolvettero il problema, ma lo discussero solo in parte o inesattamente, i sigg. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*; **Bongini**, **Brenta**, **Costa** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **Chiarugi**, R. I. T. di *Firenze*; **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*.

Risolvettero il problema, ma non lo discussero, i sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; **Marchisio** e **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Cera**, **Formato**, **Salonta** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **De Castro**, R. L. di *Milano*.

E. Nannei.

736. *Essendo* r, r' *due rette ortogonali concorrenti in un punto* O *e* P, Q *due punti di* r *equidistanti da* O *e* P', Q' *due punti della* r' *equidistanti da* O *trovare un punto* M *del piano tale che la somma delle distanze da* P *e* Q *sia eguale ad una lunghezza* 2a *e la somma delle distanze da* P', Q' *sia eguale ad una lunghezza* 2a.

K.

Risoluzione del sig. La Spina, R. I. T. di *Catania*.

Posto $\overline{OP} \equiv \overline{OQ} = c$ e $\overline{OP'} \equiv \overline{OQ'} = c'$, prendendo per incognite le distanze x e y del punto M dagli assi, si hanno evidentemente le equazioni

$$\sqrt{y^2+(c-x)^2}+\sqrt{y^2+(c+x)^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+(c'-y)^2}+\sqrt{x^2+(c'+y)^2}=2a'$$

che ridotte a forma razionale e ponendo, per brevità, $a^2-c^2=b^2$, $a'^2-c'^2=b'^2$, diventano

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2, \qquad (1)$$
$$b'^2y^2+a'^2x^2=a'^2b'^2, \qquad (2)$$

donde

$$x=\pm ab'\sqrt{\frac{a'^2-b^2}{a^2a'^2-b^2b'^2}} \qquad y=\pm a'b\sqrt{\frac{a^2-b'^2}{a^2a'^2-b^2b'^2}}.$$

Essendo, per le ipotesi fatte, $a>b$, $a'>b'$, i denominatori dei radicandi sono certamente positivi. Per la realtà delle radici, è dunque necessario che sia $a \geqslant b$ e $a \geqslant b'$. Se si suppone che a sia non minore di a', (il che può sempre farsi) la condizione di realtà si riduce a $a' \geqslant b$. Se è $a'=b$, le soluzioni si riducono a due, che sono i due punti P', Q' della retta r'.

Analoghe risoluzioni si ebbero dai sigg. **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Costa G.**, **Mosca** e **Bongini**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Scopinich** e **Pelosio**, R. I. T. di *Venezia*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **De Castro**, R. L. di *Milano*.

Si limitarono a considerare il punto comune di due ellissi, i sigg. **Casalasco**, **Marchisio** e **Chiesa**, R. L. di *Cuneo*; **Manzi**, L. P. di *Domodossola*; **Ghè**, **Porracci** e **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **Maracci**, **Rinaldi** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Cernuschi** e **Brenta**, R. I. T. di *Torino*.

E. Nannei.

737. *Risolvere l'equazione*

$$[x-(a^2+b^2)]^2+4a^2x(x+2b)=0.$$

K.

Risoluzione.

L'equazione data può scriversi

$$(4a^2+1)x^2-2(a^2+b^2-4a^2b)x+(a^2+b^2)^2=0$$

da cui

$$x=\frac{a^2+b^2-4a^2b\pm 2a\sqrt{-(a^2-b^2)^2-2b(a^2+b^2)}}{4a^2+1}.$$

La condizione di realtà è data da

$$(a^2-b^2)^2+2b(a^2+b^2)\leqslant 0, \qquad (1)$$

ossia $(a^2-b^2)^2 \leqslant -2b(a^2+b^2)$, che, per b positivo, evidentemente non è mai soddisfatta. Se poi b è negativo, poniamo $b=-b'$, ove b' è necessariamente positivo. La condizione (1) diventa

$$(a^2-b'^2)^2-2b'(a^2+b'^2)\leqslant 0,$$

ossia

$$(a^4-2b')(b'+1)a^2+b'^3(b'-2)\leqslant 0,$$

che è soddisfatta quando sia

$$b'(b'+b-\sqrt{4b'+1}) \leqslant a^2 \leqslant b'(b'+1+\sqrt{4b'+1}),$$

che sono le condizioni richieste. Al limite di sinistra va sostituito 0, quando sia $b'<2$, perchè in tal caso esso risulterebbe negativo, e basta che sia $a^2 \geqslant 0$.

Si limitarono alla risoluzione dell'equazione i sigg. **Bassi**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Brenta, Bongini, Cernuschi, Costa G.**, R. I. T. e **Costa J. A.**, I. T. privato di *Torino*; **Casalasco, Chiesa** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore**, I. T. di *Catania*; **Maracci** e **Rinaldi**, R. I. T. di *Ancona*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Reggio**, R. I. T. di *Firenze*.

Discussero i risultati ottenuti i sigg. **La Spina**, R. I. T. *Catania*; **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.

Non ottennero risultati giusti i sigg. **Naccarati, Urbani, Pelosio, Scopinich** e **Daddi**.

E. Nannei.

739. *È dato un poligono regolare* P *di* n *lati; i punti di mezzo dei suoi lati sono vertici di un altro poligono regolare* P_1 *di* n *lati; così proseguendo si possono formare successivamente dei poligoni regolari tali che ognuno di essi* P_s *abbia per vertici i punti di mezzo dei lati del precedente* P_{s-1}. *Si domanda la somma delle aree dei primi* p *di questi poligoni, ed il suo limite per* p *crescente all' infinito.*

Caso in cui n *è* 3, 4, 5, 6, 8, 10.

(Baccalaureato. Parigi 1905).

Risoluzione.

Siano rispettivamente S ed R l'area e il raggio del poligono P; S_s ed R_s l'area e il raggio di P_s. Si ha

$$\frac{S_{s+1}}{S_s} = \frac{R^2_{s+1}}{R_s^2} = \cos^2\frac{\pi}{n}.$$

Da ciò segue che $S_1, S_2, S_3, \ldots$ formano una progressione per quoziente di ragione $\cos^2\frac{\pi}{n}$, perciò

$$\sum_1^p S_p = \frac{S_1\left(1-\cos^{2p}\frac{\pi}{n}\right)}{1-\cos^2\frac{\pi}{n}} = \frac{S_1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}\left(1-\cos^{2p}\frac{\pi}{n}\right);$$

e poichè anche

$$S_1 = S \,.\, \cos^2\frac{\pi}{n},$$

risulta

$$\sum_1^p S_p = S\cot g^2\frac{\pi}{n}\left(1-\cos^{2p}\frac{\pi}{n}\right)$$

e quindi

$$\lim\left(\sum_1^p S_p\right)_{p=\infty} = S\cot g^2\frac{\pi}{n}.$$

Per $n=3$, si ha $\sum_1^p S_p = \frac{1}{3}S\left(1-\frac{1}{4^p}\right)$; $\lim\left(\sum_1^p S_p\right)_{p=\infty} = \frac{1}{3}S$;

" $n=4$, " " $= S\left(1-\frac{1}{2^p}\right)$; " $= S$;

" $n=5$, " " $= S\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\left[1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{5}\right)^{3p}\right]$; " $= S\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$;

" $n=6$, " " $= 3S\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^p\right]$; " $= 3S$;

Per $n=8$, si ha $\sum_1^p S_p = S(3+2\sqrt{2})\left[1-\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^p\right]$; $\lim\left(\sum_1^p S_p\right)_{p=\infty} = S(3+2\sqrt{2})$;

" $n=10$, " " $= S(5+2\sqrt{5})\left[1-\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^p\right]$; " $= S(5+2\sqrt{5})$.

Le somme precedenti possono essere espresse tutte in funzione di R, osservando che

$$S = \tfrac{1}{2}\, n\, R^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n},$$

o in funzione di l (lato di P) osservando che

$$S = \tfrac{1}{4}\, n \,.\, l^2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}.$$

Inviarono risoluzioni i sigg. **Bonetti**, R. L. di *Arezzo*; **Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa A., Costa G., Levi** e **Mosca**, R. I. T. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*; **Casalasco, Chiesa** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Castro** e **Valagussa**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Macchi**, I. T. P. di *Varese*; **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*..

I risolutori non hanno tutti nello stesso modo interpretato l'enunciato della questione. Alcuni pochi (Pelosio, Scopinich e Terracini) hanno trovato la somma delle aree di $P_1, P_2, \ldots P_p$, e il limite per p crescente all'infinito; i più hanno invece trovato la somma delle aree di $P, P_1, P_2, \ldots P_{p-1}$; un altro infine (Cutore) ha trovato la somma di $P, P_1, P_2, \ldots P_p$. Crediamo che la prima interpretazione sia quella giusta.

Alcuni alunni hanno espresso la somma richiesta e il suo limite in funzione dell'area S di P (oltrechè del numero n dei suoi lati); altri in funzione del raggio R; altri in funzione del lato l di P; qualcuno (Campetti) in funzione di troppi elementi (lato, apotema, angolo e numero dei lati di P). Per queste ragioni i risultati presentati dai risolutori hanno forme assai diverse.

I sigg. Levi, Brenta e Cernuschi hanno trovato soltanto il limite della somma, ma non hanno trovato l'espressione della somma stessa per i primi p poligoni.

Nei lavori dei sigg. Brenta, Campetti, Jodi, Maracci, Marchisio, Levi, Pelosio, Scopinich, Cutore, Urbani e Terracini si trovano espressioni suscettibili di notevoli riduzioni; ad es. frazioni con denominatori irrazionali che potevano essere trasformate in altre con denominatori razionali.

Alcuni errori di calcolo, o d'altra natura, si riscontrano nei lavori dei sigg. De Castro, Levi, La Spina, Cutore, Chiesa, Casalasco, Terracini, Pelosio e Scopinich.

Passando ai casi particolari, quasi tutti i risolutori (tranne Terracini, Pelosio e Scopinich) hanno trovato le espressioni del limite della somma delle aree; ma non la somma delle aree stesse per i primi p poligoni.

I casi particolari non sono stati completamente considerati dai sigg. Casalasco, Chiesa e Cutore.

Il sig. Bonetti ha risoluto il problema non in generale, ma soltanto nei due casi particolari $n = 3$, $n = 4$.

Il sig. Macchi presenta una risoluzione del tutto sbagliata; in essa, tra altri errori, si trova questo: *le aree dei poligoni regolari dello stesso numero di lati sono proporzionali ai loro lati* (!).

C. Ciamberlini.

743. *Dato un triangolo qualunque* ABC, *si costruiscano internamente ad esso (coi vertici in* A, B, C), *i triangoli isosceli* BAB_1, CBC_1, ACA_1, *aventi uno stesso angolo* φ *al vertice; analogamente si costruiscano esternamente i triangoli isosceli* BAB_2, CBC_2, ACA_2.

1. Determinare l'area dei triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, *mediante l'area del dato e funzioni goniometriche di* φ, *e degli angoli* $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$

2. *Discutere le formole trovate, stabilendo in quali casi* A_1, B_1, C_1 *sono in linea retta.*

3. *Considerare alcuni casi particolari.*

R. Vercellin.

Risoluzione.

1. Sia D il punto d'incontro di AB_1, BC_1; si ha

$$ABB_1C_1 = \tfrac{1}{2} AB_1 . BC_1 \operatorname{sen} D,$$

$$AB_1 = c; \qquad BC_1 = a; \qquad \operatorname{sen} D = \operatorname{sen} B;$$

dunque

$$ABB_1C_1 = S,$$

essendo S l'area di ABC; ed analogamente

$$BCC_1A_1 = S; \qquad CAA_1B_1 = S.$$

Ciò premesso è chiaro che

$$ABB_1C_1 + BCC_1A_1 + CAA_1B_1 = 2ABC + ACC_1 + BCB_1 \pm ABA_1 + A_1B_1C_1,$$

ossia

$$S_1 = A_1B_1C_1 = S - (ACC_1 + BCB_1 \pm ABA_1). \tag{1}$$

Ora

$$ACC_1 = \tfrac{1}{2} AC . CC_1 \operatorname{sen} \widehat{ACC_1} = ab \cos\omega \operatorname{sen}(\omega - C),$$

(dove ω è l'angolo alla base dei triangoli $BAB_1 \ldots$). Per questa ed analoghe, dalla (1) si trae

$$S_1 = S - [ab \cos\omega \operatorname{sen}(\omega - C) + bc \cos\omega \operatorname{sen}(\omega - A) + ca \cos\omega \operatorname{sen}(\omega - B) =$$
$$= S - \cos\omega [\operatorname{sen}\omega (ab \cos C + bc \cos A + ca \cos B) - 6 \cos\omega S],$$

ossia

$$S_1 = S [1 + 6 \cos^2\omega - 2 \operatorname{sen}\omega \cos\omega (\operatorname{ctn} A + \operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C)] =$$
$$S [4 + 3\cos 2\omega - \operatorname{sen} 2\omega (\operatorname{ctn} A + \operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C)];$$

e finalmente

$$S_1 = S [4 - 3\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi (\operatorname{ctn} A + \operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C)]. \tag{2}$$

Se indichiamo con S_2 l'area di $A_2B_2C_2$, ponendo al posto di φ, $2\pi - \varphi$, avremo senz' altro

$$S_2 = S [4 - 3\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi (\operatorname{ctn} A + \operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C)]. \tag{2'}$$

2. Come si vede, le (2) e (2)' esprimono, in sostanza, la stessa cosa, potendo l'angolo φ variare tra 0 e 2π; dunque, senza scapito di generalità, potremo limitarci a ragionar sulla (2). Vediamo come varia il secondo membro della (2). Occupiamoci dell' inequazione

$$4 - 3\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi \, \Sigma \operatorname{ctn} A \gtreqless 0. \tag{3}$$

Essendo $4 - 3\cos\varphi > 0$ e, (per $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$) $\operatorname{sen}\varphi \geqslant 0$, essa può scriversi

$$(4 - 3\cos\varphi)^2 \gtreqless \operatorname{sen}^2\varphi (\Sigma \operatorname{ctn} A)^2,$$

$$[9 + (\Sigma \operatorname{ctn} A)^2] \cos^2\varphi - 24 \cos\varphi + 16 - (\Sigma \operatorname{ctn} A)^2 \gtreqless 0. \tag{4}$$

Il discriminante Δ dell'equazione, che si ottiene eguagliando a 0 il 1° membro della (4), è

$$\Delta = (\Sigma \operatorname{ctn} A)^2 [(\Sigma \operatorname{ctn} A)^2 - 7] = \Sigma (\operatorname{ctn} A)^2 (\Sigma \operatorname{ctn}^2 A - 5)$$

perchè $\operatorname{ctn} B . \operatorname{ctn} C + \operatorname{ctn} C . \operatorname{ctn} A + \operatorname{ctn} . \operatorname{ctn} B = 1$. (V. per es. quistione 749.)

Ciò posto, è facile vedere quanto segue:

a) Se $\Sigma \operatorname{ctn}^2 A > 5$,

$$\text{per} \begin{cases} \text{o} \quad \cos\varphi > \dfrac{12+\sqrt{\Delta}}{9+(\Sigma \operatorname{ctn} A)^2} \\ \text{o} \quad \cos\varphi < \dfrac{12-\sqrt{\Delta}}{9+(\Sigma \operatorname{ctn} A)^2} \end{cases} \quad \text{è} \quad S_1 = S\,[4 - 3\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\, \Sigma \operatorname{ctn} A],$$

$$\text{per} \quad \frac{12+\sqrt{\Delta}}{9+(\Sigma \operatorname{ctn} A)^2} > \cos\varphi > \frac{12-\sqrt{\Delta}}{9+(\Sigma \operatorname{ctn} A)^2} \quad \text{è} \quad S_1 = S(-4 + 3\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\, \Sigma \operatorname{ctn} A),$$

$$\text{per} \begin{cases} \text{o} \quad \cos\varphi = \dfrac{12+\sqrt{\Delta}}{9+(\Sigma \operatorname{ctn} A)^2} \\ \text{o} \quad \cos\varphi = \dfrac{12-\sqrt{\Delta}}{9+(\Sigma \operatorname{ctn} A)^2} \end{cases} \quad A_1,\ B_1,\ C_1 \text{ sono allineati.}$$

b) Se è $\Sigma \operatorname{ctn}^2 A = 5$, si ha

$$S_1 = S\,(4 - 3\cos\varphi - \sqrt{7}\operatorname{sen}\varphi).$$

In questo caso se $\cos\varphi = \frac{2}{7}$, A_1, B_1, C_1 sono in linea retta.

c) Se è $\Sigma \operatorname{ctn}^2 A < 5$, si ha

$$S_1 = S\,(4 - 3\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\, \Sigma \operatorname{ctn} A),$$

ed i punti A_1, B_1, C_1 non possono risultare in linea retta.

3. Casi particolari. — Qualunque sia il triangolo ABC, per $\varphi = 45^0$, si ha

$$\pm S_1 = S\left[4 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(3 + \Sigma \operatorname{ctn} A)\right], \tag{5}$$

$$S_2 = S\left[4 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(\Sigma \operatorname{ctn} A - 3)\right]. \tag{5'}$$

Per $\varphi = 60^0$, si ha

$$\pm S_1 = \tfrac{1}{3} S\,(5 - \sqrt{3}\,\Sigma \operatorname{ctn} A), \tag{6}$$

$$S_2 = \tfrac{1}{3} S\,(5 + \sqrt{3}\,\Sigma \operatorname{ctn} A). \tag{6'}$$

Per $\varphi = 90^0$, si ha

$$\pm S_1 = S\,(4 - \Sigma \operatorname{ctn} A); \tag{7} \qquad S_2 = S\,(4 + \Sigma \operatorname{ctn} A). \tag{7'}$$

Per $\varphi = 2\pi$, si ha

$$S_1 = S_2 = 7S. \tag{8}$$

Se φ è l'angolo di Brocard del triangolo ABC, si ha

$$S_1 = 4S\,(1 - \cos\varphi); \qquad S_2 = 2S\,(2 - \cos\varphi). \tag{9}$$

Se ABC è equilatero, per $\varphi = 60^0$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, si ha rispettivamente

$$S_1 = S; \qquad S_2 = 4S, \tag{10}$$

$$S_1 = S\,(4 - \sqrt{3}); \qquad S_2 = S\,(4 + \sqrt{3}). \tag{11}$$

Se ABC è rettangolo in A, per $\varphi = 60^0$, si ha

$$\pm S_1 = \tfrac{1}{4}\,(5bc - a^2\sqrt{3}), \tag{12}$$

$$S_2 = \tfrac{1}{4}\,(5bc + a^2\sqrt{3}). \tag{12'}$$

Si avrà l'allineamento quando

$$\operatorname{sen} 2C = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{13}$$

Se poi è $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, si ha

$$\pm S_1 = \tfrac{1}{2}(4bc - a^2); \qquad S_2 = \tfrac{1}{2}(4bc + a^2), \tag{14}$$

e si ha l'allineamento quando $C = 15^0$.

I risolutori furono tre soltanto. Il sig. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*, giunge rapidamente alle formole

$$S_1 = S\left\{1 + 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varphi\left[\Sigma\frac{\cos(\frac{1}{2}\varphi - A)}{\operatorname{sen} A}\right] - \operatorname{sen}\varphi\frac{\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}\right\},$$

$$S_2 = S\left\{1 + \operatorname{sen}\varphi\frac{\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} - 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\varphi\left[\Sigma\frac{\cos(\frac{1}{2}\varphi + A)}{\operatorname{sen} A}\right]\right\},$$

ch'egli non cerca di semplificare, cosa indispensabile per la discussione; egli infatti la tralascia, e solo accenna alla condizione perchè A_1, B_1, C_1 siano in linea retta. Considera tre casi particolari, e, nel secondo di questi, in luogo della (11) trova $S_2 = S(1 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$. Le risoluzioni dei sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*, sono pressochè eguali. Il procedimento da essi seguito è molto laborioso, e li induce ad errori di segno e, quindi, a risultati non esatti. Tralasciano la discussione; dicono che sarebbero in grado di esprimere φ, in funzione di A, B, C nel caso che A_1, B_1, C_1 fossero allineate, *ma, essendo ciò un calcolo laborioso,* credono inutile riportarlo.

R. Vercellin.

744. *Trovare quattro numeri in proporzione, conoscendone la somma, la somma dei quadrati e quella dei cubi.*

R. Vercellin.

Risoluzione.

Detti x, y, z, u i numeri da determinare, a_1, a_2, a_3 rispettivamente, le somme date, avremo

$$\begin{cases} xy = zu & (1)\\ x + y + z + u = a_1 & (2)\\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a_2 & (3)\\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = a_3. & (4)\end{cases}$$

Posto

$$xy = zu = \lambda; \qquad x + y = \mu,$$

le (3), (4) possono scriversi

$$\begin{cases} \mu^2 + (a_1 - \mu)^2 - 4\lambda = a_2\\ \mu^3 + (a_1 - \mu)^3 - 3\lambda\mu - 3\lambda(a_1 - \mu) = a_3,\end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \mu^2 - a_1\mu - \lambda = \dfrac{a_3 - a_1^3}{3a_1}\\ \mu^2 - a_1\mu - 2\lambda = \dfrac{a_2 - a_1^2}{2},\end{cases}$$

da cui facilmente

$$\lambda = \frac{2a_3 + a_1^3 - 3a_1a_2}{6a_1},$$

$$\mu = \frac{3a_1^2 \pm \sqrt{3a_1(a_1^3 - 6a_1a_2 + 8a_3)}}{6a_1}. \tag{5}$$

Ora, per le posizioni fatte abbiamo

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\lambda}}{2} = \frac{\mu \pm \sqrt{a_2 - (a_1 - \mu)^2}}{2};$$

$$\left.\begin{matrix} z \\ u \end{matrix}\right\} = \frac{a_1 - \mu \pm \sqrt{(a_1 - \mu)^2 - 4\lambda}}{2} = \frac{a_1 - \mu \pm \sqrt{a_2 - \mu^2}}{2}.$$

Quindi, ricorrendo alla (5), avremo le soluzioni

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{3a_1^2 \pm \sqrt{3a_1(a_1^3 - 6a_1a_2 + 8a_3)} \pm \sqrt{6a_1\left[-2a_1^3 + 9a_1a_2 - 4a_3 \pm a_1\sqrt{3a_1(a_1^3 - 6a_1a_2 + 8a_3)}\right]}}{12a_1},$$

$$\left.\begin{matrix} z \\ u \end{matrix}\right\} = \frac{3a_1^2 \mp \sqrt{3a_1(a_1^3 - 6a_1a_2 + 8a_3)} \pm \sqrt{6a_1\left[-2a_1^3 + 9a_1a_2 - 4a_3 \mp a_1\sqrt{3a_1(a_1^2 - 6a_1a_2 + 8a_3)}\right]}}{12a_1}.$$

Discussione. — Supposto a_1, a_2, a_3 positivi, condizione per la realtà è anzitutto

$$a_2 \leqslant \frac{a_1^3 + 8a_3}{6a_1}. \qquad (\alpha)$$

Inoltre

$$-2a_1^3 + 9a_1a_2 - 4a_3 \geqslant a_1\sqrt{3a_1(a_1^3 - 6a_1a_2 + 8a_3)};$$

affinchè il 1° membro di questa sia, come il 2°, positivo, dev'essere

$$a_2 > \frac{2(a_1^3 + 2a_3)}{9a_1}; \qquad (\beta)$$

allora è lecito elevare a quadrato senza mutar senso, e si trae

$$81a_1^2a_2^2 - 18(a_1^4 + 4a_1a_3)a_2 + a_1^6 - 8a_1^3a_3 + 16a_3^2 \geqslant 0,$$

che, col solito metodo si trova che è soddisfatta per

$$a_2 \geqslant \frac{(\sqrt{a_1^3} + 2\sqrt{a_3})^2}{9a_1}, \quad \text{oppure} \quad a_2 \leqslant \frac{(\sqrt{a_1^3} - 2\sqrt{a_3})^2}{9a_1}. \qquad (\gamma)$$

Delle (γ), la seconda è incompatibile con la (β); se $16a_3 \geqslant a_1^3$, la β è assorbita dalla prima delle (γ); altrimenti succede il contrario.

Mandarono risoluzioni analoghe a quella riportata i sigg. **Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco, Chiesa** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cera, Formato** e **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Macchi** e **Magnani**, R. I. T. di *Varese*.

I sigg. Bongini, Costa e Mosca cercano le condizioni di realtà; solamente la discussione dell'ultimo è completa, ma contiene alcune mende. Il sig. La Spina trova molto bene le condizioni di positività, ma non s'occupa della realtà. Oltre a queste, sono buone le soluzioni dei sigg. Brenta, Cernuschi, De Bei, Jodi e Magnani.

Altre risoluzioni inviarono i sigg. **Castaldi** e **Chiarugi**, R. I. T. di *Firenze*; **De Castro** e **Valagussa**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Patellani**, R. L. Volta di *Como*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

La risoluzione del De Castro non può ritenersi completa, sia perchè non dà che una soluzione del sistema, sia perchè suppone che le somme siano date rispettivamente sotto la forma a, $a^2 - 2b$, $a^3 - 3ac$. Sono buone le risoluzioni dei sigg. Maracci, Patellani e Pelosio. Il procedimento seguito da quest'ultimo è diverso da tutti gli altri e, quantunque più laborioso di quello da noi riportato, ci pare ingegnoso, ed è ben condotto.

R. Vercellin.

745. *Trovare*

$$\sum_1^n \frac{a_i\, a_{i+1}\, a_{i+2}}{a_i + a_{i+2}}$$

sapendo che i numeri a_i *sono in progressione aritmetica.*

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Sia δ la ragione della progressione.

Poichè

$$a_i + a_{i+2} = 2\, a_{i+1}$$

si ha

$$\sum_1^n \frac{a_i\, a_{i+1}\, a_{i+2}}{a_i + a_{i+2}} = \tfrac{1}{2} \sum_1^n a_i\, a_{i+2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_1^n [a_1 + (i-1)\,\delta]\,[a_1 + (i+1)\,\delta]$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_1^n [(a_1^2 - \delta^2) + i\,.\,2\,a_1\delta + i^2\,.\,\delta^2]$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[n\,(a_1^2 - \delta^2) + n\,(n+1)\,a_1\delta + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\delta^2 \right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\, n \left[a_1^2 + (n+1)\,a_1\delta + \frac{2\,n^2 + 3\,n - 5}{6}\,\delta^2 \right].$$

Inviarono risoluzioni esatte di questa quistione i sigg. **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*. L'espressione presentata da quest'ultimo è però suscettibile di riduzioni.

Il sig. **Costa**, R. I. T. di *Torino*, invece della somma richiesta trova l'altra

$$\sum_1^n \frac{a_i + a_{i+2}}{a_i\, a_{i+1}\, a_{i+2}},$$

I sigg. **Casalasco**, **Chiesa** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo* trovano la somma dei primi $n-2$ termini della somma richiesta; esatta è l'espressione presentata dal Marchisio; sono errate invece quelle che presentano Casalasco e Chiesa.

Il sig. **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*, ha inviata una risoluzione semplice, eguale a quella che qui si pubblica; ma nell'espressione che egli trova c'è qualche inesattezza (conseguenza di omissioni di alcune parentesi).

Il sig. **Armenante**, R. L. di *Caserta*, invece di $\sum_1^n$, trova $\sum_i^n$; ma nella sua risoluzione si notano alcuni errori; tra gli altri questo: egli dice che l'ultimo termine di

$$\sum_1^n \frac{a_i\, a_{i+1}\, a_{i+2}}{a_i + a_{i+2}}$$

è

$$\frac{[a_i + (n-i-3)]\,[a_i + (n-i-1)\,\delta]}{2},$$

mentre deve essere

$$\frac{[a_i + (n-i)\,\delta]\,[a_i + (n-i+2)\,\delta}{2}.$$

Neanche scevra di errori è la risoluzione inviata dal sig. **La Spina**, R. I. T. di *Catania*, che per la somma richiesta (da $i = i$, a $i = n$) trova l'espressione

$$(a_i + 2)^2 + (a_i + 3)^2 + \ldots + a_n^2;$$

e ciò è falso.

C. Ciamberlini.

746. *Dimostrare l'identità*

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$$
$$+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}=a+b+c+d,$$

e generalizzare la quistione.

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Riducendo le frazioni allo stesso denominatore

$$D=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

e sommandole, si ha per numeratore

$$N=a^4(b-c)(b-d)(c-d)-b^4(a-c)(a-d)(c-d)+$$
$$+c^4(a-b)(a-d)(b-d)-d^4(a-b)(a-c)(b-c)$$

che si annulla per $a=b$; $a=c$; $a=d$; $b=c$; $b=d$; $c=d$, e quindi è divisibile per D. Detto Q il quoto, siccome N e D sono polinomi omogenei, simmetrici, rispettivamente di 7° e 6° grado, si ha

$$Q=K(a+b+c+d)$$

essendo K un coefficiente numerico. Ma in N e in D i termini di grado massimo rispetto ad a sono rispettivamente

$$a^4(b-c)(b-d)(c-d)\,;\qquad a^3(b-c)(b-d)(c-d)$$

perciò $K=1$. L'identità è così dimostrata.

In modo analogo si dimostra più generalmente che

$$\frac{a_1^n}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}+\frac{a_2^n}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a_n^n}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Risoluzioni conformi alla precedente furono inviate dai sigg. **Maracci**, R. I. T. di *Ancona* e **Pieri**, R. L. di *Pistoia*; ma il Maracci non generalizzò la quistione.

Altre risoluzioni inviarono i sigg. **Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa G.** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei, Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*.

I sigg. La Spina e Mosca omisero, i sigg. Brenta e Cernuschi errarono la generalizzazione.

C. Ciamberlini.

747. *Costruire il segmento minimo che divida un dato triangolo in parti equivalenti*

C. Ciamberlini.

1ª **Risoluzione** del sig. **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*.

Nel triangolo ABC (di area S), sia $\widehat{A}\leqq\widehat{B}\leqq\widehat{C}$. Indicando con z il segmento richiesto, con x, y i lati del triangolo che esso forma incontrando i lati dell'angolo Z (dove Z è uno qualunque degli angoli A, B, C) si ha

$$z^2=(x+y)^2-2xy(1+\cos\widehat{Z})$$
$$xy=\frac{S}{\operatorname{sen}\widehat{Z}}=\text{cost.}^e\,;$$

e quindi al minimo di z corrisponde il minimo di $(x+y)$, che, com'è noto, è dato da $x=y$. Si ha perciò

$$x^2 = \frac{S}{\operatorname{sen}\widehat{Z}},$$

$$z^2 = 2x^2(1-\cos\widehat{Z})$$

da cui si trae anche che al minimo di z corrisponde il minimo di $\widehat{Z}$. Il segmento richiesto è dunque la base del triangolo isoscele di cui l'angolo al vertice è A, e in cui ciascuno dei lati eguali è

$$x = \sqrt{\frac{S}{\operatorname{sen} A}} = \sqrt{\frac{bc}{2}},$$

cioè è medio proporzionale tra b e $\frac{1}{2}c$.

2ª **Risoluzione.**

Indicando con α, β gli angoli che il segmento richiesto z forma coi lati di $\widehat{Z}$, si avrà

$$\tfrac{1}{2} z^2 \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\widehat{Z}} = \tfrac{1}{2} S,$$

da cui

$$z^2 = \frac{S \operatorname{sen}\widehat{Z}}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta} = \frac{2S \operatorname{sen}\widehat{Z}}{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)},$$

da cui si vede che z ha il valor minimo quando $\alpha=\beta$, cioè quando $x=y$; ecc.

3ª **Risoluzione** (indipendente dalla trigonometria).

Se h è l'altezza del triangolo (x, y, z) corrispondente al lato x, si ha

$$z^2 = x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{x^2y^2 - h^2x^2} = (x+y)^2 - 2xy \pm 2\sqrt{x^2y^2 - h^2x^2}.$$

Ora, poichè il rapporto di due triangoli che hanno un angolo comune è eguale al rapporto dei prodotti dei lati che comprendono quest'angolo, si ha

$$xy = \text{cost.}^{\text{e}}.$$

Ma anche

$$hx = S = \text{cost.}^{\text{e}};$$

perciò il minimo di z si ha quando $(x+y)$ è minimo, cioè per $x=y$; ecc.

Altre risoluzioni furono inviate dai sigg. **Bongini, Brenta, Cernuschi** e **Costa G.**, R. I. T. di *Torino*; **Boselli**, R. L. Visconti e **Dal Re**, Coll. Milit. di *Roma*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei, Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Fondi**, R. L. di *Pistoia*; **Ghe**, R. I. T. di *Firenze*; **Jodi**, R. I. T. *Modena*; **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Tedeschi**, R. I. T. di *Roma*.

I sigg. Fondi, Maracci, Perez e Boselli hanno ben trattata la quistione, trovando l'espressione del segmento minimo, e indicandone la costruzione, dopo aver osservato che esso va inserito nel minimo angolo del triangolo dato.

I sigg. Brenta, Bongini, Costa, Cernuschi, Ghe, Dal Re, Jodi, Cutore, La Spina e Tedeschi non hanno detto in quale angolo va inserito il segmento richiesto, affinchè esso risulti il minimo.

Infine i sigg. De Bei, Pelosio e Scopinich, mentre hanno trovato l'espressione esatta del valore del segmento minimo, non ne hanno ricavata la costruzione richiesta, e neppure hanno fatto la necessaria osservazione relativa all'angolo in cui deve essere inserito.

C. Ciamberlini.

749. *Dimostrare che se*

$$\alpha + \beta + \gamma = k\pi,$$

e k, m *sono numeri interi, si ha*

$$\tan\frac{m\alpha}{k} + \tan\frac{m\beta}{k} + \tan\frac{m\gamma}{k} = \tan\frac{m\alpha}{k}\,.\,\tan\frac{m\beta}{k}\,.\,\tan\frac{m\gamma}{k}\,.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione dei sigg. **Bongini** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.

Dalla relazione

$$\alpha + \beta + \gamma = k\pi$$

si ha

$$\frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma}{k} = \pi, \qquad \frac{m\alpha}{k} + \frac{m\beta}{k} + \frac{m\gamma}{k} = m\pi,$$

e quindi

$$\tan\left(\frac{m\alpha}{k} + \frac{m\beta}{k}\right) = -\tan\frac{m\gamma}{k},$$

e per la solita formula

$$\frac{\tan\frac{m\alpha}{k} + \tan\frac{m\beta}{k}}{1 - \tan\frac{m\alpha}{k}\tan\frac{m\beta}{k}} = -\tan\frac{m\gamma}{k},$$

da cui, sopprimendo il denominatore e trasportando,

$$\tan\frac{m\alpha}{k} + \tan\frac{m\beta}{k} + \tan\frac{m\gamma}{k} = \tan\frac{m\alpha}{k}\,.\,\tan\frac{m\beta}{k}\,.\,\tan\frac{m\gamma}{k}\,.$$

Eguale a questa è la risoluzione inviata dai sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*: **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Patellani**, R. L. di *Como*; **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **De Castro**, R. L. di *Milano*; **Pelosio**, **Scopinich**, **De Bei** e **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*. Le altre risoluzioni giunte, e che sono dei sigg. **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **Armenante** e **Salonia**, R. L. di *Caserta*; **Chiesa** e **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Jodl**, R. I. T. di *Modena*; **Campetti**, R. I. T. di *Lucca*; **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Costa**, **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*, sono pur esse buone, ma meno concise, giacchè i loro autori ricorrono ad alcune considerazioni sulla seconda identità che sono superflue in una quistione tanto semplice ed elementare.

C. Alasia.

750. *Risolvere il sistema*

$$\left.\begin{aligned} 2\cos x\cos 3y &= 1 \\ \tan x + \tan 3y &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

G. Pesci.

1ª **Risoluzione**, dei sigg. **Maracci**, R. I. T. di *Ancona* e **Peruzzi**, I. T. P. di *Ravenna*.

Dalla seconda equazione si ha subito

$$\frac{\operatorname{sen}(x + 3y)}{\cos x\,\cos 3y} = 2,$$

che, tenendo conto della prima, diventa

$$\operatorname{sen}(x + 3y) = 1. \tag{1}$$

La stessa prima poi, trasformando il prodotto in una somma, diventa

$$\cos(x + 3y) + \cos(x - 3y) = 1;$$

ma, per la (1),

$$\cos(x + 3y) = 0,$$

dunque il sistema proposto è equivalente all'altro

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + 3y) &= 1 \\ \cos(x - 3y) &= 1 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Di qui si ha immediatamente

$$x + 3y = 360^\circ k_1 + 90, \tag{3}$$

$$x - 3y = 360^\circ k_2; \tag{4}$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} x &= 180^\circ (k_1 + k_2) + 45^\circ \\ y &= 60^\circ (k_1 - k_2) + 15^\circ \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Questo procedimento fu seguito anche

dal sig. **Mosca**, R. I. T. di *Torino*, il quale dalla (3) e dalla (4) dedusse la soluzione

$$\left.\begin{aligned} x &= 180^\circ k + 45^\circ \\ y &= 60^\circ k + 15^\circ \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

che non è generale, perchè si deduce dalla (5), supponendo $k_2 = 0$;

dai sigg. **Casalasco**, **Chiesa**, **Marchisio**, R. L. di *Cuneo* e **Tedeschi**, R. I. T. di *Roma*, i quali, avendo assunto $k_1 = k_2$ nella (3) e nella (4), invece della seconda delle (5) trovarono solo la soluzione particolarissima

$$y = 15^\circ;$$

dai sigg. **Cera**, **Formato** e **Salonia**, L. P. di *Caserta*, i quali però, giunti alle (5) le trasformarono nelle altre

$$\left.\begin{aligned} x &= 180^\circ m + 45^\circ \\ y &= 60^\circ n + 15^\circ \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

che sono equivalenti alle stesse (5) solo se si pone la condizione che m ed n abbiano la stessa parità; infatti, ponendo per es., $m = +1$ ed $n = 0$ esse non soddisfano;

dal sig. **Armenante**, L. P. di *Caserta*, il quale però, giunto alla (3) e alla (4) e senza passare per le (5), ne dedusse le (7), che, come s'è detto ora, non sono equivalenti alle (5);

dal sig. **Bianchi**, R. I. T. di *Livorno*, il quale sbagliò nel risolvere la seconda delle (2), chè invece di dedurne la (4), ne dedusse l'altra

$$x - 3y = 180^\circ k_2.$$

2ª **Risoluzione**, del sig. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*, alquanto semplificata.

Giunti alla (1) e dedottane la (3), si sostituisca il valore di $3y$, che da questa si ricava, nella prima equazione del sistema; si ha così l'equazione

$$\operatorname{sen} 2x = 1, \tag{8}$$

da cui

$$x = 180^\circ k_3 + 45^\circ. \tag{9}$$

Quindi, sostituendo nella (3) stessa,

$$y = 60^\circ (2k_1 - k_3) + 15^\circ; \tag{10}$$

e queste due coincidono evidentemente colle (5).

Questo procedimento fu seguito anche

dai sigg. **Cutore** R. I. T. di *Catania*; **Valeri**, R. L. di *Milano*; **Costa** e **Cernuschi** R. I. T. di *Torino*, i quali trovano la (10) sotto la forma

$$y = 60^0 k_3 + 15^0 ;$$

quindi la loro soluzione ha lo stesso difetto di quella del sig. Mosca;

dal sig. **Ghè**, R. I. T. di *Firenze*, il quale dalla (1) e dalla (8) dedusse le soluzioni non generali

$$x + 3y = 360^0 h + (-1)^h 90^0$$
$$x = 360^0 h + (-1)^h 45^0,$$

e da queste poi dedusse l'altra meno generale ancora,

$$y = 360^0 h + (-1)^h 15^0 ;$$

dai sigg. **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*, i quali dettero solo la soluzione particolarissima

$$x = 45^0, \qquad y = 15^0 ;$$

dai sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*, i quali, dopo aver trovata la soluzione particolarissima ora accennata, credettero di poterne dedurre per soluzione generale

$$x = 180^0 k + 45^0$$
$$y = 180^0 k + 15^0 ;$$

dal sig. **Patellani**, R. L. di *Como*, il quale dalla stessa soluzione particolarissima dedusse invece per soluzione generale

$$x = 360^0 k + 45^0$$
$$y = 360^0 k + 15^0 .$$

Altre risoluzioni:

Il sig. **Bongini**, R. I. T. di *Torino*, giunto alla (1) e ricavatane la (3), ne dedusse

$$\tan 3y = \operatorname{ctn} x,$$

onde la seconda equazione del sistema diventò

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0,$$

da cui

$$x = 180^0 k + 45^0 .$$

Ma poi da questa e dalla (3), invece di dedurne la (10), dedusse

$$y = 60^0 k_3 + 15^0 ;$$

e così la sua soluzione coincide con quella, non generale, del sig. Mosca.

I sigg. **Brenta**, R. I. T. di *Torino*; e **Valagussa**, R. L. Cavour di *Milano* espressero i coseni della prima equazione per le rispettive tangenti e, tenendo conto della seconda equazione, trovano

$$\tan x = 1 \tag{11}$$

onde poi

$$\tan 3y = 1 ; \tag{12}$$

da cui ricavarono la (6).

Osserviamo prima di tutto che con questo procedimento si introducono delle radici estranee, e precisamente quelle che risolvono il sistema proposto quando si cambi il segno del secondo membro della prima equazione. Osserviamo poscia che la (11) e la (12) vanno risolte indipendentemente l'una dall'altra. Questa seconda inesattezza però ripara alla prima, e la soluzione finale invece di contenere anche delle radici estranee, ha solo il difetto di quella del sig. Mosca.

Il sig. **Campetti**, I. T. P. di *Lucca* giunse a trovare tutte e sole le soluzioni comprese fra 0° e 360°; la sua soluzione dunque non è generale. Ma poi vi giunse con un procedimento assai laborioso e indiretto, perchè dalla (3) e dalla prima del sistema dedusse

$$\cos^2 3y = \tfrac{1}{2},$$

da cui

$$y = 60^\circ k \pm 15^\circ,$$

e così evidentemente ottenne delle radici estranee; poscia, per mezzo della (3) stessa trovò tutti i corrispondenti valori di x; e finalmente escluse tutte le soluzioni estranee che si avrebbero, fra 0° e 360° soltanto, osservando che $\cos x$ e $\cos 3y$ devono essere dello stesso segno.

Il sig. **La Spina** R. I. T. di *Catania*, giunto alla (8) alquanto laboriosa (esprimendo cioè le tangenti della seconda equazione per i corrispondenti seni e coseni, e sostituendovi poscia i valori di $\cos 3y$ e di $\operatorname{sen} 3y$ ricavati dalla prima) ne dedusse la (9); poscia, sostituendo questo valore nella espressione che dà $\operatorname{sen} 3y$, ne ricavò

$$y = 120^\circ k + 15^\circ \qquad \text{e} \qquad y = 120^\circ k + 45^\circ.$$

La sua soluzione dunque non è nè esatta nè generale; non è esatta perchè, per es., la coppia $x = 45^\circ$ e $y = 45^\circ$ non soddisfa; non è generale perchè non se ne può, per es., ricavare, la coppia $x = 225^\circ$ $y = 195^\circ$ che evidentemente soddisfa.

Il sig. **Perez** R. I. T. di *Messina*, cominciò col trovare la (1), dalla quale erroneamente ricavò

$$x + 3y = 180^\circ k + 90^\circ,$$

poi sostituì il valore di $3y$, che di qui si deduce, nella seconda equazione del sistema, e ottenne così un'equazione di secondo grado in $\tan x$ i cui coefficienti contengono tutti $\tan(180^\circ k + 90^\circ)$; e quindi i valori che trovò per $\tan x$ e poi per $\tan 3y$ sono assolutamente privi di significato.

Il sig. **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*, con un laborioso procedimento, trovò che il sistema proposto è equivalente all'altro

$$\left.\begin{aligned} 2\cos x \cos 3y &= 1 \\ \cos x &= \operatorname{sen} 3y \end{aligned}\right\}; \tag{13}$$

e questo non è vero, perchè, avendo a un certo punto elevato a quadrato, ha introdotte delle soluzioni estranee. Dalla (13) poi ricavò

$$\operatorname{sen} 6y = 1, \tag{14}$$

indi, osservò che questa equivale all'altra

$$4(1 - \cos^2 3y)\cos^2 3y = 1,$$

da cui per mezzo della prima delle (13), erroneamente dedusse

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2 \pm \sqrt{-2}}} \quad (sic); \tag{15}$$

e qui si fermò. Il suo procedimento è quindi laborioso, incompleto ed errato; e se anche fosse completato e corretto, condurrebbe sempre a delle soluzioni estranee.

Concludendo fra trentuno lettori, che hanno mandato la soluzione del facilissimo sistema proposto, soltanto i sigg. *De Bei*, *Maracci* e *Peruzzi* seppero giungere a un risultato esatto e generale.

G. Pesci.

752. *Un blocco di vetro ha la forma di un prisma retto a base quadrata. Numeriamo le faccie laterali consecutive con 1, 2, 3, 4. Un fascio sottilissimo di luce bianca, situato in un piano perpendicolare all'asse del prisma, e formato di raggi paralleli cade obliquamente sulla faccia 1 si riflette sulla faccia 2 adiacente, ed esce per la faccia 3 parallela ad 1.*

1°. Dimostrare che i fasci colorati convergenti sono paralleli e dire in qual ordine si succedono i colori per un osservatore che si sposti normalmente alla faccia 3 allontanandosi da essa.

2°. I fasci convergenti sono ricevuti sopra una lente acromatica avente l'asse parallelo a questi raggi. Al di là della lente si colloca uno schermo. In qual ordine si succederanno i colori sullo schermo, secondo che questo sarà più o meno vicino alla lente che il suo fuoco principale? Che cosa si vedrà quando lo schermo sarà esattamente nel fuoco?

(Baccalaureato classico in lettere e matematiche. Parigi, Luglio 1905.)

Risoluzione del sig. **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*.

Il fascio sottilissimo di luce bianca incontri la faccia 1 in A secondo un angolo i di incidenza; nel rifrangersi la luce verrà dispersa; r_1 sia l'angolo rifratto del rosso, r_7 quello del violetto; deve essere $r_1 > r_7$; siano R, V i punti in cui i due raggi dei colori suddetti incontrano la faccia 2 e siano $i'_1 = r'_1$, $i'_7 = r'_7$ i rispettivi loro angoli di incidenza e di riflessione; chiamiamo infine R', V' i punti d'incontro del raggio rosso e del raggio violetto con la faccia 3, incontro secondo gli angoli $r''_1 = r_1$, $r''_7 = r_7$ di incidenza e perciò secondo gli angoli $i''_1 = i$ e $i''_1 = i$ di emergenza; i raggi escono dunque paralleli. Si può veder ciò anche nel modo seguente: Se si prolungano le rette R'R, V'V, esse si incontrano in un punto A' del prolungamento della faccia 1, simmetrico di A rispetto alla faccia 2; in questo punto, nel quale è l'immagine virtuale di A, possiamo intendere che un raggio incidente incontri la faccia 1 con un angolo uguale, ma di rotazione contraria a i; onde il prisma si comporta come una lastra a faccie piane e parallele: i raggi di emergenza rosso e violetto, e similmente quelli compresi, escono dunque fra loro paralleli e l'angolo $i''_1 = i''_7$ è uguale e di rotazione contraria all'angolo di incidenza i. Si può anche ragionare nel seguente modo: i prolungamenti dei raggi AR e AV incontrano il prolungamento della faccia 3 secondo angoli di incidenza rispettivamente uguali r_1 e r_7; ne viene che se i raggi potessero seguire realmente tali direzioni, uscirebbero fra loro paralleli e paralleli al raggio di luce incidente; dopo la riflessione sulla faccia 2, i raggi usciranno dunque dalla faccia 3 fra loro paralleli, ma facenti però col raggio di luce primitivo un angolo $2i$. Se n_1 e n_7 sono gli indici relativi di rifrazione, fra l'aria e il vetro, delle luci rossa e violetta, δ_1 e δ_7 gli angoli limiti corrispondenti, avremo

$$\delta_1 = \text{arco sen}\,\frac{1}{n_1}, \qquad \delta_7 = \text{arco sen}\,\frac{1}{n_7},$$

ed essendo

$$n_1 < n_7, \qquad \text{si ha} \qquad \delta_1 > \delta_7.$$

Affinchè la riflessione totale possa avvenire, è necessario dunque che il raggio rosso faccia, incontrando la faccia 2, un angolo di incidenza i'_1 tale che si abbia

$$i'_1 > \delta_1 .$$

Allora, poichè

$$i'_7 > i'_1 ,$$

si avrà

$$i'_1 > \delta_1$$

e a maggior ragione

$$i_7 > \delta_7 .$$

Se tali condizioni sono soddisfatte, la riflessione totale avviene per tutti i raggi colorati incidenti sulla faccia 2.

Dalla relazione

$$i'_1 > \delta_1 , \qquad \text{si ha} \qquad \cos i'_1 < \cos \delta_1$$

(gli angoli i'_1 e δ_1 sono minori di 90°). Si ha

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}(90^0 - i'_1)} = n_1 ,$$

cioè

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\cos i'_1} = n_1 \qquad \text{e perciò} \qquad \frac{\operatorname{sen} i}{\cos \delta_1} < n_1 ,$$

$$\operatorname{sen} i < n_1 \cos \delta_1 ,$$

condizione alla quale deve soddisfare l'angolo d'incidenza, affinchè possa poi avvenire la riflessione totale sulla 2ª faccia. Evidentemente un osservatore che si sposti normalmente alla faccia 3, allontanandosi da essa, incontra tutti i colori dello spettro, a partire dal rosso fino al violetto, e se si ricevono questi raggi su una lente acromatica, se essa è convergente, i raggi concorrono tutti nel fuoco, talchè su uno schermo è posto fra il fuoco e la lente si scorge una sottile linea formata dai colori dell'iride, mentre se lo schermo è posto al di là del fuoco si forma lo stesso la linea colorata sottile, ma i colori sono disposti in ordine inverso. Quando lo schermo è nel fuoco, su di esso apparisce un piccolo punto bianco. Se la lente acromatica è divergente, allorchè si ricevono i raggi, dopo che l'hanno traversata, sullo schermo si disegna lo spettro; ingrandito nel senso della lunghezza, coi colori disposti nel medesimo ordine del fascio di raggi paralleli.

Altre risoluzioni dei sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*.

G. L.

754. *Ogni numero intero che sia scomponibile nella somma del quadrato di un numero dispari e nel triplo del quadrato di un numero dispari, può essere decomposto nella stessa forma almeno in due altri modi.*

G. L.

Risoluzione.

È facile verificare le identità

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= \tfrac{1}{4}(3y - x)^2 + \tfrac{3}{4}(y + x)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(3y + x)^2 + \tfrac{3}{4}(y - x)^2 . \end{aligned}$$

Se x, y sono due numeri interi dispari, si può porre $x = 2p + 1$, $y = 2q + 1$ essendo p, q numeri interi, e le identità precedenti divengono

$$\left.\begin{aligned} (2p + 1)^2 + 3(2q + 1)^2 &= (3q - p + 1)^2 + 3(p + q + 1)^2 \\ &= (3q + p + 2)^2 + 3(q - p)^2 \end{aligned}\right\} . \qquad (\alpha)$$

Queste identità dimostrano che il teorema enunciato è generalmente vero.

La scomposizione in un quadrato e nel triplo di un quadrato in tre modi effet-

tivamente distinti non sussisterebbe più soltanto ove fosse verificato uno dei seguenti sistemi di equazioni

$$\left.\begin{array}{l} 2p+1=3q-p+1 \\ 2q+1=2p+q+1 \end{array}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{array}{l} 2p+1=-(3q-p+1) \\ 2q+1=p+q+1 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2p+1=3q+p+1 \\ 2q+1=-(p+q+1) \end{array}\right\} \quad (3) \qquad \left.\begin{array}{l} 2p+1=-(3q-p+1) \\ 2q+1=-(p+q+1) \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2p+1=3q+p+2 \\ 2q+1=q-p \end{array}\right\} \quad (5) \qquad \left.\begin{array}{l} 2p+1=-(3q+p+2 \\ 2q+1=q-p \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2p+1=3q+p+2 \\ 2q+1=-(q-p) \end{array}\right\} \quad (7) \qquad \left.\begin{array}{l} 2p+1=-(3q+p+2) \\ 2q+1=-(q-p) \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3q-p+1=3q+p+2 \\ p+q+1=q-p \end{array}\right\} \quad (9) \qquad \left.\begin{array}{l} 3q-p+1=-(3q+p+2) \\ p+q+1=q-p \end{array}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3q-p+1=3q+p+2 \\ p+q+1=-(q-p) \end{array}\right\} \quad (11) \qquad \left.\begin{array}{l} 3q-p+1=-(3q-p+2) \\ p+q+1=-(q-p) \end{array}\right\}. \quad (12)$$

Risolvendo questi sistemi si trova che il (1), (4), (6), (7) si riducono ad una sola equazione cioè rispettivamente

$$p=q \quad (1)' \qquad p+3q+2=0 \quad (4)'$$
$$p+q=-1 \quad (6)' \qquad p-3q=1 \quad (7)'$$

e che gli altri otto non hanno soluzioni intere.

Quando è verificata una delle eguaglianze (1)', (4)', (6)', (7)' si ha che la scomposizione indicata si fa in due modi soli invece che in tre. Per esempio se si prende $q=0$, $p=1$, è verificata la (7)', e si ha

$$12=3^2+3\,.\,1^2=0^2+3\,.\,2^2$$
$$=3^2+3\,.\,1^2\,.$$

I sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania* hanno trovato la identità (α) ma non hanno discusso i casi in cui essa cade in difetto.

I sigg. **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia* hanno esaminato alcuni esempi, fra i quali quello sopra citato, cioè

$$12=3^2+3\,.\,1^2$$

ed hanno concluso, troppo affrettatamente, che il teorema è *errato*.

G. L.

756. *Costruire un triangolo, essendo dati* $b-c$, $\beta-\gamma$ *e* $r-r_a$.

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*.

Supposto risoluto il problema, siano M_a il punto medio di BC, A' il punto in cui la bisettrice di $\widehat{A}$ taglia il cerchio circoscritto al triangolo, L_a il punto in cui la bisettrice stessa taglia BC; la circonferenza A'(A'B) taglia sulla AA' due punti I, I_a, (uno interno al triangolo, l'altro esterno) i quali sono rispettivamente l'incentro e l'excentro relativo a BC. Dette K_a, K'_a le proiezioni ortogonali di I, I_a su BC è, evidentemente, $IK_a=r$; $I_aK'_a=r_a$. Supposto $\beta>\gamma$, si cali da B la perpendicolare alla AA', e siano E, F rispettivamente, i punti in cui essa incontra AA', AC; si ha

$$M_aE=\tfrac{1}{2}\,CF=\tfrac{1}{2}\,(b-c)\,; \qquad M_a\widehat{A'}A=\tfrac{1}{2}\,(A\widehat{L_a}C-AL_aB)=\tfrac{1}{2}\,(\beta-\gamma)\,,$$
$$M_aA'=\tfrac{1}{2}\,(r_a-r)\,.$$

Ne segue la seguente

Costruzione. — Costruiscasi il triangolo $A'M_aE$ con

$$A'M_a = \tfrac{1}{2}(r_a - r), \qquad M_aE = \tfrac{1}{2}(b - c), \qquad \widehat{M_aA'E} = \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

(notando che dev'essere $\widehat{M_aEA'} < \frac{1}{2}\pi$); per M_a, E si conducano rispettivamente le perpendicolari ad $A'M_a$, EA' le quali s'incontreranno in un punto B, del quale diciamo C il simmetrico rispetto ad M_a: la circonferenza $BA'C$ incontra ulteriormente la retta $A'E$ in un punto A ed ABC è il triangolo domandato.

Si ha sempre una soluzione, purchè sia possibile la costruzione del suddetto triangolo $M_aA'E$.

Altre risoluzioni geometriche dei sigg. **Jodi**, R. I. T. di *Modena* e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*.

Risoluzioni trigonometriche mancanti affatto della costruzione, dei sigg. **Casalasco** e **Chiesa**, R. L. di *Cuneo*; **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*.

Un errore di stampa ha mutato sostanzialmente la quistione. Ai risolutori che, avendo osservato che qualche errore ci doveva essere (poichè $r < r_a$), si rivolsero a noi, abbiamo mandato la correzione. Così modificata, la quistione fu risoluta molto bene dai sigg. **Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.

La quistione doveva essere la seguente:

Costruire un triangolo, dati $b - c$, $\beta - \gamma$, r *o* r_a.

Risoluzione.

Mantenendo le notazioni della risoluzione precedente, abbiamo

$$\widehat{A'IK_a} = \widehat{A'I_aK_a} = \widehat{IA'M_a} = \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),$$
$$K_aK'_a = a - (2p - 2b) = b - c),$$
$$M_aK_a = M_aK'_a = \tfrac{1}{2}(b - c),$$

Dunque, posto $\rho = \begin{cases} r \\ r_a \end{cases}$, e detto K_i uno qualunque dei punti K_a, K'_a, I_i uno qualunque dei punti I, I_a ricaviamo la seguente costruzione:

Coi cateti $I_iK_i = \rho$, $M_aK_i = \frac{1}{2}(b - c)$ costruiscasi il triangolo rettangolo $I_iM_aK_i$; per I_i si conduca la retta ς, che faccia con I_iK_i un angolo eguale a $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ e, rispetto ad I_iK_i, sia dalla stessa parte di I_iM_a; sia A' il punto in cui la perpendicolare condotta per M_a alla M_aK_i taglia la ς; allora, detti B, C i punti in cui la circonferenza $A'(A'I_i)$ taglia M_aK_i, A il punto d'incontro delle rette simmetriche di BC rispetto a BI_i, CI_i, sarà ABC il triangolo richiesto.

Ora osserviamo che se deve aversi $\rho = r$, bisogna che A', I_i, siano da parti opposte rispetto alla M_aK_i, dunque in tal caso dev'essere

$$\rho \tan \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) < \tfrac{1}{2}(b - c).$$

Se invece si vuole $\rho = r_a$ dev'essere

$$\rho \tan \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) > \tfrac{1}{2}(b - c).$$

Se, infine i dati sono tali che si abbia

$$\rho \tan \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \tfrac{1}{2}(b - c),$$

il punto A se ne va all'infinito, e il triangolo si riduce a una striscia.

R. Vercellin.

757. *Essendo* S *l'area d'un triangolo* ABC, A' *il punto d'incontro delle rette* BC, H_bH_c, *si ha*

$$\overline{AA'}^2 = \frac{2S}{\operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C}\left(1 + \frac{4}{(\tan B - \tan C)^2}\right).$$

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*.

Siccome i punti di B, C sono coniugati armonici rispetto ad A', H_a, si ha

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{H_aC}{BH_a},$$

ossia, essendo

$$H_aC = h_a \operatorname{ctn} C. \qquad BH_a = h_a \operatorname{ctn} B,$$

$$\frac{A'H_a + h_a \operatorname{ctn} C}{A'H_a - h_a \operatorname{ctn} B} = \frac{\tan B}{\tan C},$$

da cui

$$A'H_a = \frac{2h_a}{\tan B - \tan C}.$$

Laonde sarà

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AH_a}^2 + \overline{A'H_a}^2 = h_a^2\left(1 + \frac{4}{(\tan B - \tan C)^2}\right),$$

e siccome

$$h_a^2 = \frac{2S}{\operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C},$$

risulta finalmente

$$\overline{AA'}^2 = \frac{2S}{\operatorname{ctn} B + \operatorname{ctn} C}\left[1 + \frac{4}{(\tan B - \tan C)^2}\right].$$

c. v. d.

Risoluzioni analoghe a questa mandarono i sigg. **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*. Altre risoluzioni dei sigg. **Casalasco** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*.

Nota. — La *proprietà armonica del quadrangolo*, invocata nella dimostrazione dianzi riportata, non è generalmente dimostrata nei corsi di geometria elementare. Ma di essa che, brevemente, si può enunciare: *In ogni quadrangolo una diagonale è incontrata dalle altre due, in punti armonici rispetto ai vertici ch'essa unisce*, si può dare la seguente semplice dimostrazione.

Sia HKLM un quadrangolo qualunque, siano rispettivamente A, B, C, D i punti d'incontro delle coppie di rette HK, LM; KL, HM; AB, HL; AB, KM. Applicando i teoremi di Ceva e di Menelao al triangolo ABH, si ha

$$\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BM}{HM}\cdot\frac{HK}{AK} = -1; \qquad \frac{HK}{AK}\cdot\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BM}{HM} = 1.$$

Da queste, divise membro a membro, si deduce

$$\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AD}{BD} = -1,$$

la quale mostra che ABCD è un *gruppo armonico*.

R. Vercellin.

758. *Risolvere l'equazione*

$$x^4 + ax^3\sqrt{3} + a^4 = 0.$$

R. Vercellin.

1ª **Risoluzione** dei sigg. **Campetti**, I. T. P. di *Lucca* e **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*.

Posto

$$x = y - a\sqrt{3}, \tag{1}$$

l'equazione proposta diviene

$$y^4 - 3ay^3\sqrt{3} + 9a^2y^2 - 3a^3y\sqrt{3} + a^4 = 0. \tag{2}$$

Da questa, dividendo ambo i membri per y^2, e ponendo

$$y + \frac{a^2}{y} = z, \tag{3}$$

da cui

$$y = \tfrac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - 4a^2}), \tag{3'}$$

si ricava l'equazione

$$z^2 - 3az\sqrt{3} + 7a^2 = 0,$$

che risoluta dà

$$z_1 = \tfrac{1}{2}a(3\sqrt{3} + i); \qquad z_2 = \tfrac{1}{2}a(3\sqrt{3} - i). \tag{4}$$

Dalle (4), (3)', (1) si ricavano subito le radici dell'equazione proposta

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}a\left[\sqrt{3} + i \pm \sqrt{2(5 - 3i\sqrt{3})}\right]; \quad \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}a\left[\sqrt{3} - i \pm \sqrt{2(5 - 3i\sqrt{3})}\right]. \tag{5}$$

2ª **Risoluzione** dei sigg. **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*.

Il 1° membro dell'equazione data può porsi sotto la forma

$$(x^2 + \lambda x + \mu)(x^2 + \lambda' x + \mu') = 0, \tag{6}$$

ossia

$$x^4 + (\lambda + \lambda')x^3 + (\mu + \mu' + \lambda\lambda')x^2 + (\lambda\mu' + \lambda'\mu)x + \mu\mu' = 0$$

se sono soddisfatte le condizioni

$$\lambda + \lambda' = a\sqrt{3}, \qquad \mu + \mu' + \lambda\lambda' = 0, \qquad \mu\mu' = a^4, \tag{7}$$

$$\lambda\mu' + \lambda'\mu = 0. \tag{7'}$$

Ora, se poniamo

$$\lambda\lambda' = \theta, \qquad \text{da cui} \qquad \mu + \mu' = -\theta,$$

per le (7), ricaviamo facilmente

$$\left.\begin{matrix} \lambda \\ \lambda' \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}(a\sqrt{3} \pm \sqrt{3a^2 - 4\theta}); \qquad \left.\begin{matrix} \mu \\ \mu' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}(\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4a^4}). \tag{8}$$

Questi valori, sostituiti nella (7)' porgono l'equazione

$$a\theta\sqrt{3} = \sqrt{(\theta^2 - 4a^4)(3a^2 - 4\theta)},$$

la quale è verificata per $\theta = a^2$. Sostituendo questo valore nelle (8), e osservando la (6), si vede che l'equazione proposta si scinde nelle seguenti

$$x^2 + \tfrac{1}{2}a(i + \sqrt{3})x + \tfrac{1}{2}a^2(-1 + i\sqrt{3}) = 0,$$
$$x^2 + \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} - i)x - \tfrac{1}{2}a^2(1 + i\sqrt{3}) = 0,$$

da cui si ricavano le (5).

Altre risoluzioni: Il sig. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*, suppone che nell'enunciato sia incorso un errore di stampa, e, invece della proposta, risolve l'equazione

$$x^4 + ax^3\sqrt[4]{2^3} + a^4 = 0.$$

I sigg. **Casalasco** e **Chiesa**, R. L. di *Cuneo* si limitano ad osservare che l'equazione proposta *è risolvibile mediante la nota regola*.

R. Vercellin.

759. *Risolvere il sistema di equazioni*

$$\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y = \tfrac{1}{2}, \qquad \operatorname{sen}(x+y) = \tfrac{1}{2}.$$

G. Pesci.

1ª Risoluzione.

Trasformando il primo membro della prima in un prodotto e tenendo conto della seconda, si vede subito che il sistema proposto è equivalente all'altro

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x-y) = \tfrac{1}{2}\\ \operatorname{sen}(x+y) = \tfrac{1}{2}\end{array}\right\}, \tag{1}$$

da cui

$$x + y = 360^\circ k_1 + 30^\circ \quad (2) \qquad \text{oppure} \qquad x + y = 360^\circ k_2 + 150^\circ \quad (3)$$

e

$$x - y = 360^\circ k_3 + 60^\circ \quad (4) \qquad \text{oppure} \qquad x - y = 360^\circ k_4 - 60^\circ. \quad (5)$$

Combinando ciascuna delle (2), (3) con ciascuna delle (4), (5), si hanno quattro sistemi, dai quali si ricavano le quattro soluzioni

$$\begin{cases} x = 180^\circ(k_1 + k_3) + 45^\circ \\ y = 180^\circ(k_1 - k_3) - 15^\circ, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 180^\circ(k_1 + k_4) - 15^\circ \\ y = 180^\circ(k_1 - k_4) + 45^\circ, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 180^\circ(k_2 + k_3) + 105^\circ \\ y = 180^\circ(k_2 - k_3) + 45^\circ, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 180^\circ(k_2 + k_4) + 45^\circ \\ y = 180^\circ(k_2 - k_4) + 105^\circ; \end{cases}$$

queste sono dunque tutte e sole le soluzioni del sistema proposto.

2ª Risoluzione.

Dalle due equazioni proposte, sviluppando e sommando, si ha subito

$$(\cos x + \cos y)(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) = \tfrac{3}{4},$$

da cui, trasformando le somme in prodotti,

$$2 \operatorname{sen}(x+y) \cos^2 \tfrac{1}{2}(x-y) = \tfrac{3}{4},$$

e perciò, tenendo conto della seconda,

$$\cos \tfrac{1}{2}(x-y) = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Di qui si ricavano la (4) e la (5), e quindi le stesse soluzioni finali.

Mandarono la prima risoluzione i sigg. **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*, **De Bei**, R. I. T. di *Venezia* e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; mandarono la seconda risoluzione, meno breve della prima, i sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; tutt' e cinque però misero i risultati finali sotto forma meno semplice.

La prima risoluzione fu mandato anche

dal sig. **Peruzzi**, I. T. P. di *Ravenna*, il quale però nelle soluzioni finali errò il segno di y;

dal sig. **Brenta**, R. I. T. di *Torino*, il quale però dette per soluzioni

$$\begin{cases} x = 90^\circ k_1 + 30^\circ + (-1)^{k_1} 15^\circ \\ y = 90^\circ k_2 - 30^\circ + (-1)^{k_2} 15^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 90^\circ k_3 - 30^\circ + (-1)^{k_3} 15^\circ \\ y = 90^\circ k_4 + 30^\circ + (-1)^{k_4} 15^\circ, \end{cases}$$

le quali soddisfano solo se si aggiunge la condizione che k_1 e k_2, come k_3 e k_4, abbiano la stessa parità;

i sigg. **Casalasco** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*, **De Castro**, R. L. di *Milano* e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*, i quali però non poterono giungere a trovare *tutte* le soluzioni, avendo supposto, nelle (2), (3), (4) e (5), $k_1 = k_3$ e $k_2 = k_4$;

il sig. **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*, il quale però dette solo le soluzioni particolari che si ottengono dalle (2), (4), (5) e (6) facendo

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_2 = 0;$$

i sigg. **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*, **Chiesa**, R. L. di *Cuneo*, **Jodi**, R. I. T. di *Modena*, **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*, i quali però giunsero solo alla soluzione particolarissima

$$x = 45^0, \qquad y = -15^0;$$

i sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*, i quali però, dalle soluzioni particolarissime ora accennate, credettero di dedurre le soluzioni generali aggiungendo, semplicemente, $360^0 k$;

il sig. **Naccarati**, R. L. di *Benevento*, il quale però dalla prima delle (1) dedusse

$$x - y = 360^0 \pm 30^0,$$

e qui si fermò; la sua risoluzione è quindi errata e incompleta.

G. Pesci.

760. *Dimostrare l'identità*

$$\sqrt{a^2 + a + 1 + (a+1)\sqrt{a^2+1}} - \sqrt{a^2 - a + 1 - (a-1)\sqrt{a^2+1}}$$
$$= \sqrt{a^2 - a + 1 + (a-1)\sqrt{a^2+1}} + \sqrt{a^2 + a + 1 - (a+1)\sqrt{a^2+1}}.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione dei sigg. **Bongini**, **Costa** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

I due membri dell'identità possono supporsi positivi, il che si ha sempre che a è positivo. Innalzando a quadrato e sopprimendo il fattore 2 abbiamo,

$$a^2 + 1 + \sqrt{a^2+1} - \sqrt{a^2 + 2 + 2\sqrt{a^2+1}}$$
$$= a^2 + 1 - \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2 + 2 - 2\sqrt{a^2+1}},$$

dalla quale

$$2\sqrt{a^2+1} = \sqrt{a^2 + 2 - 2\sqrt{a^2+1}} + \sqrt{a^2 + 2 + 2\sqrt{a^2+1}}$$

e quadrando ancora,

$$4(a^2+1) = 2a^2 + 4 + 2a^2 = 4(a^2+1).$$

Altre risoluzioni dei sigg. **Jodi**, R. I. T. di *Modena*, che riduce l'identità proposta ad un'altra equivalente di forma più semplice; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Maracci**, R. I. T. di *Ancona* e **De Bei**, R. I. T. di *Venezia* riducono l'identità proposta alla forma $a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$. Le risoluzioni dei sigg. **De Castro**, R. L. di *Milano* e **Mugnano** di *Varese* poco differiscono da quella del sig. Jodi; quella infine del sig. **Tafi**, R. I. T. di *Arezzo*, si basa su di un processo troppo faticoso di successive sostituzioni e riduzioni.

C. Alasia.

QUISTIONI DA RISOLVERE

771. Risolvere il sistema

$$2(x^2+y^2)+5xy+x+y+1=0$$
$$x^2+y^2+4[xy+3(x+y)]+10=0.$$

772. Si mostri che la sola soluzione intera e positiva del sistema

$$3x+6y-2z=22,$$
$$5x+8y-6z=28,$$

è $x=2$, $y=3$, $z=1$.

773. Risolvere il sistema

$$x^2-2y^2-x=0,$$
$$2x^2-5y^2+3y=0.$$

774. Scomporre in fattori la funzione

$$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y).$$

775. Determinare due numeri x, y $(x>y)$ tali che la differenza di essi e la differenza dei loro quadrati siano rispettivamente uguali al loro prodotto e alla differenza dei loro cubi.

776. Risolvere il sistema

$$x^2+y=11, \qquad (1) \qquad\qquad x+y^2=7. \qquad (2)$$

C. Alasia.

777. Se la congiungente i punti di mezzo di due lati opposti AD, BC d'un quadrangolo piano ABCD incontra i prolungamenti degli altri due lati AB, CD, rispettivamente in H, K, si ha

$$AH:DK=AB:CD.$$

778. In ogni triangolo si ha

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(r_br_c+rr_a)(r_cr_a+rr_b)(r_ar_b+rr_c)}{R}}.$$

779. Costruire un triangolo, dati un lato, l'altezza relativa e la distanza fra i piedi della mediana e della bisettrice uscenti dal vertice opposto.

780. Risolvere le equazioni

$$x^4+x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})=0,$$
$$x^4-x-\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})=0.$$

781. Costruire un triangolo, dati un angolo, la mediana e la simediana relative.

782. Eseguire la somma seguente:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{(r+1)[r(r+2)]^2}=\frac{1}{2(1.3)^2}+\frac{1}{3(2.4)^2}+\dots+\frac{1}{(n+1)[n(n+1)]^2}.$$

783. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} (x+2y)^2(x^2-2y^2)=a, \\ 2x(x+y)-y^2=b. \end{cases}$$

Applicazione al caso di $a=24$, $b=9$.

R. VERCELLIN.

784. Risolvere l'equazione

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctn}^2 x+\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x+a=0.$$

Se A', B', C' sono i punti d'incontro dei prolungamenti delle altezze d'un triangolo, colla circonferenza circoscritta si ha

$$A'B'C'=4R^2\cos A\cos B\cos C\,(\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}2B+\operatorname{sen}2C).$$

Casi particolari.

E. CUTORE.

785. Sia ABCD un quadrilatero inscritto in un cerchio; i lati opposti AB e DC prolungati si seghino in F, e gli altri BC ed AE in E: mostrare che il circolo descritto su EF come diametro interseca il circolo ABCD ortogonalmente.

786. Data la base, l'angolo al vertice, ed il raggio del cerchio inscritto ad un triangolo, costruire " geometricamente " il triangolo.

C. DE BEI.

787. Risolvere l'equazione

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

se è

$$c=\tfrac{1}{8}a(4b-a^2).$$

788. In una semicirconferenza di diametro $AB=2r$ condurre una corda $CD=2x$, parallela al diametro, in modo che il trapezio isoscele ABDC abbia un perimetro dato $2p$. Discutere il problema e dimostrare che fra tutti i trapezi che soddisfano alle condizioni poste, quello di massimo perimetro è il semi-esagono regolare.

789. Dimostrare l'identità

$$\sum_{r=1}^{r=n}\binom{m-r}{n-r}=\sum_{r=1}^{r=n}r\cdot\binom{m-r-1}{n-r}.$$

G. CARDOSO-LAYNES.

790. Se h_1, h_2, h_3, h_4 sono le altezze di un tetraedro, p_1, p_2, p_3, p_4 le distanze di un punto P interno dalle facce si ha

$$\frac{p_1}{h_1}+\frac{p_2}{h_2}+\frac{p_3}{h_3}+\frac{p_4}{h_4}=1.$$

Come deve essere modificato questo teorema, se il punto P è esterno al tetraedro.

K.

N. B. — Le risoluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. LAZZERI, Livorno. Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 30 settembre 1906.

Si pregano vivamente i signori risolutori di *inviare ogni quistione o giuoco in foglio separato, scrivendo su ciascuno il proprio nome e l'istituto al quale essi appartengono.*

Le lettere non francate o insufficientemente francate vengono respinte.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 6 luglio 1906

254. *Trovare il massimo numero delle parti in cui un piano è diviso da* m *rette.*

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Sia x_r il numero delle parti in cui r rette dividono il piano. Un'altra retta che incontri le prime r in punti distinti rimarrà divisa dagli r punti d'incontro in $r+1$ parti ($r-1$ segmenti, e 2 semirette) ciascuna delle quali dividerà in due parti una delle x_r parti suddette. Quindi le $r+1$ rette divideranno il piano in $x_r+(r+1)$ parti. Cioè si avrà

$$x_{r+1}=x_r+(r+1).$$

Se in questa formula si pone successivamente 1, 2, 3,... $(m-1)$ in luogo di r, si sommano le eguaglianze ottenute, si sopprimono i termini comuni, e si osserva che $x_1=2$, si ha

$$x_m=\frac{m(m+1)+2}{2}.$$

Questa formula dà dunque il numero massimo delle parti in cui m rette di un piano dividono il piano stesso.

Inviarono risoluzioni esatte di questo giuoco i sigg. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina* e **Cellini** di *Forlì*. I sigg. **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi** e **Costa**, R. I. T. di *Torino* risolsero il giuoco ritenendo che fosse richiesto il numero delle *parti finite* in cui un piano può essere al massimo diviso da m delle sue rette. Il sig. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*, inviò una risoluzione errata.

C. Ciamberlini.

255. *Trovare il massimo numero delle parti in cui un piano è diviso da* n *circonferenze.*

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Supponiamo che nel piano siano date r circonferenze che s'intersechino a due a due in coppie di punti distinti. Se un'altra circonferenza interseca le prime r in $2r$ punti distinti, questi divideranno la nuova circonferenza in $2r$ parti, ciascuna delle quali dividerà in 2 parti una delle parti in cui le prime r circonferenze dividono il piano. Se dunque x_r è il numero massimo delle parti in cui r circonferenze dividono il piano, si ha

$$x_{r+1}=x_r+2r.$$

Ponendo successivamente 1, 2,..., $n-1$ in luogo di r, sommando, riducendo e osservando che $x_1=2$, si ha

$$x_n=n(n-1)+2.$$

Osservazione. — Fa soltanto eccezione il caso di $n=0$.

Inviò la risoluzione esatta del giuoco il sig. **Cellini** di *Forlì*. Il sig. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*, per una svista commessa, trovò $x_n=n(n+1)+2$. I sigg. **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi** e **Costa G.**, R. I. T. di *Torino*, risolsero il giuoco nell'ipotesi che fosse richiesto il massimo numero delle *parti finite* in cui il piano resta diviso dalle circonferenze. Il sig. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*, inviò una risoluzione errata.

C. Ciamberlini.

256. *Trovare il massimo numero delle parti in cui un piano è diviso da* m *rette e da* n *circonferenze.*

C. Ciamberlini.

Risoluzione.

Indichiamo con $x_{m,r}$ il massimo numero delle parti in cui m rette ed r circonferenze, dividono il piano. Se oltre a queste rette e a queste circonferenze, abbiamo un'altra circonferenza che intersechi le rette e le circonferenze in punti distinti, avremo sulla nuova circonferenza un numero $2(m+r)$ di punti che la divideranno in altrettante parti. Ciascuna di queste dividerà una delle $x_{m,r}$ parti in 2 parti; quindi si avrà

$$x_{m,r+1}=x_{m,r}+2(m+r),$$

Ponendo in questa formula successivamente 0, 1, 2, 3,... $(n-1)$ in luogo di r, sommando le eguaglianze ottenute, riducendo e osservando (giuoco n. 254) che

$$x_{m,0}=\frac{m(m+1)+2}{2},$$

si ha

$$x_{m,n}=\frac{m(m+1)+2}{2}+2mn+n(n-1).$$

Osservazione. — Fa soltanto eccezione il caso di $m=0$.

Inviarono risoluzioni esatte di questo giuoco i sigg. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Cellini** di *Forlì*. Il sig. **De Bei**, R. I. T, di *Venezia*, inviò una risoluzione errata.

C. Ciamberlini.

G. L.

REPERTORIO DI MATEMATICHE E FISICA

Un vol. in-64° elegantemente legato - 2ª edizione - LIRE UNA.

... Ma, questa nuova edizione, non è solo pregevole dal lato tipografico, poichè anche dal lato scientifico è meritevole di venire favorevolmente accolta tanto dagl'insegnanti quanto dagli scolari perchè procura agli uni ed agli altri un mezzo comodo, facile e poco dispendioso di avere a portata di mano tutte le formule e tutte le regole che ordinariamente si è costretti a ricercare scartabellando molti volumi. Questo manualetto si differenzia dagli altri lavori congeneri, non solo per la precisione e concisione del suo contenuto, ma anche perchè contiene, ciò che manca negli altri, lo schema ordinato e perfetto per discutere tutti i problemi di matematica e fisica che sono risolubili con le sole nozioni della matematica elementare.

... se anche per adesso lo scolaro non potrà portare con sè, questo manualetto il giorno degli esami, sarà sempre per esso il mezzo più comodo e più efficace per imprimersi nella mente, la vigilia degli esami, tutte le formule e le regole di cui avrà bisogno nell'ardua prova ...

Prof. Aroldo Martini Zuccagni.

Gazzetta Livornese, Anno XXXII, n. 181.

... Il motto latino *multum in parvo* si può molto a proposito applicare a questo volumetto, che in 150 paginette riassume tutte le formule di matematica e fisica, da quelle più semplici di aritmetica a quelle complicatissime di trigonometria sferica, da quelle di meccanica a quelle di elettrologia ...

... Il volumetto riesce utilissimo non solo agli studenti, ma anche a chi già ha terminato gli studii, poichè frequentemente capita di avere bisogno di qualche formula, appresa alla scuola, ma poi dimenticata.

A.

L'Eco degl'Ingegneri e Periti Agrimensori di Pescia, Anno X, n. 2.

Chi spedirà l'importo all'Editore RAFF. GIUSTI in Livorno, riceverà il volume franco di porto.

È stato pubblicato:

GIULIO LAZZERI

TEORIA ELEMENTARE DELLE SEZIONI CONICHE

Prezzo L. **1,50** (*)

Questo volumetto, del formato del *Periodico di matematica* e del *Supplemento al Periodico di matematica* contiene la materia che di solito si svolge nel II biennio dei nostri istituti tecnici. In esso non si trovano le lacune che esistono in quasi tutti i trattati più in uso, e sono svolte interamente e colla massima generalità tutte le proprietà fondamentali delle sezioni coniche, che permettano di risolvere su queste importantissime curve innumerevoli quistioni e problemi, che di solito vengono risolute soltanto dopo lo studio della geometria analitica o della geometria proiettiva.

(*) Verrà spedito franco a chi invierà l'importo alla Libreria RAFFAELLO GIUSTI, Livorno.

ANNO X — NOVEMBRE 1906 — FASC. I

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - A. BASSI. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI. - R. VERCELLIN.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al **Periodico di Matematica**

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2.50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo; devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Sulla equazione di 3° grado. (G. CANDIDO).
Sulla trasformazione del radicale ecc. (E. DUCCI).
72ª quistione a concorso.
Risoluzioni delle quistioni 755, 765, 766, 767, 770, 771, 772, 773, 774, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783 e 790.
Quistioni da risolvere 791-800.

Copertina:

Relazione del concorso dei giuochi per l'anno IX.
Spiegazione dei giuochi 260 e 263.
12° giuoco a concorso.
Per ridere.
Giuochi proposti 275-280.

LIVORNO
RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE
LIBRAIO-TIPOGRAFO
1906

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes, a Savona,** *Via Luigi Corsi, Villa Garroni.*

RELAZIONE DEL CONCORSO DEI GIUOCHI PER L'ANNO IX.

Durante l'anno 1905-06 furono proposti in questo periodico **33** giuochi, dei quali **2** a concorso. Degli **82** risolutori i **22** di cui riportiamo i nomi spiegarono più di *un quarto* dei giuochi proposti.

1.	**Belvedere**, R. I. T. di *Messina*.	giuochi **31**	12.	**Salonia**, L. P. di *Caserta*	giuochi 13
2.	**Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*	„ 27	13.	**Sosso**, L. P. di *Caserta*	„ 13
3.	**Bongini**, R. I. T. di *Torino*	„ 26	14.	**Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.	„ 13
4.	**Brenta**, R. I. T. di *Torino*	„ 25	15.	**Abbreccia**, R. I. T. di *Bari*.	„ 11
5.	**Costa G.**, R. I. T. di *Torino*	„ 25	16.	sig.na **Montanari**, I. T. P. di *Ravenna*	„ 11
6.	**Cellini**, di *Forlì*	„ 21	17.	**Vercellin**, R. I. T. di *Torino*	„ 11
7.	**Maracci**, R. I. T. di *Ancona*	„ 16	18.	**Cirillo**, R. I. T. di *Ancona*	„ 10
8.	**De Bei**, R. I. T. di *Venezia*	„ 15	19.	**Gneme** di *Roma*	„ 10
9.	**Perez**, R. I. T. di *Messina*	„ 14	20.	**Lucaroni**, R. I. T. di *Ancona*	„ 10
10.	**Cera**, L. P. di *Caserta*	„ 13	21.	**Cristini**, R. I. T. di *Bari*.	„ 9
11.	**Formato**, L. P. di *Caserta*	„ 13	22.	**Ventola**, L. P. di *Bitonto*.	„ 9

Tenuto conto del numero delle risoluzioni inviate e soprattutto dei pregi delle risoluzioni stesse, abbiamo conferito il Premio Annuale al sig.

BALDASSARRE BELVEDERE, R. I. T. di *Messina*.

La Redazione.

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 260 e 263.

260. (*) *Trovare tre numeri interi e positivi tali che la metà del 1°, la terza parte del 2° e la quarta parte del 3° abbiano per somma 9 e il doppio del 1°, il triplo del 2° ed il quadruplo del 3° abbiano per somma 99.* G. C.-L.

Risoluzione.

Indicando rispettivamente x, y e z i tre numeri, si deve avere

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}z = 9; \qquad (1) \qquad\qquad 2x + 3y + 4z = 99. \qquad (2)$$

Riducendo la (1) a forma intera essa diviene

$$6x + 4y + 3z = 108 \qquad (3)$$

e sottraendo membro a membro la (3) dalla (2), dopo avere moltiplicati i due membri di questa per 3 si ottiene

$$5y + 9z = 189. \qquad (4)$$

È chiaro (4) che y deve essere un multiplo di 9; poniamo $y = 9a$ e la (4) diverrà

$$5a + z = 21. \qquad (5)$$

Usando il metodo di Hermite per la risoluzione in numeri interi e non negativi della (5), poichè è $21 = 5 \times 4 + 1$ e l'equazione $5a' + z' = 1$ ammette l'unica soluzione intera e non negativa $a' = 0$, $z' = 1$, tutte le soluzioni intere e non negative della (5) saranno date dalle formule

$$a = m, \quad z = 1 + 5n \quad (\text{con } m + n = 4) \qquad \text{e quindi} \qquad y = 9m. \qquad (6)$$

Dalla (3) si ha poi

$$x = \tfrac{1}{6}(108 - 4y - 3z) \qquad (7)$$

e sostituendo con le (6), si ottiene

$$x = \tfrac{1}{6}(35 - 12m - 5n) = \tfrac{1}{6}[35 - 5(m + n) - 7m],$$

cioè

$$x = \tfrac{1}{6}(15 - 7m).$$

Affinchè x sia positivo deve essere $m \leqq 2$ e perchè sia anche intero deve essere m dispari, quindi l'unico valore possibile per m è $m = 1$ e quindi (6) $n = 3$.

Si ha dunque (6) (7)

$$x = 4, \quad y = 9, \quad z = 16.$$

I tre numeri richiesti sono **4**, **9** e **16** e infatti

$$\tfrac{1}{2}.4 + \tfrac{1}{3}.9 + \tfrac{1}{4}.16 = 2 + 3 + 4 = 9 \quad \text{e} \quad 2.4 + 3.9 + 4.16 = 8 + 27 + 64 = 99.$$

Inviarono risoluzioni i sigg. **Angrisani**, L. P. di *Nocera Inf.*; **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini**, **Cernuschi** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Cellini** di *Forlì*; **Giannuzzi**, L. P. di *Maglie* (Lecce); **Lombardi**, R. L. di *Salerno*; **Naccarati**, R. L. di *Benevento*; **Plancich**, Sem. S. Giuseppe di *Porto-Re* (Cronzia); **Ventola**, L. P. di *Bitonto* (Bari). — Inoltre ci è pervenuta una risoluzione errata.

(G. C.-L.)

(*) Nell'enunciato erano state omesse le parole *interi e positivi*; la maggior parte dei risolutori però hanno considerato queste parole come tacitamente sottintese.

From Ann. of Math

SULLA EQUAZIONE DI 3° GRADO

Prendendo le mosse da una quistione proposta dal prof. A. Bassi che si trova a pag. 136 del Vol. VII del "Supplemento", do un metodo di risoluzione della equazione di 3° grado, risoluzione che, didatticamente, mi pare meriti di essere notata.

Consideriamo l'equazione

$$(ax+b)^3+(a'x+b')^3+x^3-3x(ax+b)(a'x+b')=0. \qquad (1)$$

In virtù della identità

$$\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\left[(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)-(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1+\alpha_1\alpha_2)\right],$$

la (1) si può scrivere

$$(\mathrm{M}x+\mathrm{N})(\mathrm{P}x^2+\mathrm{Q}x+\mathrm{R})=0, \qquad (2)$$

in cui

$$\mathrm{M}=a+a'+1, \quad \mathrm{N}=b+b', \quad \mathrm{P}=a^2+a'^2+1-a-a'-aa',$$
$$\mathrm{Q}=2(ab+a'b')-ab'-a'b-b-b', \quad \mathrm{R}=b^2+b'^2-bb'.$$

Nel caso $a=a'=0$ l'equazione (1) si riduce all'altra

$$x^3-3bb'x+b^3+b'^3=0, \qquad (3)$$

e si ha in questo caso

$$\mathrm{M}=1, \quad \mathrm{N}=b+b', \quad \mathrm{P}=1,$$
$$\mathrm{Q}=-(b+b'), \quad \mathrm{R}=b^2+b'^2-bb',$$

di guisa che essa può scriversi

$$(x+b+b')\left[x^2-(b+b')x+(b^2+b'^2-bb')\right]=0$$

ed ha per radici

$$x_1=-(b+b')$$
$$x_2=\tfrac{1}{2}\left[(b+b')+(b-b')\sqrt{-3}\right]$$
$$x_3=\tfrac{1}{2}\left[(b+b')-(b-b')\sqrt{-3}\right]$$

ossia

$$x_1=-(b+b')$$
$$x_2=\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})b+\tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3})b' \qquad (4)$$
$$x_3=\tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3})b+\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})b'.$$

Consideriamo ora l'equazione di 3° grado

$$x^3+px+q=0; \qquad (5)$$

affinchè essa sia identica alla (3) deve essere

$$bb' = \frac{-p}{3}, \qquad b^3 + b'^3 = q,$$

e quindi

$$b^3 b'^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Da queste eguaglianze si vede che b^3, b'^3 sono le radici dell'equazione di secondo grado

$$u^2 - qu - \frac{p^3}{27} = 0$$

che sono

$$u = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Se ne ricava

$$b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad b' = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

e sostituendo nelle (4) si ottengono le radici della (5)

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

G. Candido.

SULLA TRASFORMAZIONE DEL RADICALE $\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}}$

Esso capita, ad esempio, nel risolvere l'equazione $z^8 + pz^4 + q = 0$.

Dimostriamo anzitutto che, se x e y sono due numeri razionali che soddisfano alla eguaglianza

$$\sqrt[2n]{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \tag{1}$$

è ancora

$$\sqrt[2n]{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}. \tag{2}$$

Difatti, elevando i membri della (1) alla potenza $(2n)$-esima, risulta

$$a+\sqrt{b}=x^n+\binom{2n}{1}x^{n-1}\sqrt{xy}+\binom{2n}{2}x^{n-1}y+\binom{2n}{3}x^{n-2}y\sqrt{xy}+\dots$$
$$\dots+\binom{2n}{2n-1}y^{n-1}\sqrt{xy}+y^n;$$

perciò deve aversi

$$a=x^n+\binom{2n}{2}x^{n-1}y+\dots+y^n, \tag{3}$$
$$\sqrt{b}=\left[\binom{2n}{1}x^{n-1}+\binom{2n}{3}x^{n-2}y+\dots+\binom{2n}{2n-1}y^{n-1}\right]\sqrt{xy},$$

le quali porgono appunto

$$a-\sqrt{b}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{2n}.$$

Moltiplicando poi membro a membro le (1), (2) emerge

$$x-y=\sqrt[2n]{a^2-b}, \tag{4}$$

la quale ci dice x e y non poter essere razionali se, avendosi $a^2>b$, non è intanto a^2-b potenza $(2n)$-esima perfetta.

Allorchè $n=2$ le (3) e (4) divengono

$$x^2+6xy+y^2=a \qquad (3)' \qquad\qquad x-y=\sqrt[4]{a^2-b}=k. \qquad (4)'$$

La (3)′ può anche scriversi così $(x-y)^2+8xy=a$ ed in virtù della (4)′

$$xy=\tfrac{1}{8}(a-k^2). \tag{5}$$

Pertanto dalle (4)′ e (5) abbiamo

$$x=\tfrac{1}{2}(2k+\sqrt{2(a+k^2)}) \qquad\qquad y=\tfrac{1}{2}(-2k+\sqrt{2(a+k^2)});$$

e quindi otteniamo la formola

$$\sqrt[4]{a\pm\sqrt{b}}=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2k+\sqrt{2(a+k^2)}}\pm\sqrt{-2k+\sqrt{2(a+k^2)}}\right), \tag{6}$$

dalla quale si rileva che $\sqrt[4]{a+\sqrt{b}}$ è trasformabile nella somma o nella differenza di due radicali quadratici quando, oltre all'essere a^2-b potenza quarta perfetta, è un quadrato perfetto l'espressione $2(a+k^2)$.

Ad esempio, nel radicale $\sqrt[4]{79\pm16\sqrt{15}}$ abbiamo

$$a^2-b=7^4 \qquad\qquad 2(a+k^2)=16^2;$$

sicchè la (6) offre la trasformazione

$$\sqrt[4]{79\pm16\sqrt{15}}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{30}\pm\sqrt{2}).$$

ENRICO DUCCI.

Della 71ª Quistione a concorso abbiamo ricevuto una sola risoluzione e non soddisfacente; perciò ne accetteremo le risoluzioni fino al giorno 31 dicembre 1906.

LA REDAZIONE.

72ª QUISTIONE A CONCORSO

In ogni triangolo l'area del triangolo che ha per vertici i piedi delle mediane sta a quello che ha per vertici i piedi delle simediane, come il prodotto delle mediane sta al prodotto delle simediane.

R. VERCELLIN.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 31 dicembre 1906.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

755-65-66-67-70-71-72-73-74-76-77-78-79-80-81-82-83 E 790

755. *Costruire geometricamente un triangolo, conoscendo un lato, l'angolo opposto e la bisettrice relativa.*

VACCHI.

Risoluzione del sig. Campetti, I. T. P. di *Lucca.*

Su un segmento AB, uguale al lato dato, si descriva un arco AEB capace dell'angolo dato e per C, punto di mezzo di AB, si conduca DE, diametro del cerchio contenente l'arco costruito. Si congiungano D e E con B e, dopo aver preso su BE un segmento BO uguale alla metà della bisettrice data, si descriva, con centro O e raggio OB, un cerchio che risulterà tangente a BD. Si congiunga D con O e siano F. G le intersezioni di DO col cerchio ora descritto; facendo centro in D, con raggio DF si tagli AB in H, si conduca DH e sia I il punto d'incontro di questa retta con la circonferenza di diametro DE. Se si unisce I con A e B, il triangolo AIB è quello richiesto.

Infatti, oltre a essere $\overline{AB}$ e $\widehat{AIB}$ uguali rispettivamente al lato e all'angolo dato, IH bisettrice di $\widehat{AIB}$, è inoltre $\overline{IH}$ uguale alla bisettrice data, perchè unendo I con E, dai triangoli simili IED, HCD si ricava

$$\overline{DH \,.\, DI} \doteq \overline{DC \,.\, DE} = \overline{DB}^2.$$

Ma è

$$\overline{DF \,.\, DG} \doteq \overline{DB}^2$$

dunque

$$\overline{DH \,.\, DI} \doteq \overline{DF \,.\, DG}.$$

Ed essendo

$$\overline{DH} = \overline{DF}$$

bisogna che sia

$$\overline{DI} = \overline{DG}$$

cioè

$$\overline{HI} = \overline{FG}.$$

Mandarono soluzioni identiche nella sostanza alla precedente i sigg. **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. *Ancona*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

Le costruzioni dei sigg. **Marchisio** e **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*, sono verificate algebricamente; e pure su considerazioni algebriche sono fondate quelle dei sigg. **De Castro**, R. L. di *Milano*, **Mosca**, R. I. T. di *Torino* e **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*.

Il sig. **Brenta**, R. L. di *Milano* costruisce sul lato dato BC un circolo di cui un arco $\widehat{BC}$ sia capace dell'angolo dato, e osserva che la bisettrice di tutti gli angoli inscritti in esso passano pel punto medio M dell'arco $\widehat{CB}$. Allora dato il punto fisso M, la retta BC e il segmento costante eguale alla bisettrice data, costruendo una concoide di Nicomede, si ottiene subito, in ciascun punto comune alla concoide e al circolo, il terzo vertice del triangolo domandato.

La soluzione del sig. Brenta è quella proposta da Pappo nel libro IV delle sue *Collectiones mathematicae*.

Si poteva costruire prima l'angolo dato C e prendere sulla sua bisettrice un segmento CP eguale alla bisettrice data; e si era così condotti al celebre problema di condurre per un punto dato sulla bisettrice d'un angolo un segmento eguale ad un segmento dato, e terminato sui lati dell'angolo.

Per la risoluzione di questo problema, studiato da Pappo, Newton, Gergonne, l'Hospital, Momenheim, Frank ecc., gli studenti possono consultare un opuscolo del prof. F. Occella, intitolato *Intorno a un problema di Pappo* (Casale Monferrato, 1897, Tip. G. Cassone).

La risoluzione seguente è, in fondo quella di L'Hospital.

Dato l'angolo C, la bisettrice CP, si costruisca da P la parallela a un lato dell'angolo, la quale incontri l'altro lato nel punto K. Si trovi quindi un segmento m tale che sia:

$$\overline{CP} : a :: \overline{KP} : m \tag{1}$$

dove a è il lato dato del triangolo, opposto a C. Poi sulla retta CP, dalla parte di P si determini un punto V tale che sia:

$$\overline{CV} : m :: m : \overline{PV} \tag{2}$$

ciò che consiste nel trovare due segmenti CV, PV essendo nota la loro differenza CP e la loro media geometrica m (Vedi p. es. Moreno, *Geom.* pag. 232). Il circolo di centro V e raggio m, incontri uno dei due lati dell'angolo nel punto B; si costruisca BP che incontra l'altro lato nel punto A, e il tr. ACB è il tr. richiesto.

Per dimostrarlo, basta far vedere che è $\overline{AB} = a$. Difatti, i due tr. CVB e e PVB sono simili, per avere un angolo comune CVB e i lati che lo comprendono proporzionali per la (2), essendo $\overline{VB} = m$; perciò gli angoli ACV, ABV sono eguali; e il circolo che passa per C, B, V, passa anche per A: e perciò il tr. AVB, è isoscele e simile al triangolo CPK. Avendosi quindi la proporzione

$$\overline{CP} : \overline{AB} :: \overline{KP} : \overline{VB}$$

confrontandola con la (1), si deduce subito $\overline{AB} = a$, c. v. d.

E. Nannei.

765. *Risolvere l'equazione*

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 36 = 0$$

G. Borelli.

1ª Risoluzione.

L'equazione data può scriversi

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 9,$$

ossia

$$(x - 3)^3 = 9 \tag{1}$$

Ora, indicando con 1, α, β, le tre radici cubiche del numero 1, si ha che $\sqrt[3]{9}$, $\alpha\sqrt[3]{9}$, $\beta\sqrt[3]{9}$, son le tre radici cubiche del numero 9. E perciò dalla (1) si deducono le tre equazioni di primo grado

$$x-3=\sqrt[3]{9}, \qquad x-3=\alpha\sqrt[3]{9}, \qquad x-3=\beta\sqrt[3]{9}.$$

Quindi le tre radici dell'equazione data sono

$$x_1=3+\sqrt[3]{9}, \qquad x_2=3+\alpha\sqrt[3]{9}, \qquad x_3=3+\beta\sqrt[3]{9},$$

ossia

$$x_1=3+\sqrt[3]{9}, \qquad x_2=3+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{9}, \qquad x_3=3+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{9}.$$

Risolvettero press'a poco con questo metodo l'equazione data i sigg. **Casalasco**, R. L. di *Cuneo* e **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*, ma non ottennero risultati giusti.

2ª Risoluzione:

Si ponga $x=y+3$. L'equazione data diventa

$$(y+3)^3-9(y+3)^2+27(y+3)-36=0;$$

e con semplici riduzioni

$$y^3-9=0.$$

E perciò si ha

$$y_1=\sqrt[3]{9}, \qquad y_2=\alpha\sqrt[3]{9}, \qquad y_3=\beta\sqrt[3]{9};$$

da cui si deduce facilmente x.

Seguirono questa via i sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Mosca**, R. I. T. di *Torino* ma anch'essi, o dettero una sola soluzione o incorsero in qualche errore di calcolo che infirmò i risultati.

I sigg. **Cutore**, R. I. T. di *Catania* e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona* risolvettero la (1) scrivendola

$$(x-3)^3-9=0,$$

e considerando il primo membro come differenza di due cubi, e scomponendolo perciò in un prodotto di due fattori uno di primo e uno di secondo grado; anche essi tuttavia sono incorsi in qualche errore di calcolo.

Finalmente i sigg. **Bongini, Brenta, Cernuschi** e **Costa** del R. I. T. di *Torino*, hanno creduto che nell'enunciato fosse incorso un errore di stampa e hanno risoluto invece l'equazione $x^3-9x^2+27x-35=0$.

E. Nannei.

766. *Il prodotto*

$$xy(3x+2)(5y+2),$$

è la differenza di due quadrati.

R. Vercellin.

Risoluzione sostanzialmente analoga dei sigg. **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

Si ha

$$xy(3x+2)(5y+2)=[(2x+1)^2-(x+1)^2][(3y+1)^2-(2y+1)^2],$$

quindi, applicando la formola (12) della nota " Alcune identità ... " (V. *Supplemento*, Anno IX, Fasc. VII) avremo

$$xy(3x+2)(5y+2)=$$
$$=[(2x+1)(3y+1)\pm(x+1)(2y+1)]^2-[(2x+1)(2y+1)\pm(x+1)(3y+1)]^2.$$

I sigg. **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*, trovano

$$xy(3x+2)(5y+2) = (4xy+x+y)^2 - (xy+x-y)^2.$$

Infine i sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*, suppongono che nell'enunciato sia incorso un errore di stampa.

R. Vercellin.

767. *Il quadrato dell'espressione*

$$7(x^2+1),$$

è la somma di cinque quadrati.

R. Vercellin.

Risoluzione.

In vari modi si può ottenere la richiesta scomposizione.

1°. Si può osservare che l'espressione data è la somma di cinque quadrati, poichè

$$7(x^2+1) = (x+1)^2 + (x-1)^2 + (2x)^2 + x^2 + 2^2 + 1^2 \qquad \text{(A)}$$
$$= (2x-1)^2 + x^2 + (x+2)^2 + 1^2 + x^2 + 1^2, \qquad \text{(B)}$$

indi applicare l'identità (15) della nota " Alcune identità... " (V. *Supplemento*, Anno IX, Fasc. VII).

E così fecero i sigg. **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*, ricorrendo alla (A); **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*, ricorrendo alla (B).

2°. Si può osservare che l'espressione data è la somma di otto quadrati, indi applicare un teorema enunciato nella nota precitata, e così fece il sig. **La Spina**, R. I. T. di *Catania*.

3°. Si hanno inoltre le scomposizioni

$$[7(x^2+1)]^2 = 7^2 + (7x^2)^2 + (9x)^2 + (4x)^2 + x^2 \qquad \text{(C)}$$
$$= [2(x^2+1)]^2 + [2(x^2+1)]^2 + [3(x^2+1)]^2 + [4(x^2+1)]^2 + [4(x^2+1)]^2. \qquad \text{(D)}$$

(C) dei sigg. **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*.
(D) del sig. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*.

R. Vercellin.

770. *Se quattro rette uscenti dai vertici di un tetraedro* ABCD, *passano per uno stesso punto* O *e incontrano le facce rispettivamente opposte nei punti* A′, B′, C′, D′, *si ha*

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

K.

Risoluzione dei sigg. **Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.

Osserviamo che il tetraedro fondamentale si spezza in 4 tetraedri OABC; OABD; OBCD; OACD. Si ha manifestamente

$$\frac{OBCD}{ABCD} = \frac{OA'}{AA'}; \quad \frac{OACD}{ABCD} = \frac{OB'}{BB'}; \quad \frac{OABD}{ABCD} = \frac{OC'}{CC'}; \quad \frac{OABC}{ABCD} = \frac{OD'}{DD'};$$

laonde, sommando e tenuto conto dei segni dei segmenti:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = \frac{OBCD + OACD + OABD + OABC}{ABCD} = 1. \quad \text{c.v.d.}$$

Altra risoluzione meno semplice dei sigg. **Bongini** e **Costa**, del R. I. T. di *Torino*. I sigg. **Pelosio** e **Scopinich** hanno dimostrato il teorema per il solo tetraedro avente le altezze eguali.

K.

771. *Risolvere il sistema*

$$2(x^2+y^2)+5xy+x+y+1=0$$
$$x^2+y^2+4[xy+3(x+y)]+10=0.$$

C. Alasia.

Risoluzione, parzialmente modificata, dei sigg. **Bongini** e **Costa**, del R. I. T. di *Torino*.

Sostituendo nelle due equazioni date ad x^2+y^2 il valore $(x+y)^2-2xy$, abbiamo

$$2(x+y)^2+xy+(x+y)+1=0, \qquad (1)$$
$$(x+y)^2+2xy+12(x+y)+10=0, \qquad (2)$$

dalle quali, eliminando xy,

$$3(x+y)^2-10(x+y)-8=0,$$

e risolvendo

$$x+y=4 \qquad (3)$$

oppure

$$x+y=-\frac{2}{3}. \qquad (4)$$

Sostituendo questi valori nella (1) si trovano per xy rispettivamente i seguenti valori

$$xy=-37 \qquad (5)$$
$$xy=-\frac{11}{9}. \qquad (6)$$

Risolvendo ora rispetto ad x e y i sistemi costituiti dalle coppie (3), (5), e (4), (6), si ha rispettivamente

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=2\pm\sqrt{41} \qquad \left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}\frac{1\pm2\sqrt{3}}{3}.$$

Buone le soluzioni dei Signori **Fossa**, I. T. di *Ravenna*; **La Spina**, I. T. di *Catania* e **Campetti**, I. T. di *Lucca*. Il Sig. **Lombardi**, L. di *Salerno*, si arresta ai valori della somma e prodotto delle incognite: i Sigg. **De Conz**, I. T. di *Venezia*; **Pardo**, di *Palermo*; **Cutore**, I. T. di *Catania*; **Casalasco**, L. di *Cuneo*; ed **Jodi**, I. T. di *Modena*, risolvono bene il sistema, ma non osservano che le coppie di valori delle incognite sono invertibili. La seconda coppia di valori ottenuta dai Sigg. **Mosca**, **Brenta** e **Cernuschi**, I. T. di *Torino*; **Belvedere**, I. T. di *Messina*; **Pelosio** e **Scopinich**, I. T. di *Venezia*, non soddisfa al sistema proposto. C. Alasia.

772. *Si mostri che la sola soluzione intera e positiva del sistema*

$$3x+6y-2z=22, \qquad 5x+8y-6z=28$$

è $x=2$, $y=3$, $z=1$.

C. Alasia.

Risoluzione.

Eliminando z e semplificando si ha:

$$2x+5y=19,$$

equazione la cui soluzione generale è

$$x=7+5t, \qquad y=1-2t \ldots \qquad (a)$$

Sostituiamo questi valori nella prima delle equazioni date e semplifichiamo; otteniamo l'equazione

$$2z-3t=5,$$

la cui soluzione generale è

$$z=1-3u, \qquad t=-1-2u,$$

ove u denota un intero qualsiasi. Sostituiamo finalmente $t = -1 - 2u$ in (a) e semplifichiamo: otteniamo,

$$x = 2 - 10u, \qquad y = 3 + 4u, \qquad z = 1 - 3u,$$

soluzione generale del sistema proposto. La sola soluzione positiva è quella corrispondente ad $u = 0$, cioè $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$, come era stato detto.

Colla precedente risoluzione coincidono quelle dei sigg. **Bongini**, **Costa**, **Mosca**, **Brenta** e **Cernuschi**, I. T. di *Torino*; **Pomodoro**, L. di *Molfetta*; **La Spina**, I. T. di *Catania*; **Casalasco**, L. di *Cuneo*; **Jodi**, I. T. di *Modena*; **Scopinich**, I. T. di *Venezia*. Quelle dei sigg. **Cutore**, I. T. di *Catania*; **Pelosio**, I. T. di *Venezia* e **Lombardi**, L. di *Salermo*, sono meno diligenti, limitandosi alla sola verifica delle soluzioni intere e positive del sistema dato.

C. Alasia.

773. *Risolvere il sistema*

$$x^2 - 2y^2 - x = 0, \qquad 2x^2 - 5y^2 + 3y = 0.$$

C. Alasia.

Sottraendo la seconda equazione data la prima moltiplicata per 2, si trova

$$y^2 - 2x - 3y = 0,$$

da cui

$$x = \tfrac{1}{2}(y^2 - 3y).$$

Sostituendo ad x questo valore nell'una o nell'altra delle equazioni proposte e facendo le riduzioni opportune si trova l'equazione

$$y^4 - 6y^3 - y^2 + 6y = 0,$$

ossia

$$y\{y(y^2 - 1) - 6(y^2 - 1)\} = 0,$$

ossia

$$y(y^2 - 1)(y - 6) = 0,$$

ossia

$$y(y - 1)(y + 1)(y - 6) = 0,$$

la quale ha le soluzioni 0, 1, -1, 6.

Quando y assume uno di questi valori, le due equazioni date sono soddisfatte da uno stesso valore di x; ed infatti, per $y = 0$ le due equazioni date diventano

$$x^2 - x = 0, \qquad 2x^2 = 0,$$

e $x = 0$ è radice comune ad esse.

Per $y = 1$ le stesse due equazioni diventano,

$$x^2 - x - 2 = 0, \qquad x^2 - 1 = 0,$$

ossia

$$(x + 1)(x - 2) = 0, \qquad (x + 1)(x - 1) = 0$$

che hanno la radice $x = -1$ in comune.

Per $y = -1$ esse diventano

$$x^2 - x - 2 = 0, \qquad x^2 - 4 = 0,$$

ossia

$$(x + 1)(x - 2) = 0, \qquad (x + 2)(x - 2) = 0,$$

che hanno la soluzione $x = 2$ comune.

Per $y = 6$ esse diventano

$$x^2 - x - 72 = 0, \qquad x^2 - 81 = 0,$$

ossia

$$(x + 8)(x - 9) = 0, \qquad (x + 9)(x - 9) = 0,$$

che hanno la radice $x = y$ in comune.

Riassumendo il sistema proposto ha le seguenti soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 9 \\ y_4 = 6. \end{cases}$$

Si vede da quanto precede che in generale se nell'eliminare x fra le due equazioni $f(x, y) = 0$ e $\varphi(x, y) = 0$ si giunge ad una equazione $\rho(y) = 0$, della quale è u una radice, il corrispondente valore, od i corrispondenti valori di x possono sempre ottenersi col determinare il massimo fattore comune alle funzioni $f(x, u)$ e $\varphi(x, u)$. D'ordinario questo massimo fattore comune è di primo grado e quindi un solo valore di x corrisponda ad $y = u$; ma esso può pur essere di grado più alto, ed allora vi sarà più d'un valore di x che corrisponderà ad $y = u$.

Ottengono le coppie di valori scritti sopra i sigg. **La Spina** e **Cutore**, I. T. di *Catania*; **Jodi**, I. T. di *Modena*; **Casalasco**, I. di *Cuneo* e **Bongini**, **Costa** e **Mosca**, I. T. di *Torino*.

La signorina **Fossa** ottiene pur essa tali coppie di valori, ma questi non devono avere il doppio segno da lei trascritto. Al sig. **Scopinich**, I. T. di *Venezia*, sfugge la prima coppia di valori delle incognite. I valori ottenuti dai sigg. **Cernuschi** e **Brenta** non soddisfano tutti al sistema proposto, e pur essi non pongon mente alla prima coppia di valori delle incognite; al sig. **De Conz**, I. T. di *Venezia* sfuggono le prime due coppie di valori che devono ottenersi e lo stesso succede al sig. **Pardo** di *Palermo* il quale ottiene poi due soli valori per la x. Infine, il sig. **Pelosio**, I. T. di *Venezia*, è tratto ad una soluzione molto laboriosa, ma non ottiene che un'unica coppia di valori delle due incognite.

774. *Scomporre in fattori la funzione*

$$x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y).$$

C. Alasia.

Risoluzione del sig. **Scopinich**, I. T. di *Venezia*.

La funzione data può scriversi

$$y(x^3 - z^3) + z(y^3 - x^3) + x(z^3 - y^3); \qquad (a)$$

e si scorge chiaramente che essa si annulla per $x = y$, $x = z$, $y = z$, per cui è divisibile pel prodotto $(x - y)(x - z)(y - z)$. Da ciò si ricava facilmente

$$x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y) = (x - y)(x - z)(y - z)(x + y + z).$$

Analoghe sono le risoluzioni dei sigg. **Bongini**, **Costa** e **Mosca**, I. T. di *Torino*; **Jodi**, I. T. di *Modena* e **La Spina**, I. T. di *Catania*. I sigg. **Maracci**, I. T. di *Ancona* e **Pelosio**, I. T. di *Venezia* cadono in faticose trasformazioni della funzione (a) senza giungere ad un soddisfacente risultato, nel mentre che a colpo d'occhio si scorge per quali valori essa si annulla. La funzione alla quale giunge il sig. **Salonia**, L. di *Caserta*, è evidentemente essa stessa scomponibile in fattori; il sig. **Cutore**, I. T. di *Catania* è condotto a dover risolvere un'equazione di 3° grado della quale non ottiene le radici. Infine, il sig. **Cernuschi**, I. T. di *Torino*, risolve la questione ma erra nel segno del primo fattore.

C. Alasia.

776. *Risolvere il sistema*

$$x^2 + y = 11, \ldots \qquad (1) \qquad\qquad x + y^2 = 7 \ldots \qquad (2)$$

C. Alasia.

Risoluzione.

Si consideri il sistema più generale

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y &= a \\ x + y^2 &= b \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Sommando, o moltiplicando membro a membro le due equazioni proposte si ha il sistema

$$\left.\begin{aligned} (x + y) + (x^2 + y^2) &= a + b \\ x^3 + y^3 + x^2y^2 + xy &= ab \end{aligned}\right\};$$

od anche

$$\left.\begin{aligned} (x + y)^2 + (x + y) - 2xy &= a + b \\ (x + y)^3 - 3xy(x + y) + (xy)^2 + xy &= ab \end{aligned}\right\},$$

e se si pone

$$x + y = u, \qquad a + b = s,$$
$$xy = v, \qquad ab = p,$$

il sistema diventa

$$\left.\begin{aligned} u^2 + u - 2v &= s \\ u^3 - 3uv + v^2 + v &= p \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Dalla prima si ricava

$$v = \tfrac{1}{2}(u^2 + u - s) \tag{3}$$

e sostituendo questo valore nella seconda si ha

$$u^4 - (2s + 3)u^2 + 2(2s + 1)u + (s^2 - 2s - 4p) = 0. \tag{4}$$

Questa equazione di quarto grado non si sa risolvere in generale con metodi elementari. Ma nel caso proposto è $s = 11 + 7 = 18$, $p = 11 . 7 = 77$ e l'equazione precedente diviene

$$u^4 - 39u^2 + 74u - 20 = 0. \tag{5}$$

È facile verificare che questa ha la soluzione $u = 5$; ne risulta $v = 6$ e per conseguenza x, y sono radici dell'equazione

$$z^2 - 5z + 6 = 0$$

cioè sono rispettivamente eguali a 2, 3.

Altre tre soluzioni si troverebbero trovando le altre radici dell'equazione (5).

Il sig. **Pelosio**, I. T. di *Venezia* non risolve il sistema giacchè è condotto ad un'equazione di 3° grado non decomponibile colla regola del Ruffini. Analogamente dicasi di **Cutore**, I. T. di *Catania*; **Mosca** e **Cernuschi**, I. T. di *Torino*, e **Scopinich**, I. T. di *Venezia*; **Bogini** e **Costa**, I. T. di *Torino* approfittano dell'osservazione molto particolare che la differenza dei primi membri è differenza dei prodotti di due numeri consecutivi, e ottengono facilmente i valori delle due incognite. Infine **Lombardi**, L. di *Salerno* e **Satiano**, L. di *Benevento* deducono dal valore di una stessa incognita nelle due equazioni del sistema, e quasi induttivamente, quale può essere il valore di tali incognite. Evidentemente ciò riuscirebbe impossibile se si trattasse di valori frazionari o decimali.

777. *Se la congiungente i punti di mezzo di due lati opposti* AD, BC *d'un quadrangolo piano* ABCD *incontra i prolungamenti degli altri due lati* AB, CD *rispettivamente in* H, K, *si ha*

$$AH : DK = AB : CD.$$

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **Jodi**, R. I. T. di *Modena*.

Siano rispettivamente C', D' i punti in cui le parallele alla congiungente i punti medi E, F dei lati BC, AD condotte per C, D rispettivamente incontrano la parallela a CD condotta per H; evidentemente la retta EF incontrerà i segmenti BC', AD' rispettivamente in M, N loro punti di mezzo. Ne segue che è AD', BC' sono parallele e si ha:

$$AH : AB = D'H : D'C' = DK : DC,$$

da cui

$$AB : DC = AH : DK.$$

Altre risoluzioni dei sigg. **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

Le soluzioni dei sigg. Bongini, Costa e Scopinich contengono un grave errore nella considerazione di triangoli simili. La soluzione del sig. Mosca è, dopo quella riportata, la migliore, per la sua semplicità. Buone sono pure quelle dei sigg. Brenta e Cernuschi, i quali applicano il teorema di Menelao.

R. Vercellin.

778. *In ogni triangolo si ha*

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(r_b r_c + r r_a)(r_c r_a + r r_b)(r_a r_b + r r_c)}{R^2}}.$$

R. Vercellin.

Risoluzioni sostanzialmente analoghe dei sigg. **Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** e **La Spina** R. I. T. di *Catania*; **De Conz, Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena*.

Le notevoli relazioni (V. " Supplemento " Anno IX, Fasc. III)

$$r_b r_c + r r_a = bc, \qquad r_c r_a + r r_b = ca, \qquad r_a r_b + r r_c = ab,$$

moltiplicate membro a membro dànno

$$(r_b r_c + r r_a)(r_c r_a + r r_b)(r_a r_b + r r_c) = a^2 b^2 c^2,$$

ed essendo

$$a^2 b^2 c^2 = 16\, R^2 S^2,$$

si ricava

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(r_b r_c + r r_a)(r_c r_a + r r_b)(r_a r_b + r r_c)}{R^2}}. \qquad \text{c. v. d.}$$

Tutti i risolutori hanno corretto l'errore che si notava nell'enunciato.

R. Vercellin.

779. *Costruire un triangolo, dati un lato, l'altezza relativa e la distanza fra i piedi della mediana e della bisettrice uscenti dal vertice opposto.*

R. Vercellin.

Risoluzione.

È noto che, in ogni triangolo ABC, detti L_a, L'_a i piedi delle bisettrici interna ed esterna relative all'angolo A, l'angolo $L_a\widehat{A}L'_a$ è retto e i punti B, C, L_a, L'_a formano un gruppo armonico. (V. " Supplemento " Anno IX, pag. 139).

Fissati adunque il lato dato BC e su di esso i piedi M_a, L_a della mediana e della bisettrice, si determini il coniugato armonico L'_a di L_a, rispetto a B e C. Allora, detto A uno dei punti in cui la circonferenza costruita su $L_aL'_a$ quale diametro incontra eventualmente una delle due parallele a BC, condotte a distanza eguale all'altezza data da BC stessa, il triangolo ABC soddisfa al problema.

Indicando rispettivamente con a, h_a, δ il lato, l'altezza e la distanza data, dalla proporzione $L_aB : L_aC = L'_aB : L'_aC$ si ha

$$(L_aB - L_aC) : L_aC = (L'_aB - L'_aC) : L'_aC$$

ossia

$$2\delta : a = L_aC : L'_aC = L_aB : L'_aB$$

e da questa si ha agevolmente

$$(a - 2\delta) : 2\delta = L_aL'_a : L_aB :$$

ossia

$$\tfrac{1}{2}\, L_aL'_a = \frac{a^2 - 4\delta^2}{8\delta}.$$

Ne segue che

se è $h_a < \dfrac{a^2 - 4\delta^2}{8\delta}$ si hanno due soluzioni distinte,

" " $h_a = \dfrac{a^2 - 4\delta^2}{8\delta}$ si ha una soluzione sola,

" " $h_a > \dfrac{a^2 - 4\delta^2}{8\delta}$ non si ha alcuna soluzione.

Sostanzialmente analoghe a questa sono le risoluzioni dei sigg. **Brenta, Cernuschi** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Campetti**, R. I. T. di *Lucca*; **Jodi**, R. I. T. di

Modena. Anche la risoluzione del sig. **Belvedere** poggia su analoghe considerazioni, ma è meno buona delle precedenti.

Risoluzioni analitiche con costruzioni più o meno laboriose dei sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Conz, Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

La risoluzione del Campetti sarebbe assai buona, e potrebbe porsi accanto a quelle dei sigg. Jodi e Mosca, senonchè egli, erroneamente, dichiara che i punti L_a, L'_a possono trovarsi da parti opposte rispetto a M_a.

Il sig. De Conz, chiamando x la distanza fra i piedi dell'altezza e della mediana, trova giustamente

$$x = \frac{(a^2 + 4\delta^2) \pm \sqrt{(a^2 - 4\delta^2)^2 - 64\delta^2 h_a^2}}{8\delta},$$

ma poi erra dicendo che il segno + non possa accettarsi per la natura del problema.

R. Vercellin.

780. *Risolvere l'equazione*

$$x^4 + x + \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 0,$$
$$x^4 - x - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = 0.$$

R. Vercellin.

Risoluzione.

La dizione della seconda equazione contiene un errore di segno e, come fu stampata, non poteva abbassarsi al secondo grado. Essa va corretta come segue

$$x^4 - x + \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = 0.$$

Solamente i sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*, hanno corretto l'errore, ed hanno osservato che la prima equazione equivale all'altra

$$\left[x^2 + \tfrac{1}{2}x(1 + \sqrt{5}) + 1\right]\left[x^2 - \tfrac{1}{2}x(1 + \sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)\right] = 0,$$

dalla quale si deduce

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \pm \tfrac{1}{2} i \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}; \quad \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \pm \tfrac{1}{2} i \sqrt{\frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}};$$

e la seconda si può scrivere

$$\left[x^2 - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5})x + 1\right]\left[x^2 + \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5})x + \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right] = 0,$$

da cui si deduce

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) \pm \tfrac{1}{2} i \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}; \quad \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) \pm \tfrac{1}{2} i \sqrt{\frac{3\sqrt{5} - 1}{2}}.$$

I sigg. **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*, senza correggere l'errore suaccennato osservano che le equazioni proposte si trovano nella condizione dell'equazione della quistione 693 (Anno IX, Fasc. I), e quindi applicando le formole date nella risoluzione di essa, rapidamente calcolano le radici. Il loro procedimento è quindi ottimo, ma essi non hanno osservato che, alla seconda equazione, non era applicabile, senza correggere l'errore.

I sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia* tentano pure la risoluzione delle due equazioni, applicando il metodo generale di *Cartesio*, per la risoluzione delle equazioni di 4° grado.

R. Vercellin.

781. *Costruire un triangolo, dati un angolo, la mediana e la simediana relative.*

R. Vercellin.

Risoluzione.

Abbiamo " Supplemento „ Anno IX, Fasc. V, pag. 66.

$$\frac{m_a + m'_a}{m_a - m'_a} = \frac{(b + c)^2}{(b - c)^2} = \frac{\operatorname{ctn}^2 \tfrac{1}{2} A}{\tan^2 \tfrac{1}{2}(B - C)},$$

da cui

$$(m_a + m'_a) \tan \tfrac{1}{2}(B - C) = \sqrt{m_a^2 + m'^2_a} \operatorname{ctn} \tfrac{1}{2} A.$$

Allora, detto λ il cateto del triangolo rettangolo di cui m_a è ipotenusa e m'_a è l'altro cateto, si costruisca il triangolo rettangolo assumendo λ come cateto e $\frac{1}{2}A$ come angolo opposto e sia μ l'altro cateto; infine si costruisca il triangolo rettangolo di cateti $m_a + m'_a$ e μ, l'angolo opposto al cateto eguale a μ è $\frac{1}{2}(B-C)$. Aggiungendo a quest'angolo $\frac{1}{2}(\pi - A)$ si ottiene B; analogamente si ottiene C. Allora è facile costruire un triangolo simile al richiesto, e, quindi, anche il richiesto.

Le risoluzioni dei sigg. **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania* sono simili a quella riportata, ma difettano nella costruzione. Il sig. **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*, posto

$$p = \frac{m_a \pm \sqrt{m_a^2 - m'^2_a}}{2m'_a}$$

trova erroneamente

$$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} = 2m_a \sqrt{\frac{1 + p^2 \pm 2p \cos A}{(1-p^2)^2 + 4p^2 \operatorname{sen}^2 A}}.$$

Non accenna alla costruzione, e quindi non s'accorge dell'errore commesso.

R. Vercellin.

782. *Eseguire la somma seguente*

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{(r+1)[r(r+2)]^2} = \frac{1}{2(1.3)^2} + \frac{1}{3(2.4)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)[n(n+2)]^2}.$$

R. Vercellin.

Risoluzione dei sigg. **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*.

Si ha

$$\frac{1}{(r+1)[r(r+2)]^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r^2(r+1)^2} - \frac{1}{(r+1)^2(r+2)^2}\right);$$

per $r = 1, 2, \ldots, n$ si ottiene successivamente

$$\frac{1}{2.1^2.3^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2.2^2} - \frac{1}{2^2.3^2}\right)$$

$$\frac{1}{3.2^2.4^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^2.3^2} - \frac{1}{3^2.4^2}\right)$$

. . . . . .

$$\frac{1}{(n+1)[n(n+2)]^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}\right),$$

e quindi sommando

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{(r+1)[r(r+2)]^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}\right) = \frac{n(n+3)(n^2+3n+4)}{16(n+1)^2(n+2)^2}.$$

Altre risoluzioni dei sigg. **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

R. Vercellin.

783. *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} (x+2y)^2(x^2-2y^2) = a & (1) \\ 2x(x+y) - y^2 = b & (2) \end{cases}$$

Applicazione al caso di $a = 24$, $b = 9$. R. Vercellin.

Risoluzione, parzialmente modificata, dei sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania* e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.

La (2) può scriversi

$$(x+y)^2 + x^2 - 2y^2 = b, \qquad (3)$$

e quindi, posto $x^2 - 2y^2 = z$, il sistema diventa

$$\begin{cases} (z + 6y^2 + 4xy)\,z = a & (4) \\ 2z + 3y^2 + 2xy = b & (5) \end{cases}$$

Sottraendo la (4) dalla (5) dopo aver moltiplicati ambo i membri di questa per $2z$ si ha

$$3z^2 - 2bz + a = 0,$$

$$z = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 3a}}{3};$$

e allora, dalle (3) e (1) ricaviamo

$$x + y = \pm \sqrt{\frac{2b \mp \sqrt{b^2 - 3a}}{3}}; \qquad x + 2y = \pm \sqrt{b \mp \sqrt{b^2 - 3a}};$$

laonde, posto

$$\sqrt{\frac{2b - \sqrt{b^2 - 3a}}{3}} = \mathrm{P}; \qquad \sqrt{\frac{2b + \sqrt{b^2 - 3a}}{3}} = \mathrm{Q},$$

$$\sqrt{b - \sqrt{b^2 - 3a}} = \mathrm{M}; \qquad \sqrt{b + \sqrt{b^2 - 3a}} = \mathrm{N},$$

avremo le seguenti soluzioni

$$\begin{array}{l} x = \\ y = \end{array} \left| \begin{array}{c} 2\mathrm{P}+\mathrm{M} \\ -\mathrm{P}-\mathrm{M} \end{array} \right| \begin{array}{c} 2\mathrm{P}-\mathrm{M} \\ -\mathrm{P}+\mathrm{M} \end{array} \left| \begin{array}{c} -2\mathrm{P}+\mathrm{M} \\ \mathrm{P}-\mathrm{M} \end{array} \right| \begin{array}{c} -2\mathrm{P}-\mathrm{M} \\ \mathrm{P}+\mathrm{M} \end{array} \left| \begin{array}{c} 2\mathrm{Q}+\mathrm{N} \\ -\mathrm{Q}-\mathrm{N} \end{array} \right| \begin{array}{c} 2\mathrm{Q}-\mathrm{N} \\ -\mathrm{Q}+\mathrm{N} \end{array} \left| \begin{array}{c} -2\mathrm{Q}+\mathrm{N} \\ \mathrm{Q}-\mathrm{N} \end{array} \right| \begin{array}{c} -2\mathrm{Q}-\mathrm{N} \\ \mathrm{Q}+\mathrm{N} \end{array} \right|.$$

Nel caso di $a = 24$, $b = 9$ è

$$\mathrm{P} = \sqrt{5}; \qquad \mathrm{Q} = \sqrt{7}; \qquad \mathrm{M} = \sqrt{6}; \qquad \mathrm{N} = 2\sqrt{3}.$$

Il procedimento seguito dai sigg. **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino* sarebbe molto buono, ma gli autori lo conducono assai trascuratamente e non considerano nessun caso particolare.

Hanno pure risposto alla quistione i sigg. **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*. Il primo di essi elimina la y ed ottiene un'equazione in x, di fronte alla quale si arresta; il secondo, non riuscendo a risolvere il sistema proposto, dichiara che nell'enunciato dev'essere incorso un errore, e s'occupa del sistema

$$\begin{cases} (x + y)^2 (x^2 - 2y^2) = a \\ 2x(x + y) - y^2 = b. \end{cases}$$

È un metodo molto spiccio il suo! R. Vercellin.

790. *Se* h_1, h_2, h_3, h_4 *sono le altezze di un tetraedro,* p_1, p_2, p_3, p_4 *le distanze, di un punto* P *interno, dalle facce, si ha*

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} + \frac{p_4}{h_4} = 0.$$

Come deve essere modificato questo teorema, se il punto P *è esterno al tetraedro.*

K.

Risoluzione del sig. **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*.

Osserviamo che il tetraedro si può scomporre in 4 tetraedri PBCD, PACD, PABC, PABD, e si ha evidentemente

$$\frac{\mathrm{PBCD}}{\mathrm{ABCD}} = \frac{p_1}{h_1}, \quad \frac{\mathrm{PACD}}{\mathrm{ABCD}} = \frac{p_2}{h_2}; \quad \frac{\mathrm{PABD}}{\mathrm{ABCD}} = \frac{p_3}{h_3}, \quad \frac{\mathrm{PABC}}{\mathrm{ABCD}} = \frac{p_4}{h_4},$$

per cui sommando

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} + \frac{p_4}{h_4} = \frac{\mathrm{PBCD} + \mathrm{PACD} + \mathrm{PABD} + \mathrm{PABC}}{\mathrm{ABCD}} = 1. \quad \text{c.v.d.}$$

Per il caso che il punto P sia esterno al tetraedro la formula dimostrata è ancora vera, purchè si convenga di dare a p_i il segno positivo o negativo secondo che P si trova o no rispetto alla faccia α_i del tetraedro, dalla stessa parte del vertice opposto

Altre risoluzioni dei sigg. **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*. K.

QUISTIONI DA RISOLVERE

791. In un cerchio è inscritto un trapezio isoscele, la cui base è il diametro. Conoscendo il raggio e il rapporto fra la somma dei lati paralleli e quella degli altri due, determinare gli elementi incogniti. Esaminare i casi particolari.

792. Conoscendo un angolo, la somma dei lati adiacenti e la distanza dal punto medio del lato opposto al punto di contatto di esso con l'incerchio, costruire geometricamente il triangolo.

793. Risolvere l'equazione

$$\left(\frac{16}{5}\right)^{x^3-5x^2+3x+3}=125.$$

E. Cutore.

794. Risolvere il sistema

$$x^3=7x+3y, \qquad y^3=7y+3x.$$

C. Alasia.

795. In ogni quadrangolo inscrittibile, le proiezioni ortogonali del punto d'incontro delle diagonali interne sui lati sono vertici d'un quadrangolo circoscrittibile od un cerchio, il cui diametro è quarto proporzionale dopo il raggio del cerchio circoscritto, un lato e la distanza del lato opposto dal punto d'incontro delle diagonali.

796. Costruire un triangolo, dati i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto e un'altezza.

797. Risolvere l'equazione

$$x^4+8a(x+a)+1=0.$$

R. Vercellin.

798. Risolvere il sistema

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \end{array}\begin{cases} x+\sqrt{xy}+y=a \\ x^2+xy+y^2=b. \end{cases}$$

799. Risolvere il sistema

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array}\begin{cases} x^2+y^2=u^2+v^2=m^2 \\ x+y+u+v=2n \\ xy+vu=q^2 \end{cases}$$

dove m, n e q sono numeri reali e positivi. E. De Conz.

800. Si ha un tronco di cono di rivoluzione a basi parallele in legno di abete: le basi hanno rispettivamente $dm.$ 9 e $dm.$ 6,6 di raggio. Si taglia il tronco in modo da ridurlo ad un tronco di piramide (regolare) esagonale (inscritta nel tronco), e perciò si asportano 420 $Kg.$ di legno. Sapendo che 1 dm^3 di abete pesa $Kg.$ 0,55 si domanda l'altezza del tronco. (Ammissione alla R. Accademia Navale, agosto 1906).

N. B. — Le risoluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 20 dicembre 1906.

Si pregano vivamente i signori risolutori di *inviare ogni quistione o giuoco in foglio separato, scrivendo su ciascuno il proprio nome e l'istituto al quale essi appartengono.*

Le lettere non francate o insufficientemente francate vengono respinte.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 26 novembre 1906

263. *Un tale in una lieta occasione di famiglia distribuì L. 100 fra le sue persone di servizio, dando ad alcune L. 15, ad altre 17 e ad altre infine 19. Si domanda quante persone aveva al suo servizio e come fece la repartizione.* G. C.-L.

1ª **Risoluzione.**

Se x persone ebbero 15 lire, y ne ebbero 17 e z ne ebbero 19, dovremo avere

$$15x + 17y + 19z = 100. \qquad (1)$$

Poniamo

$$17y + 19z = 100 - 15x = t \qquad (2) \qquad \text{da cui} \qquad t + 15x = 100. \qquad (3)$$

Usando, al solito, il metodo di Hermite, poichè è $100 = 15 \times 6 + 10$ e l'equazione $t' + 15x' = 10$ ammette l'unica soluzione intera e non negativa $t' = 10$, $x' = 0$, tutte le soluzioni intere e non negative della (3) saranno

$$t = 10 + 15m, \qquad x = n \qquad (m + n = 6)$$

e quindi si ha il seguente prospetto

$$\text{valori di} \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|} m & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ n = x & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ t & 10 & 25 & 40 & 55 & 70 & 85 & 100 \end{array} \right. . \qquad (4)$$

Per la (2), supposti esclusi, per la natura del problema, i valori nulli per y e z, deve essere evidentemente $t \geqslant 36$ e quindi vanno esclusi i primi due valori trovati per t, come pure va escluso l'ultimo valore che corrisponde al valore 0 per x; rimangono quindi le sole ipotesi $t = 40, 55, 70, 85$.

Le equazioni (2)

$$17y + 19z = 40 \qquad \text{e} \qquad 17y + 19z = 85$$

non hanno soluzioni intere e positive mentre le altre due

$$17y + 19z = 55 \qquad \text{e} \qquad 17y + 19z = 70$$

ammettono rispettivamente le soluzioni

$$(1, 2) \qquad (3, 1).$$

Riepilogando quindi la (1) ammette le sole due soluzioni intere e positive seguenti (v. quadro (4))

$$(x_1 = 3, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 2), \qquad (x_1 = 2, \quad y_2 = 3, \quad z_2 = 1).$$

In entrambi i casi si ha $x + y + z = 6$.

Le persone di servizio erano 6 e la distribuzione potè farsi in uno dei seguenti modi:

1°) a 3 persone L. 15, a 1 L. 17, e a 2 L. 19. (Infatti $15 \times 3 + 17 + 19 \times 2 = 100$)
2°) a 2 persone „ a 3 „ e a 1 „ (Infatti $15 \times 2 + 17 \times 3 + 19 = 100$).

2ª **Risoluzione** del sig. **Collini** di *Forlì*.

Indicando con x il numero dalle persone di servizio si ha: $15x < 100 < 19x$, da cui si ricava: $x < \frac{100}{15}$; $x > \frac{100}{19}$ e poichè x deve essere intero si ha: $x = 6$.

Dall'enunciato apparisce che tre di queste persone hanno avuto rispettivamente lire 15, 17 e 19, per cui si ha la somma complessiva di lire 51.

Supponiamo che anche le altre tre persone abbiano avuto rispettivamente la stessa somma delle prime; si avrebbe un totale di lire 102 ossia lire 2 in più.

È dunque chiaro che nell'ipotesi fatta si è commesso uno di questi due errori:

1°) si sono calcolate lire 19 per una persona a cui furono assegnate solo 17;
2°) si sono calcolate lire 17 per una persona che ne ha avute solo 15.

Nel primo caso si ha la ripartizione seguente: a due persone lire 15, a tre lire 17, ad una lire 19. Infatti L. $(15 . 2 + 17 . 3 + 19) =$ L. 100.

Nel secondo caso si ha la ripartizione seguente: a tre persone lire 15, ad una lire 17, a due lire 19. Infatti L. $(15 . 3 + 17 + 19 . 2) =$ L. 100.

Altre risoluzioni dei predetti sigg. **Angriani**, **Bongini**, **Costa**, **Giannuzzi**, **Lombardi**, **Maccarati** e **Ventola**. I sigg. **Belvedere**, **Brenta**, **Cernuschi** e **Perez** inviarono risoluzioni incomplete.

(G. C.-L.)

12° GIUOCO A CONCORSO.

Tre paesi, B, C e D sono congiunti da una linea ferroviaria **rettilinea**. A è un quarto paese che dista 20 km. da D, 15 da B e 12 dalla linea ferroviaria.

Un signore che abita in A, volendo recarsi in D dà ordine di attaccare la carrozza e quando sta per salirvi, consultando l'orologio, vede con suo compiacimento, che, essendo allora le 14, potrà trovarsi alle ore 18 in D, come appunto gli è necessario.

Nel frattempo però una persona viene a parlargli per un affare urgente e lo trattiene parecchio tempo; quando finalmente è libero, consulta l'orologio, ma vede che ormai è tardi per recarsi a D in carrozza e pensa ad un tratto: " Il treno che parte da B alle 17,10′ arriva a D alle 18 precise; andrò a C in carrozza e là salirò in treno.... Va bene che così percorro 4 km. di più, ma giungo in tempo ". Sale nella carrozza, che era da tanto tempo ad attenderlo, e giunge alla stazione 2 minuti prima dell'arrivo del treno che — *cosa strana* — era proprio in orario.

Quanto tempo gli ha fatto perdere quella visita importuna? G. C.-L.

Le risoluzioni si accettano fino al 31 dicembre p. v.

La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi e all'autore, il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

PER RIDERE.

(Dall'*ARITMETICA* di A. Spinelli D'Agrò *ad uso delle classi V e VI elementari*).

(Pag. 26) " Rette e piani — Perpendicolari.

" Sia dato un piano, per es. la fig. I (CDE), sul centro del quale si tira la " retta AB, questa sarà perpendicolare al piano proposto.

. . . . . .

" Quando una retta incontra un piano ed altre rette si dice obliqua. Guardate " la fig. 2ª, la retta AB è obliqua ai punti (CDEF) ".

(Pag. 27) " Un piano è perpendicolare ad un altro piano quando ciascuno di " essi contiene una parallela all'altro ".

(Pag. 28) " Dicesi parallelopipedo il prisma che ha le facce a due a due ABCD, " EFGH, ABEF, CDGH, ACFG, BDFH ".

Basta, credo, questo breve saggio. E qualunque commento verrebbe male a proposito; s'intende bene che si potrebbe continuare su questo tono a nostro piacimento e riportare perfino la definizione del cilindro che vale, se vogliamo, anche per una botte (pag. 32) e quella del cono che può servire magari per il corno (pag. 33); (*) il bello è che il libricino in quistione porta sulla copertina la seguente scritta: *Operetta approvata* DALLE *commissioni scolastiche provinciali e già dal Ministero per tutte le scuole d'Italia.* E IN PARTE ciò è vero; dico in parte, perchè è stata approvata solo da *alcune* commissioni scolastiche provinciali, certamente da quelle fra i cui membri non era un professore di matematica.

Il più bello ancora è che l'operetta del sig. D'Agrò sia preferita da taluni maestri — e se dico ciò, lo dico con cognizione di causa — a quelle congeneri, pregevoli sotto il duplice aspetto, scientifico e didattico, dovute a valenti matematici, che sono riusciti tanto bene a farsi piccini per i piccini, come il Pincherle, il Ciamberlini e il Frattini, per tacere di tanti altri.

Questa rubrica potrà continuare, anzi continuerà...; s'intende bene che " io *scrivo* per ver dire — non per odio d'altrui, nè per disprezzo ". G. C.-L.

GIUOCHI PROPOSTI.

275. Una libreria ha tre piani e ciascuno può contenere 20 libri. I libri constano di 3 opere in 5 volumi ciascuna, 6 in 4 volumi e 7 opere in 3. Trovare in qual modo si debbono disporre i libri affinchè nessuna opera sia divisa.

276. Un ragazzo faceva pascolare un piccolo gregge; un suo compagno per burla avendogli domandato quante pecore avesse, egli rispose: se io avessi 6 volte, più $\frac{1}{2}$, più $\frac{1}{3}$, più $\frac{1}{4}$ il numero delle pecore che possiedo e *te* pure, avrei in tutto 100 *bestie* da custodire. Quante pecore aveva?

277. Una certa somma è stata divisa in parti eguali fra più persone; se queste fossero state 3 di più, ciascuno avrebbe ricevuta una lira meno e se fossero state 2 di meno, ciascuno avrebbe ricevuto una lira di più. Trovare il numero delle persone e il numero delle lire toccate a ciascuno. Generalizzare la questione. *(Da varie raccolte).*

278. In quanti modi diversi si possono distribuire 12 persone in 3 carrozze, ciascuna a 4 posti?

279. Alla morte di un tale, che possedeva cinque stabili di valore determinato, i due nipoti A e B, che si ritenevano soli eredi, si divisero l'eredità nel modo seguente:

A 1º, 2º e 3º stabile, B 4º e 5º,

avendo così diviso il patrimonio perfettamente per metà.

Ma saltò fuori un terzo nipote, C, per far valere i suoi diritti e il tribunale emise una sentenza, per la quale ai tre nipoti spettava eguale quota.

I due primi fecero il seguente progetto di divisione:

A avesse gli stabili 2º e 4º, B gli stabili 1º e 3º e C il 5º stabile; ma A avrebbe dato L. 20000 a C in contanti.

L'altro erede, C, fece un contro-progetto e cioè:

A avesse il 1º ed il 5º stabile, B il 2º ed il 3º ed egli il 4º, purchè A e B gli dessero rispettivamente L. 25000 e L. 15000.

Si domanda quanto valesse ciascuno stabile e quale fosse il suo patrimonio.

280. (**) Un impiegato governativo per il suo trasferimento dalla città B alla città C riceve un'indennità di L. 190; qualche anno avanti, quando da A fu trasferito a B, quantunque la distanza fosse di 75 Km. maggiore, ebbe 5 lire meno d'indennità, perchè l'ultimo dei suoi figli non aveva allora compiuto il 3º anno di età.

Si domanda: 1º) La distanza da A a B. 2º) quella da B a C. 3º) il numero dei componenti la famiglia del *Travet*. G. C.-L.

(*) Cfr. la bella critica che dei libri di testo fece il cariss. e ch.mo collega Ciamberlini al congresso di Torino nel '98.

(**) A gli impiegati trasferiti per ragioni di servizio lo Stato concede un'indennità di trasferimento, e cioè per ogni membro della famiglia, esclusi i bambini sotto ai tre anni, dà L. 0,16 per ciascuno dei primi 100 Km. percorsi e L. 0,11 per ciascuno dei Km. successivi.

ERRATA-CORRIGE. — Ai risolutori della quist. 713 va aggiunto il sig. **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*, e a quelli della quist. 752 va aggiunto il sig. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*.

ANNO X — DICEMBRE 1906 — FASC. II

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - A. BASSI. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI. - R. VERCELLIN.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al Periodico di Matematica

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Sulla risoluzione in numeri interi dell'equazione lineare a due incognite. (G. CARDOSO-LAYNES.)
Relazione sulla 69ª quistione a concorso.
73ª quistione a concorso.
Concorso per l'anno X (1906-07).
Risoluzioni delle quistioni 709, 715, 716, 741, 742, 751, 761, 763, 764, 769 e 786.
Quistioni da risolvere 801-810.

Copertina:

Spiegazione dei giuochi 258, 267, 268, 269, 271, 272 e 273.
Giuochi proposti 281-284.

LIVORNO
RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE
LIBRAIO-TIPOGRAFO
1906

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes, a Savona**, *Via Luigi Corsi, Villa Garroni.*

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 258, 267, 268, 269, 271, 272 e 273.

258. *Costruire internamente a un triangolo* ABC *un triangolo* A'B'C' *in modo che i vertici* A', B', C' *siano rispettivamente i punti medi di* B'C, C'A, A'B.

C. Ciamberlini.

Risoluzione del sig. **Nicastro**, R. L. di *Benevento*.

Supposto il problema risoluto siano D, H i punti d'incontro di BC con la retta AB' e con la parallela ad AB' condotta per A'. Poichè BC' = C'A' e CA' = A'B', risulta BD = DH = HC.

Da ciò la seguente costruzione: si prendono sui lati BC, CA, AB i punti D, E, F, in modo che sia BD = ½ BC; CE = ½ CA; AF = ½ AB.

Le rette AD, BE, CF determinano il triangolo richiesto. (Si può inversamente dimostrare che il triangolo ottenuto in questo modo soddisfa alle condizioni richieste.)

Altra risoluzione fu inviata dal sig. **Cellini** di *Forlì*. — Il sig. **Vestola**, L. P. di *Bitonto*, ha creduto che il giuoco, com'era enunciato, fosse impossibile, e ha ritenuto perciò che nell'enunciato di esso fosse incorso qualche errore.

C. Ciamberlini.

267. *In quanti modi si possono disporre* n *elementi in circolo?*
In particolare: In quanti modi si possono disporre a tavola 8 persone?

G. C.-L.

Risoluzione.

Se n elementi sono disposti in circolo, potremo sempre considerare come primo elemento uno qualunque di essi e stabilire il senso secondo il quale intendiamo succedersi gli elementi e quindi avremo tanti modi diversi di disporre i rimanenti quante sono le permutazioni di $n-1$ elementi e cioè $\underline{|n-1}$.

In particolare, 8 persone potranno disporsi a tavola in $\underline{|7}$ modi diversi, cioè in *5040* modi.

Delle 9 risoluzioni pervenuteci ne riscontrammo esatte solo 4 e cioè quelle dei sigg. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino* e **Cellini** di *Forlì*.

(G. C.-L.)

268. *In quanti modi possono disporsi circolarmente* 2n *elementi,* n *di una specie ed* n *di un'altra, ponendo la condizione che non debbano essere consecutivi due elementi della stessa specie?*
In particolare: In quanti modi potranno disporsi a tavola 5 uomini e 5 signore, se non debbono stare accanto due individui d'egual senso?

G. C.-L.

1ª **Risoluzione.**

Indichiamo con $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ una qualunque delle $\underline{|n-1}$ disposizioni che possiamo ottenere ponendo in circolo gli n elementi di una specie (v. n. 267); fra a_1 ed a_2 potremo porre uno qualunque degli n elementi della seconda specie; per porre fra a_2 e a_3 avremo a nostra disposizione $n-1$ elementi; per porre fra a_3 e a_4 ne avremo $n-2$ a nostra disposizione e così di seguito; per porre fra a_{n-1} ed a_n avremo soltanto 2 elementi a disposizione e finalmente per porre fra a_n ed a_1 a nostra disposizione rimarrà un solo elemento; quindi il numero totale delle soluzioni sarà dato da $\underline{|n-1} \,.\, n(n-1)(n-2)\ldots 2 \,.\, 1 = \underline{|n-1} \,.\, \underline{|n}$.

Nel caso di $n = 5$ avremo per il numero richiesto $\underline{|5-1} \,.\, \underline{|5} = 2880$.

2ª **Risoluzione** del sig. **Cellini** di *Forlì*.

Il numero delle disposizioni di n elementi in circolo è dato dalla formula $(n-1)!$ che abbiamo trovato nella risoluzione dell'esercizio precedente.

Dunque coi soli n elementi della prima specie si farebbero $(n-1)!$ disposizioni in circolo; coi soli n elementi della seconda specie si farebbero pure $(n-1)!$ disposizioni in circolo.

Ora prendiamo una delle disposizioni degli n elementi della prima specie, ed una disposizione degli n elementi della seconda e disponiamo tutti questi elementi sopra una circonferenza unica ed in modo che gli elementi della prima specie riescano alternati con quelli della seconda, senza far variare la disposizione relativa degli elementi di ciascuna specie, si avrà così una disposizione dei $2n$ elementi. Poscia, tenendo fissi gli elementi della prima specie, si spostino quelli della seconda in modo che un elemento a_1 vada ad occupare il posto di a_2; a_2 vada ad occupare il posto di $a_3 \ldots$; a_n vada ad occupare il posto di a_1 e si avrà una seconda disposizione dei $2n$ elementi. Seguitiamo a spostare in modo analogo gli elementi della seconda specie: essendo n i posti che può occupare ciascun elemento della 2ª specie, ne viene che combinando nel modo su esposto una disposizione degli n elementi della 1ª specie con uno di quelli della 2ª specie si avranno n disposizioni dei $2n$ elementi. E poichè si può combinare ciascuna disposizione degli elementi della 1ª specie con ciascuno degli elementi della 2ª specie, si ha che il numero totale delle disposizioni dei $2n$ elementi nel modo voluto è $n \,.\, \underline{|n-1} \,.\, n-1 = n \,.\, (\underline{|n-1})^2$.

Nel caso particolare di 5 uomini e 5 signore si ha che il numero delle disposizioni diverse è

$$5 \,.\, \underline{|5-1} \,.\, \underline{|5-1} = 5 \,.\, (\underline{|4})^2 = 2880.$$

Le altre 7 risoluzioni pervenuteci sono errate.

(G. C.-L.)

SU LA RISOLUZIONE IN NUMERI INTERI DELL'EQUAZIONE LINEARE A DUE INCOGNITE [1]

Sia

$$a_1 x_0 + a_0 x_1 = k_0 \tag{1}$$

un'equazione di 1° grado nelle incognite x_0 e x_1; senza togliere nulla alla generalità, possiamo supporre che a_1, a_0 e k_0 sieno non numeri razionali qualunque, ma numeri interi e primi fra loro. È noto poi che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) ammetta soluzioni intere è che a_1 e a_0 sieno primi fra loro; ammettiamo che sia verificata anche questa condizione, e quindi sia $|a_1| \neq |a_0|$; supponiamo p. es., $|a_1| < |a_0|$.

Esprimendo col simbolo

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{D} & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

che dalla divisione di D per d si ha per quoziente q e per resto r, considerando, se occorre il quoziente per eccesso per ottenere il resto positivo, supponiamo che sia:

$$\left.\begin{array}{llll}
\begin{array}{c|c} a_0 & a_1 \\ \cline{2-2} a_2 & q_1 \end{array}; & & \begin{array}{c|c} k_0 & a_1 \\ \cline{2-2} k_1 & q'_1 \end{array} \\
\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \cline{2-2} a_3 & q_2 \end{array}; & & \begin{array}{c|c} k_1 & a_2 \\ \cline{2-2} k_2 & q'_2 \end{array} \\
\begin{array}{c|c} a_2 & a_3 \\ \cline{2-2} a_4 & q_3 \end{array}; & & \begin{array}{c|c} k_2 & a_3 \\ \cline{2-2} k_3 & q'_3 \end{array} \\
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
\begin{array}{c|c} a_{n-2} & a_{n-1} \\ \cline{2-2} a_n & q_{n-1} \end{array}; & & \begin{array}{c|c} k_{n-2} & a_{n-1} \\ \cline{2-2} k_{n-1} & q'_{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c|c} a_{n-1} & a_n \\ \cline{2-2} a_{n+1} & q_n \end{array} & &
\end{array}\right\} \tag{2}$$

Siccome per calcolare $a_2, a_3, \ldots a_n$ si fanno le stesse operazioni che occorrono per trovare il M. C. D. di a_0 ed a_1 e per ipotesi a_0 e a_1 sono primi fra loro, si può supporre $a_n = 1$ e quindi $a_{n+1} = 0$.

Mi propongo di dimostrare che le formule [2]

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 \left[\frac{k_1}{a_1 a_2} - \frac{k_2}{a_2 a_3} + \frac{k_3}{a_3 a_4} - \ldots + (-1)^n \frac{k_{n-1}}{a_{n-1} a_n}\right] \\
x_0 &= a_0 \left[\frac{k_0}{a_0 a_1} - \frac{k_1}{a_1 a_2} + \frac{k_2}{a_2 a_3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{k_{n-1}}{a_{n-1} a_n}\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

---

(1) Questa noticina, che riproduce una lezione che ho fatto ai miei alunni del IV Corso del *R. Istituto Tecnico* di *Savona*, più che un metodo nuovo, può dirsi che esponga una modificazione del metodo di Eulero. (G. C.-L.)

(2) Per uniformità si è messo a_n, quantunque sia eguale ad 1.

cioè

$$x_1 = a_1 \,.\, \sum_{r=1}^{r=n-1} (-1)^{r+1} \frac{k_r}{a_r a_{r+1}}, \qquad x_0 = a_0 \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \frac{k_r}{a_r a_{r+1}}$$

dànno una soluzione intera della (1).

***

Risolvendo la (1) rispetto a x_0 si ha

$$x_0 = \frac{k - a_0 x_1}{a_1} = q'_1 - q_1 x_1 + \frac{k_1 - a_2 x_1}{a_1}; \tag{4}$$

affinchè sia intero x_0 deve essere intero $\frac{k_1 - a_2 x_1}{a_1} = x_2$ e quindi si deve risolvere in numeri interi l'equazione $a_1 x_2 + a_2 x_1 = k_1$, dalla quale si ha:

$$x_1 = \frac{k_1 - a_1 x_2}{a_2} = q'_2 - q_2 x_2 + \frac{k_2 - a_3 x_2}{a_2} \tag{5}$$

da cui si vede che affinchè x_1 sia intero deve essere intero $\frac{k_2 - a_3 x_2}{a_2} = x_3$, e quindi si deve risolvere in numeri interi l'equazione $a_2 x_3 + a_3 x_2 = k_2$, dalla quale si ha:

$$x_2 = \frac{k_2 - a_2 x_3}{a_3} = q'_3 - q_3 x_3 + \frac{k_3 - a_4 x_3}{a_3} \tag{6}$$

e, immaginando definite successivamente $x_4, x_5, \ldots x_n \ldots$ in modo analogo a x_2 e x_3, troveremo successivamente:

$$\left.\begin{array}{l}
x_3 = \dfrac{k_3 - a_3 x_4}{a_4} = q'_4 - q_4 x_4 + \dfrac{k_4 - a_5 x_4}{a_4} \\
x_4 = \dfrac{k_4 - a_4 x_5}{a_5} = q'_5 - q_5 x_5 + \dfrac{k_5 - a_6 x_5}{a_5} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-4} = \dfrac{k_{n-4} - a_{n-4} x_{n-3}}{a_{n-3}} = q'_{n-3} - q_{n-3} x_{n-3} + \dfrac{k_{n-3} - a_{n-2} x_{n-3}}{a_{n-3}} \\
x_{n-3} = \dfrac{k_{n-3} - a_{n-3} x_{n-2}}{a_{n-2}} = q'_{n-2} - q_{n-2} x_{n-2} + \dfrac{k_{n-2} - a_{n-1} x_{n-2}}{a_{n-2}} \\
x_{n-2} = \dfrac{k_{n-2} - a_{n-2} x_{n-1}}{a_{n-1}} = q'_{n-1} - q_{n-1} x_{n-1} + \dfrac{k_{n-1} - a_n x_{n-1}}{a_{n-1}}
\end{array}\right\} \tag{7}$$

Dall'ultima di queste relazioni si ha che, essendo $a_n = 1$, x_{n-2} avrà un valore intero se è $x_{n-1} = k_{n-1}$ e sarà $x_{n-2} = \frac{k_{n-2} - a_{n-2} k_{-1}}{a_{n-1}}$, che può scriversi:

$$x_{n-2} = a_{n-2} \left(\frac{k_{n-2}}{a_{n-2} a_{n-1}} - \frac{k_{n-1}}{a_{n-1} a_n} \right).$$

Sostituendo nella penultima delle (7), si ha un valore intero per x_{n-3} dato dalla formula:

$$x_{n-3} = a_{n-3} \left(\frac{k_{n-2}}{a_{n-3} a_{n-2}} - \frac{k_{n-2}}{a_{n-3} a_{n-1}} + \frac{k_{n-3}}{a_{n-1} a_n} \right).$$

In generale, se dalla formula

$$x_{n-i} = a_{n-i}\left(\frac{k_{n-i}}{a_{n-i}a_{n-i+1}} - \frac{k_{n-i+1}}{a_{n-i+1}a_{n-i+2}} + \ldots + (-1)^{i+1}\frac{k_{n-1}}{a_{n-1}a_n}\right)$$

si ha un valore intero per x_{n-i}, si ha anche, per le (7), dalla formula

$$x_{n-i-1} = \frac{k_{n-i-1} - a_{n-i-1}x_{n-i}}{a_{n-i}} =$$

$$= a_{n-i-1}\left(\frac{k_{n-i-1}}{a_{n-i-1}a_{n-i}} - \frac{k_{n-i}}{a_{n-i}a_{n-i+1}} + \ldots + (-1)^i\frac{k_{n-1}}{a_{n-1}a_n}\right)$$

un valore intero per x_{n-i-1}; quindi, per le (5), (6), (7), si avrà per x_1 un valore intero dato dalla formula

$$x_1 = a_1\left(\frac{k_1}{a_1a_2} - \frac{k_2}{a_2a_3} + \frac{k_3}{a_3a_4} - \ldots + (-1)^n\frac{k_{n-1}}{a_{n-1}a_n}\right) \tag{8}$$

e per x_0 il corrispondente valore intero dato dalla formula

$$x_0 = a_0\left(\frac{k_0}{a_0a_1} - \frac{k_1}{a_1a_2} + \frac{k_2}{a_2a_3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{k_{n-1}}{a_{n-1}a_n}\right). \tag{9}$$

Queste (8) (9) sono appunto le formule che volevamo stabilire.

È bene avvertire però che in pratica, dopo avere trovato il valore di x_1, sarà più conveniente, per trovare il valore corrispondente di x_0, usare la (4) invece della (9).

***

Osservazione I. — Per costruire le (2), poichè abbiamo già osservato che per la ricerca di $a_1, a_2, \ldots a_n$ si debbono fare le stesse operazioni che occorrono per la ricerca del M. C. D. dei numeri a_0 e a_1, il calcolo può disporsi nel modo seguente:

	q_1	q_2	q_3	. . . . .	q_{n-1}	q_n
a_0	a_1	a_2	a_3	. . . . .	a_{n-1}	1
a_2	a_3	a_4	...	. . . . .	0	

e, riunendovi anche il calcolo delle successive k, il quadro precedente può scriversi:

	q_1	q_2	q_3	. . . . .	q_{n-1}	q_2
a_0	a_1	a_2	a_3	. . . . .	a_{n-1}	1
a_2	a_3	a_4	...	. . . . .	0	
	q'_1	q'_2	q'_3	. . . . .	q'_{n-1}	
k_0	k_1	k_2	k_3	. . . . .	k_{n-1}	

intendendo che ogni k_i, ad eccezione di k_0, sia ottenuta come resto della divisione di k_{i-1} per a_i.

Osservazione II. — Se (α, β) è una soluzione intera dell'equazione

$$ax + by = k, \qquad \text{(I)}$$

è evidente che $(-\alpha, \beta)$, $(\alpha, -\beta)$, $(-\alpha, -\beta)$ sono rispettivamente soluzioni intere delle equazioni:

$$-ax + by = k, \quad ax - by = k \quad \text{e} \quad -ax - by = k \qquad \text{(II)}$$

e inversamente; si potrà quindi, per comodità di calcolo, per risolvere un'equazione del tipo (II) risolvere la (I), cambiando poi convenientemente il segno o i segni nel modo indicato.

***

Esempio I. — *Risolvere in numeri interi l'equazione*

$$8x + 5y = 91.$$

Si ha:

$$a_0 = 8, \qquad a_1 = 5, \qquad k_0 = 91 \qquad (x_0 = y, \qquad x_1 = x)$$

	1	1	1	2
8	5	3	2	1
3	2	1	0	
	18	0	0	
91	1	1	1	

$$x = 8 \cdot \left(\frac{1}{5.3} - \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1}\right) = 2$$

$$y = \frac{91 - 8.2}{5} = 15$$

e quindi tutte le soluzioni intere sono date dalle formule

$$x = 2 - 5\theta, \qquad y = 15 + 8\theta.$$

In particolare per $\theta = -1$ si ha un'altra soluzione intera e positiva (7, 7).

Esempio II. — *Risolvere in numeri interi l'equazione*

$$17x + 38y = 1000.$$

Si ha:

$$a_0 = 38, \qquad a_1 = 17, \qquad k_0 = 1000 \qquad (x_0 = x, \qquad x_1 = y)$$

	2	4	4
38	17	4	1
4	1	0	
	58	3	2
1000	14	2	

$$y = 17\left(\frac{14}{17.4} - \frac{2}{4.1}\right) = -5$$

$$x = \frac{1000 - 38.(-5)}{17} = 70$$

e

e q

e qu

e pe

met

RELAZIONE SULLA 69ª QUISTIONE A CONCORSO

Le dimostrazioni pervenute sono quattro. Una dei sigg. **De Bei**, **Scopinich** e **Pelosio**, R. I. T. di *Venezia*, che, evidentemente, è insufficiente perchè, in sostanza, consiste solo nell'osservare che, ruotando la figura attorno al centro del circolo inscritto, si hanno infiniti quadrangoli inscritti e circoscritti agli stessi due circoli mentre il quadrangolo resta sempre lo stesso. Una del sig. **Scala**, I. T. di *Catanzaro*, che è errata, perchè vi si ammette che un quadrangolo che ha due angoli opposti eguali sia un rombo. Una del sig. **La Spina**, R. I. T. di *Catania*, che è incompleta; e una del sig. **Perez**, R. I. T. di *Messina* che non è elementare.

Se i due ultimi completassero o trasformassero opportunamente le loro dimostrazioni, saremmo lieti di pubblicare e di premiare la migliore.

G. Pesci.

73ª QUISTIONE A CONCORSO

Trovare la condizione necessaria e sufficiente che deve sussistere fra a, b, c affinchè possano coesistere le equazioni

$$y^2 + z^2 - 2ayz = 0, \quad z^2 + x^2 - 2bxz = 0, \quad x^2 + y^2 - 2cxy = 0.$$

A. Bassi.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 31 gennaio 1907.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

CONCORSO PER L'ANNO X (1906-07).

Saranno ammessi al concorso per il premio annuale tutti gli studenti di scuole secondarie, abbonati al nostro giornale, purchè risolvano più di *un quarto* delle quistioni proposte durante il presente anno scolastico.

La Redazione assegnerà il Premio Annuale (che consiste in tre libri di matematica o di fisica, scelti dall'editore Giusti nel suo catalogo) a quel concorrente che giudicherà superiore agli altri, tenendo conto del numero delle quistioni risolute e dei pregi di queste risoluzioni.

Tanto il vincitore del premio, come gli altri concorrenti che ne saranno giudicati degni, riceveranno un *Diploma* che attesti la loro diligenza e la loro attitudine agli studi scientifici.

Infine saranno pubblicati i nomi di tutti i risolutori di più di *un decimo* delle quistioni proposte.

Nel prossimo fascicolo sarà pubblicato il resoconto del concorso annuale delle quistioni dell'anno 1905-6.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI
709, 715, 716, 741, 742, 751, 761, 763, 764, 769 E 786

709. *Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè le un'equazione cubica siano in progressione geometrica. Quando tale verificata risolvere l'equazione.*

Risoluzione.

Siano x_1, x_2, x_3 le radici dell'equazione

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

avremo allora

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \\ x_1x_3 = x_2^2 \end{cases}$$

Dalle (1), (2) deduciamo

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 - 2q$$

ossia per la (4),

$$(x_1 + x_3)^2 - x_1x_3 = p^2 - 2q$$
$$(p + x_2)^2 - x_2^2 = p^2 - 2$$

da cui immediatamente:

$$x_2 = -\frac{q}{p}.$$

Dalle (3), (4) si ha poi

$$x_2^3 = -r,$$

e quindi, dal confronto delle (6), (7), emerge cl

$$r = \frac{q^3}{p^3}.$$

Dalle (1), (4), (6) risulta che x_1, x_3, so

$$y^2 - \left(\frac{q}{p} - p\right)$$

e perciò

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{q - p^2 \pm}{}$$

Risolutori i sigg. **Algranati**, R. L. d *sina*; **Brenta, Cernuschi, Mosca**, R. I. T **Iasco**, R. L. di *Cuneo*; **Cera, Format La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Mar** *Venezia*; **Valagussa**, R. L. Beccari

715. *Trovare i lati d'un terale del cono di rotazione av la somma dei cateti è equivale inoltre che il rettangolo cont cateti è equivalente al quadr*

Risoluzione.

Essendo x, y, z le misure dell'ipotenusa e dei cateti del triangolo cercato, si ha

$$\begin{cases} x(y+z) = a^2, & (1) \\ (x-y)(x-z) = b^2, & (2) \\ y^2 + z^2 = x^2. & (3) \end{cases}$$

Sommando le (1), (2), e sottraendo la (3) dalla (1) divisa per x ed elevata a quadrato, si ha il sistema

$$\begin{cases} x^2 + yz = a^2 + b^2 \\ 2yz = \dfrac{a^4}{x^2} - x^2, \end{cases} \tag{4}$$

ed eliminando yz da queste, si ha subito l'equazione

$$x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^4 = 0, \tag{5}$$

ovvero

$$(x^2 - \sqrt{2}\,bx - a^2)(x^2 + \sqrt{2}\,bx - a^2) = 0,$$

che ha per radici

$$\left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}(b \pm \sqrt{2a^2 + b^2}); \qquad \left.\begin{matrix} x''' \\ x^{\text{IV}} \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-b \pm \sqrt{2a^2 + b^2}).$$

Di queste quattro radici, due sono da scartare perchè negative. Avendosi poi, dalla prima delle (4)

$$yz = a^2 + b^2 - x^2, \tag{6}$$

è facile vedere che dei due valori positivi di x è accettabile solo quello per cui

$$a^2 + b^2 > x^2,$$

ossia

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(-b + \sqrt{2a^2 + b^2}); \tag{α}$$

e quindi dalla (6)

$$yz = b\sqrt{2a^2 + b^2}, \tag{7}$$

e, per la (1)

$$y + z = \frac{\sqrt{2}}{2}(b + \sqrt{2a^2 + b^2}). \tag{8}$$

Le (7), (8) dànno finalmente

$$\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{4}(b + \sqrt{2a^2 + b^2}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 3b\sqrt{2a^2 + b^2}}. \tag{β}$$

Le (α), (β) risolvono il problema, purchè sia

$$a^2 + b^2 \geqslant 3b\sqrt{2a^2 + b^2}$$

$$\frac{a}{b} \geqslant \sqrt{2(4 + 3\sqrt{2})}.$$

Risolutori i sigg. **Baduel**, R. I. T. di *Perugia*; **Belvederi**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini**, **Brenta**, **De Angelis**, **Cernuschi**, **Galleano**, **Mosca**, R. I. T. **Costa**, I. T. Priv. e **Terracini**, R. L. Cavour di *Torino*; **Borselli** e **De Cristofori**, L. P. di *Napoli*; **Casalasco**, **Chiesa** e **Marchisio**, L. P. di *Cuneo*; **Castaldi**, **Ghè** e **Reggio**, R. I. T. di *Firenze*; **Cera**, **Formato**, **Salonia** e **Sosso**, L. P. di *Caserta*; **Cirillo**, **Maracci** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Freguglia** e **Iodi**, R. I. T. di *Modena*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

716. *Pel vertice* C *opposto ad* A *di un rettangolo* ABCD *si conduca una retta che seghi nei punti* P e Q *i prolungamenti dei lati* AB *ed* AD, *e si completi il rettangolo* APRQ. *Determinare i segmenti* AP *ed* AQ *in modo che il volume ge-*

nerato dalla rotazione del rettangolo APRQ *intorno al lato* AP *sia eguale al volume di un altro cilindro avente il raggio della base eguale ad un segmento dato* k *e l'altezza eguale ad* AQ. *Qual'è il più piccolo valore che si può dare a* k? *e come si trovano in questo caso i punti* P *e* Q? ***

Pongo $AB = a$; $BC = b$; $AP = x$, $AQ = y$. I triangoli simili APQ, BPC dànno

$$AP : AQ = BP : BC, \quad \text{ossia} \quad x : y = (x - a) : b.$$

$$bx = (x - a)\,y \tag{1}$$

Dalla (1) scende

$$bx^2 - xy\,.\,x + axy = 0 \quad (\alpha); \qquad ay^2 - xy\,.\,y + bxy = 0 \quad (\beta).$$

Ciò premesso, per la condizione posta si ha

$$\pi y^2 x = \pi k^2 y,$$

ovvero

$$xy = k^2. \tag{2}$$

perciò le (α), (β) dànno

$$bx^2 - k^2 x + ak^2 = 0\ (\alpha'); \qquad ay^2 - k^2 y + bk^2 = 0$$

che dànno:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{k(k \pm \sqrt{k^2 - 4ab})}{2b}; \qquad \left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{k(k \pm \sqrt{k^2 - 4ab})}{2a}.$$

È facile vedere che le soluzioni sono:

$$\begin{cases} AP = \dfrac{k(k + \sqrt{k^2 - 4ab})}{2b}; \\ AQ = \dfrac{k(k - \sqrt{k^2 - 4ab})}{2a}; \end{cases} \qquad \begin{cases} AP = \dfrac{k(k - \sqrt{k^2 - 4ab})}{2b} \\ AQ = \dfrac{k(k + \sqrt{k^2 - 4ab})}{2a}. \end{cases}$$

Tutt'e due sono accettabili purchè sia

$$k^2 \geqslant 4ab,$$

ovvero

$$k \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

Segue da ciò che il minimo valore di k è $2\sqrt{ab}$, ed allora è

$$AP = 2a; \qquad AQ = 2b,$$

ossia P, Q sono i simmetrici di A rispetto a B, D rispettivamente.

Risolutori i sigg. **Baduel**, R. I. T. di *Perugia*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa G.**, **Galleano**, **Mosca**, R. I. T. **Costa I.**, **De Angelis**, R. L. P. e **Terracini**, R. L. di *Torino*; **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*; **Casalasco** e **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Castaldi** e **Ghè**, R. I. T. di *Firenze*; **Cirillo**, **Maresca** e **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Castro**, R. L. di *Milano*; **Freguglia** e **Iodi**, R. I. T. di *Modena*; **Papa**, R. I. T. di *Napoli*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

741. *La somma dei quadrati delle distanze del circoncentro dai centri dei cerchi tangenti ai lati d'un triangolo è il triplo del quadrato del diametro del cerchio circoscritto.*

E. Cutore.

Risoluzione del sig. **De Castro**, R. Liceo Beccaria di *Milano*.

Denotando con d, d_1, d_2, d_3 le distanze del circoncentro da I, I_a, I_b, I_c, si ha (T. d'Eulero)

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$
$$d_1^2 = R^2 + 2Rr_a$$
$$d_2^2 = R^2 + 2Rr_b$$
$$d_3^2 = R^2 + 2Rr_c,$$

e sommando membro a membro, e ricordando che

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R, \qquad \text{(Feurbach)}$$

si trova

$$d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 12R^2.$$

Altre risoluzioni dei sigg. **Armenante** di *Caserta*, **Bongini**, **Costa G.**, **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Casalasco**, **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Corsi-Tafi**, R. I. T. di *Arezzo*; **Tutore**, **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, **Pelosio**, **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Iodi**, R. I. T. di *Modena*; **Marrani**, R. I. T. di *Ancona*.

A. Fanti.

742. *Risolvere il sistema*

$$\left.\begin{aligned} 16\,(x^4 + y^4 + z^4 + u^4) &= 289 \\ xy - zu = z + u &= \tfrac{1}{2} \\ x + y &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

E. Cutore.

Risoluzione del sig. **De Castro**, R. Liceo di Beccaria di Milano.

Dalle identità:

$$16\,(x^4 + y^4) = 16\,(x + y)^4 - 64xy\,(x + y)^2 + 32x^2y^2,$$
$$16\,(z^4 + u^4) = 16\,(z + u)^2 - 64zu\,(z + u)^2 + 32z^2u^2,$$

si ha, ponendo $xy = t$ (e quindi $zu = t - \frac{1}{2}$), e sommando,

$$16\,(x^4 + y^4 + z^4 + u^4) = 64t^2 - 816t + 1665 = 289,$$

ossia

$$4t^2 - 51t + 86 = 0$$

donde

$$t_1 = 2 \quad , \quad t_2 = \frac{43}{4}.$$

Si hanno così i due sistemi

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \\ z + u = \dfrac{3}{2} \\ zu = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = \dfrac{43}{4} \\ z + u = \dfrac{3}{2} \\ zu = \dfrac{37}{2}, \end{cases}$$

che hanno rispettivamente per soluzioni

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\, i\sqrt{34}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} u \\ z \end{Bmatrix} = \frac{3 \pm i\sqrt{285}}{4}.$$

Risoluzioni analoghe dei sigg. **Armenante**, **Cera**, **Formato**, **Salonia**, R. L. di *Caserta*; **Bongini**, **Brenta**, **Cernuschi**, **Costa G.**, **Mosca**, R. I. T. di *Torino*: **Casalasco**, **Chiesa**, **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*; **Castaldi**, **Chiarugi**, **Ghè**, R. I. T. di *Firenze*; **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*; **Cutore**, **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, **Garbellotto**, **Pelosio**, **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Iodi**, R. I. T. di *Modena*; **Magnani** e **Macchi**, R. I. T. di *Varese*; **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*; **Maccarati**, R. L. di *Benevento*; **Perez**, R. I. T. di *Messina*.

A. Fanti.

751. *Si considerino due rette perpendicolari* O*x*, O*y*, *due circonferenze l'una di raggio* a *tangente in* O *a* O*x*, *l'altra di raggio* b *tangente in* O *ad* O*y*, *ed infine una retta* r *che ruoti attorno ad* O. *La retta* r *incontra le due circonferenze*

nei punti A, B *che si proiettano in* A′, B′ *sulla* O*x*. *Studiare la variazione della lunghezza del segmento* A′B′.

(Baccalaureato in matematiche. Besanzone, Ottobre 1905.)

Risoluzione del sig. **De Castro**, R. L. Beccaria di *Milano*.

Indicando con θ l'angolo che la retta r forma con Ox, si ha

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 2\,(b\cos\theta - a\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

e quindi

$$\overline{A'B'} = y = 2\,(b\cos\theta - a\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta = b + b\cos 2\theta - a\,\mathrm{sen}\,2\theta;$$

e ponendo $\frac{a}{b} = tg\,\varphi$

da cui si ricava subito che

$$y = b + \frac{b}{\cos\varphi}\cdot\cos(\varphi + 2\theta),$$

se θ cresce da 0 a $\frac{\pi}{2} - \varphi$, y diminuisce da $2b$ a 0;

» » » » $\frac{\pi}{2} - \varphi$ a $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$, y » » 0 » $b - \frac{b}{\cos\varphi} = b - \sqrt{a^2 + b^2}$ (*minimo*);

» » » » $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ y cresce da $b - \frac{b}{\cos\varphi}$ a 0;

» » » » $\frac{\pi}{2}$ a $\pi - \frac{\varphi}{2}$ y » » 0 a $b + \frac{b}{\cos\varphi} = b + \sqrt{a^2 + b^2}$ (*massimo*);

» » » » $\pi - \frac{\varphi}{2}$ a π, y diminuisce da $b + \frac{b}{\cos\varphi}$ a $2b$.

Interpretazione geometrica. — Se O_1, O_2 sono i centri della circonferenza di raggi a e b, e B_1, B_2 i successivi punti d'incontro della retta O_1O_2 colla circonferenza (O_2), saranno OB_1, OB_2 le posizioni della retta r per le quali rispettivamente hanno luogo il minimo e il massimo. Infatti, se A_1, A_2 sono gli altri punti d'incontro della retta OB_1, OB_2 colla circonferenza (O_1) si ha

$$O_2\widehat{O}A_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}; \qquad O_2\widehat{O}A_2 = \pi - \frac{\varphi}{2}.$$

Il massimo e il minimo sono rispettivamente eguali ai segmenti O_1B_2 (positivo), B_1O_1 (negativo).

Inviarono risoluzioni meno semplici della precedente, e non tutte complete relativamente alla variazione del segmento A′B′, i sigg. **Bongini** e **Costa G.**, R. I. T. di *Torino*; **Boselli**, R. L. Visconti di *Venezia*; **Campetti**, I. T. P. di *Roma*; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Lucca*; **De Bei**, di *Catania*; **Macchi**, R. I. T. di *Varese*; **Iodi**, R. I. T. di *Modena*; **La Spina**, R. I. T. di *Ancona*. Altre risoluzioni basate sulla geometria analitica furono inviate dai sigg. **Bongini**, **Costa G.**, **Cernuschi**, **Brenta** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Castaldi**, R. I. T. di *Firenze*.

C. Ciamberlini.

761. *In ogni triangolo la somma delle distanze del circoncentro dei lati è uguale alla somma dei raggi dei cerchi iscritto e circoscritto.*

E. Cutore.

Risoluzione.

Siano O, R il centro e il raggio del circumcircolo; k_a, k_b, k_c le distanze punto O dai lati BC, CA, AB; A′, B′, C′ i punti medi di questi. Dal quad- inscrittibile AB′OC′ si ricava

$$bk_c + ck_b = aR.$$

Sommando questa relazione colle altre analoghe si ha

$$(k_a + k_b + k_c)(a + b + c) - (ak_a + bk_b + ck_c) = (a + b + c)\,R.$$

Ma

$$ak_a + bk_b + ck_c = 2S = 2pr,$$

perciò

$$k_a + k_b + k_c = R + r. \qquad (3)$$

Osservazione. — Nella dimostrazione precedente è supposto che nessuno degli angoli del triangolo sia ottuso. Se per es. è ottuso l'angolo A, nelle relazioni precedenti va posto $-k_a$ in luogo di k_a. Se però si conviene che k_a, k_b, k_c rappresentino rispettivamente le distanze del punto O dai tre lati precedute dal segno +, o dal segno —, secondo che il punto O si trova, rispetto a ciascun lato, dalla stessa parte o da bande opposte del vertice opposto, le relazione (3) è generale.

Inviarono dimostrazioni basate su relazioni meno semplici tra gli elementi di un triangolo i sigg. **Brenta**, **Bongini**, **Costa G.** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*. Il sig. **Cernuschi** dice che la dimostrazione può leggersi nella " Recente Geometria del triangolo " del prof. Alasia, e che si può dedurre da altra proprietà dimostrata dal **Vercellin** in un articolo di questo " Supplemento " (a. IX; fasc. III). Le dimostrazioni inviate dai sigg. **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia* si fondano su relazioni trigonometriche.

C. Ciamberlini.

763. *Costruire " geometricamente " un triangolo, conoscendo un lato, la differenza degli altri due, e la differenza delle altezze ad essi corrispondenti.*

M. Scopinich.

1ª **Risoluzione** del sig. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*.

Supposto risoluto il problema, sia R il raggio del circumcircolo del triangolo richiesto ABC; A′ ed M i punti medî rispettivamente del lato BC e dell'arco BC: I l'incentro; D il punto in cui l'incerchio tocca il lato BC. Si ha

$$(h_c - h_b) : (b - c) = a : 2R\,; \quad A'D = \tfrac{1}{2}(b - c\,; \quad MB = MI.$$

Da ciò segue la costruzione: Si determina 2R come quarto proporzionale dopo $h_c - h_b$, $b - c$ ed a, e nella circonferenza di raggio R si adatta la corda $BC = a$; sul segmento A′B si prende $A'D = \frac{1}{2}(b - c)$; da D si conduce la perpendicolare al lato BC, e si determina il suo punto d'incontro I con la circonferenza M (MB). Si prolunga MI sino ad incontrare in A la circonferenza circoscritta. Il triangolo ABC è richiesto.

Per la possibilità del problema, dovendo essere $a < 2R$, occorre

$$h_c - h_b \leqslant b - c\,; \quad \text{e inoltre} \quad b - c < a.$$

Soddisfatte tali condizioni, il problema ha una soluzione.

2ª **Risoluzione** del sig. **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.

Supposto il problema risoluto, siano BH_b, CH_c le altezze corrispondenti ai lati AC, AB. Presi sulle semirette CH_c, CA i segmenti $CN = h_c - h_b$, $CM = b - c$ poichè

$$h_c : h_b = b : c\,; \quad \text{e quindi} \quad (h_c - h_b) : h_b = (b - c) : c,$$

risulta

$$MC : AB = NC : BH_b\,,$$

e poichè $\widehat{ABH_b} = \widehat{MCN}$, il triangolo MNC è simile al triangolo rettangolo ABH_b, e quindi $\widehat{NMC} = \widehat{BAC}$. Ora il triangolo rettangolo MNC si può costruire, quindi il problema dato si riduce all'altro la cui risoluzione è nota: Costruire un triangolo, dato un lato, l'angolo opposto e la differenza degli altri due lati.

Inviarono altre buone risoluzioni i sigg. **Iodi**, R. I. T. di *Modena*; **De Bei**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*, e **Plancich**, L. Priv. di *Portorè* (presso *Fiume*). Le risoluzioni dei sigg. **Cernuschi**, **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*, si basano su

relazioni trigonometriche; quelle degli ultimi due non sono geometriche com'era richiesto. Nella risoluzione del sig. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*, si suppone ad un certo punto nota l'altezza h_b, e ciò non è. — Altra risoluzione, non esposta in modo chiaro, fu inviata dal sig. **La Spina**, R. I. T. di *Catania*.

C. Ciamberlini.

764. *Una piastrella materiale di densità* d *e che ha la forma d'un quadrato* ABCD *di lato* $2a$, *mantenuta pel vertice* B *al disopra di una massa liquida di densità* δ, *vi è lasciata cadere; essa galleggia verticalmente mantenendosi col vertice* D *opposto a* B *al disotto del livello del liquido. Se ne determini la posizione di equilibrio.*

C. Alasia.

Risoluzione dei sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*.

Indicando con x la distanza del centro O della piastrella dalla superficie libera del liquido, e osservando che i volumi della piastrella e della parte immersa sono proporzionali alle aree della faccia ABCD e della parte di essa che è immersa, e che perciò tali aree sono inversamente proporzionali alla densità della piastrella e del liquido, si ha:

$$4a^2 : 4a^2 - (a\sqrt{2} - x)^2 :: \delta : d$$

da cui

$$f(x) = \delta x^2 - 2a\delta\sqrt{2}\,x - 2a^2(\delta - 2d) = 0.$$

Le radici di questa equazione sono reali, perchè $\Delta = \delta(\delta - d)$ essendo necessariamente $\delta > d$. Esse sono:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = a\sqrt{2} \pm \frac{2a}{\delta}\sqrt{\delta(\delta - d)}.$$

Ma dovendo essere evidentemente $x < a\sqrt{2}$, sarà da ritenersi pel problema la sola radice

$$x_2 = a\sqrt{2} - \frac{2a}{\delta}\sqrt{\delta(\delta - d)}$$

la quale è positiva, nulla o negativa secondo che è $\delta \lesseqgtr 2d$.

Riassumendo, abbiamo:

Se è $d < \delta < 2d$, il centro della piastrella è al disotto della superficie libera del liquido.

Se è $\delta = d$, il centro della piastrella è sulla superficie libera del liquido.

Se è $\delta > 2d$, il centro della piastrella è fuori del liquido.

Mandarono analoghe risoluzioni, giungendo agli stessi risultati, i sigg. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.

Non giunsero a conclusioni esatte i sigg. **Scopinich** e **Pelosio**, R. I. T. di *Venezia*; **Brenta** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **O. Campetti**, I. T. P. di *Lucca*.

E. Nannei.

769. *Risolvere il sistema*

$$\binom{x}{y+1} = 2\binom{x}{y}$$
$$\binom{x}{y+2} = 3\binom{x}{y}$$

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione.

Il sistema proposto può scriversi:

$$\begin{cases} \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-[y+1]+1)}{\underline{|y+1}} = 2 \cdot \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{\underline{|y}} \\[2ex] \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-[y+2]+1)}{\underline{|y+2}} = 3 \cdot \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{\underline{|y}} \end{cases}$$

Dividendo i due membri di ciascuna equazione per il fattore comune

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-y+1)}{\underline{|y}},$$

si ottiene l'altro sistema

$$\frac{x-y}{y+1}=2, \qquad \frac{(x-y)(x-y-1)}{(y+1)(y+2)}=3,$$

che può considerarsi come equivalente al primo, perchè, dovendo essere $x>y$, non può essere $x-m=0$, se è $m \leqslant y-1$.

Sostituendo con la 1ª equazione nella seconda, si ha il nuovo sistema:

$$\frac{x-y}{y-1}=2, \qquad 2\,.\,\frac{x-y-1}{y+2}=3,$$

cioè

$$x-3y=2, \qquad 2x-5y=8$$

che dà

$$x=14, \qquad y=4.$$

Infatti è

$$\binom{14}{4}=1001, \quad \binom{14}{5}=2002, \quad \binom{14}{6}=3003$$

e quindi

$$\binom{14}{5}=2\,.\binom{14}{4} \quad \text{e} \quad \binom{14}{6}=3\,.\binom{14}{4}.$$

Inviarono risoluzioni i sigg. **Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa** e **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei, Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*.

(G. C.-L.)

786. *Data la base, l'angolo al vertice ed il raggio del cerchio inscritto ad un triangolo, costruire " geometricamente " il triangolo.*

C. De Bei.

Risoluzione del sig. **Brenta.**

Sia $\overline{BC}$ la base data del triangolo ABC, $\widehat{A}$ l'angolo dato, ed r il raggio noto dell'incerchio, di cui il centro sia I.

Indicando con π un angolo piatto si ha:

$$\widehat{BIC}=\pi-\tfrac{1}{2}(\widehat{B}+\widehat{C})=\tfrac{1}{2}(\pi+\widehat{A}).$$

Sulla base $\overline{BC}$, si costruisca un arco capace dell'angolo BIC, e quindi dalla stessa parte, la parallela a BC alla distanza r. Ogni punto comune della parallela e dell'arco è incentro del triangolo richiesto; e quindi avremo due soluzioni, o una soluzione, o nessuna, secondo che la saetta dell'arco costruito è minore, eguale o maggiore del raggio r.

Risolvettero in questo modo il problema i sigg. **G. Costa, Bongini** e **Cernuschi** del R. I. T. di *Torino*.

Risoluzione del sig. **Cutore** del R. I. T. di *Catania*.

Sia ABC il triangolo cercato; F, G, H i punti in cui l'incerchio di centro I, tocca i lati AB, AC, CB; D ed E i punti in cui l'ex-cerchio tangente ad AB, tocca i prolungamenti dei lati CA, CB. Si sa che $\overline{AD}=\overline{BF}$, dunque

$$\overline{AG}+\overline{AD}=\overline{AF}+\overline{FB},$$

cioè

$$\overline{DG}=\overline{AB}, \quad \text{ed} \quad \overline{HE}=\overline{AB}.$$

Ne deriva la seguente

Costruzione. — Formato l'angolo ACB e descritto il cerchio di centro I e raggio dato, si prenda $\overline{SD} = \overline{HE} = \overline{AB}$. Si descriva il cerchio ex-inscritto in modo che tocchi nei punti D ed E, i prolungamenti dei lati AC, BC.

Si conduca la tangente AB, comune ai due cerchi ed il triangolo ABC è quello che si richiede.

Dettero risoluzioni analoghe alla precedente i sigg. **Mosca** del R. I. T. di *Torino* e **Belvedere** del R. I. T. di *Messina*.

Risoluzione del sig. **Iodi** del R. I. T. di *Modena*.

Sia $\overline{BC}$ il lato dato, α l'angolo opposto r il raggio del cerchio inscritto.

Su $\overline{BC}$ descrivo un arco capace d'un angolo α e completo il cerchio. Sia D il punto medio dell'arco BC. Conduco a distanza r una parallela alla a.

Per nota proprietà l'incentro si trova sul cerchio di centro D e raggio DB. Il punto comune a questo cerchio e alla parallela tracciata sarà l'incentro. Così si costruirà il triangolo facilmente.

Risoluzione analoga alla precedente mandò il sig. **Scopinich** del R. I. T. di *Venezia*.

Non ritengo esatta la risoluzione del sig. **La Spina** del R. I. T. di *Catania*. (1)

E. Nannei.

QUISTIONI DA RISOLVERE

801. Risolvere i sistemi

1. $$\frac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)} = a, \qquad \frac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)} = b.$$

2. $$\frac{x^5+y^5}{x^3+y^3} = \frac{121}{13}, \qquad x+y=2,$$

3. $$\frac{a^3x}{y^2z^2} = \frac{b^3y}{z^2x^2} = \frac{c^3z}{x^2y^2} = 1.$$

802. Risolvere l'equazione

$$(1+k)\frac{\cos x \cos(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)} = 1 + k\cos 2x.$$

803. Risolvere un triangolo rettangolo conoscendo i raggi dei cerchi inscritti nei due triangoli nei quali quello cercato è decomposto dalla congiungente il vertice dell'angolo retto col punto medio dell'ipotenusa.

A. Bassi.

804. Dati i tre raggi OA, OB, OC, formanti gli angoli $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \alpha$, e dato A, determinare B e C in modo che OA, OB, OC siano in progressione aritmetica, e il triangolo ABC abbia un'area data.

805. Nell'equazione $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ determinare per b, c, d valori reali tali che b, c, d, siano le radici dell'equazione stessa.

S. Catania.

(1) È bene che i giovani accompagnino le loro risoluzioni, quando occorre, con una figura: per non obbligare il revisore a farla: tanto più che l'errore di una lettera può bastare per far perdere parecchio tempo a chi non ne ha da buttar via!

806. L'espressione

$$4\,[a^4 + b^4 - ab\,(a^2 + b^2)]$$

può mettersi sotto la forma $A^2 + 3B^2$.

807. Semplificare il polinomio

$$\begin{aligned}
&(a - x_1)\,(a - x_2) && \ldots (a - x_n) + \\
&+ x_1\,(a - x_2)\,(a - x_3) && \ldots (a - x_n) + \\
&+ a x_2\,(a - x_3) && \ldots (a - x_n) + \\
&+ a^2 x_3\,(a - x_4) && \ldots (a - x_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots \\
& && + a^n x_n\,.
\end{aligned}$$

G. Candido.

808. Dimostrare l'identità

$$\sum_{r=1}^{r=m-1} r\,.\,(m - r) = \frac{m\,(m^2 - 1)}{6}\,.$$

809. Dimostrare l'identità

$$\sum_{r=0}^{r=m} \binom{m}{r}^2 = \binom{2m}{m}\,.$$

810. È dato un cilindro circolare retto di raggio r ed altezza h; si conduca un piano parallelo alle basi di esso in modo che la sezione ottenuta sia base comune di due coni che abbiano rispettivamente i vertici nei centri delle basi del cilindro ed abbiano una superficie laterale complessiva eguale alla superficie laterale del cilindro.

Dimostrare che se è $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, il piano condotto per il punto medio dell'altezza, risolve il problema.

G. Cardoso-Laynes.

N. B. — Le risoluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 31 gennaio 1907.

Si pregano vivamente i signori risolutori di *inviare ogni quistione o giuoco in foglio separato, scrivendo su ciascuno il proprio nome e l'istituto al quale essi appartengono.*

Le lettere non francate o insufficientemente francate vengono respinte. Ricordiamo che i manoscritti aperti, il cui peso non superi 50 grammi, devono esser francati con cent. 20 e non con cent. 15 come le lettere.

A proposito di una recensione umoristica *(v. fasc. prec.)*

Ci si prega di far noto ai lettori del "Supplemento" che il fascicoletto di cui erano citati i brani "*fa parte di una piccola quantità di copie errate, sulle quali persona a ciò non autorizzata si credette lecito di fare delle modificazioni, riducendola in quel miserevole stato. Non appena l'editore se ne accorse distrusse le poche copie tirate di quella ristampa, che non è quella approvata dal Ministero e dalle commissioni provinciali, nè la nuova ultimamente rifatta, le quali sono scientificamente esatte*".

PICCOLA POSTA. — ? *Messina*; ? *Bologna*... Le risoluzioni dei loro giuochi sono state respinte perchè non sufficientemente francate. G. C.-L.

ERRATA-CORRIGE.

La quistione **775** (proposta nel fasc. VIII-IX, giugno-luglio 1905) deve essere enunciata così: "Determinare due numeri x, y $(x > y)$ tali che la differenza e somma dei loro quadrati siano rispettivamente uguali al loro prodotto ed alla differenza dei loro cubi".

Ai risolutori delle quist. 743 e 745 si aggiunga il sig. **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; a quelli delle quist. 765, 766 e 767, si aggiunga il sig. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 3 gennaio 1907

269. *In quanti modi* n *elementi si possono disporre se* n — 1 *debbono porsi circolarmente ed uno nel centro?*

In particolare: In quanti modi possono disporsi 12 bambini che giuocano in circolo, dandosi la mano due a due ad eccezione di uno che sta nel mezzo a loro?

G. C.-L.

Risoluzione.

Uno qualunque degli n elementi può disporsi nel centro; i rimanenti $n-1$ (v. n. 267) possono disporsi in $\underline{|n-2}$ modi e quindi potremo disporre gli n elementi dati, nel modo indicato, in $n \,.\, \underline{|n-2}$ modi diversi.

Nel caso particolare di $n = 12$ il numero richiesto sarà $12 \,.\, \underline{|10} = 43545600$.

Delle 9 risoluzioni pervenuteci erano esatte soltanto quelle dei predetti sigg. **Belvedere, Brenta, Cellini** e **Cernuschi.**

(G. C.-L.)

271. *Trovare le coppie di numeri consecutivi che abbiano per somma numeri rappresentati da cifre tutte eguali.*

G. C.-L.

Risoluzione.

Indicando con x il minore dei due numeri consecutivi richiesti e con y il valore di una delle n cifre eguali del numero somma, dovremo avere:

$$x + (x + 1) = y\,(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1).$$

Intanto si può osservare che y deve essere dispari, perchè tale è sempre la somma di due numeri intieri consecutivi; poniamo $y = 2m + 1$ ed avremo successivamente:

$$\begin{aligned}
2x + 1 &= (2m + 1)\,(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1)\\
&= 2m\,(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) + (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1)\\
2x &= 2m\,(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) + 10\,(10^{n-2} + 10^{n-3} + \ldots + 1)\\
x &= m\,(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) + 5\,(10^{n-2} + 10^{n-1} + \ldots + 1)\\
x &= m \,.\, 10^{n-1} + (m + 5)\,(10^{n-2} + 10^{n-3} + \ldots + 10 + 1). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Poichè deve essere $0 < y = 2m + 1 \leqslant 9$, sarà $0 \leqslant m \leqslant 4$; inoltre, per la natura del problema, supporremo $n \geqslant 2$.

Facendo nella (1) $m = 0, 1, 2, 3, 4$ ed $n = 2, 3, \ldots$, si hanno i seguenti valori per x:

m \ n	2	3	4	5	.....
0	05	055	0555	05555	.....
1	16	166	1666	16666	.....
2	27	277	2777	27777	.....
3	38	388	3888	38888	.....
4	49	499	4999	49999	.....

Infatti:

$5 + 6 = 11$, $16 + 17 = 33$, $27 + 28 = 55$, $38 + 39 = 77$, $49 + 50 = 99$

$55 + 56 = 111$, $166 + 167 = 333$, $277 + 278 = 555$, $388 + 389 = 777$, $449 + 500 = 999$

. . . . . .

Inviarono risoluzioni i sigg. **Belvedere, Bongini, Brenta, Cernuschi, Costa, Maracci** e **Perez.**

(G. C.-L.)

272. *Indicando con* (x, y, z,...) *il numero che si rappresenta con le cifre* x, y, z,..., *dimostrare che se* (a, b, c, d) *e* (a + r, b + r, c + r, d + r) *sono quadrati perfetti, se* (m, n) *è la radice quadrata di* (a, b, c, d), *è* (m + r, n + r) *quella di* (a + r, b + r, c + r, d + r). *Trovare per quali numeri si verifica questa proprietà.*

G. C.-L.

Risoluzione.

Siano

$$x^2 = 1000\,(a + r) + 100\,(b + r) + 10\,(c + r) + (d + r), \quad y^2 = (10\,m + n)^2 = 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d$$

i due quadrati; dovremo avere:

$$x^2 - y^2 = 1111\,r, \qquad \text{cioè} \qquad (x + y)\,(x - y) = 11 \,.\, 101 \,.\, r.$$

Dovendo essere $x + y > x - y$ e $31 < x < 100$ (perchè x^2 deve essere di 4 cifre) le sole ipotesi possibili sono:

$$\begin{cases} x + y = 101 \\ x - y = 11\,r \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 101\,r \text{ (con } r = 1) \\ x - y = 11. \end{cases}$$

La 2ª ipotesi si riduce ad un caso particolare della 1ª, perciò questa può considerarsi come la sola ammissibile. Essendo $x - y = 11\,r$, ne segue che se è $y = 10\,m + n$, sarà

$$x = 10\,m + n + 11\,r = 10\,(m + r) + (n + r) \qquad \text{c. d. d.}$$

Si avrà poi:

$$x = \tfrac{1}{2}\,(101 + 11\,r). \qquad y = \tfrac{1}{2}\,(101 - 11\,r).$$

Affinchè x ed y abbiano valori in

sarà $r < \frac{39}{11}$ e quindi $r \leqq 3$.

Per $r = 1$ si ha $x = 56$

Infatti si ha $56^2 = 3136$, 45^2

$67^2 = 4489$, 34^2

Inviarono risoluzioni, non del

273. *Trovare un quadra*
cifre in gruppi binari ed ottenuti
ed (e, f) *triplo di* (c, d).

Risoluzione.

Per i dati del problema, indi

$N^2 = 10000$ (1
$= 10000$ (1
$= 10206$ 1

e perciò dovrà essere

Siccome deve essere per
$10a + b = 14$ e perciò $10c + d$

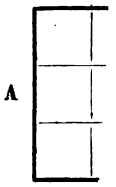
Inviarono risoluzioni i sigg
R. I. T. di *Torino*; **Maracci**, R.

G

281. Una contadina p
dette la metà più ½ uovo (senz
fece cinque volte di seguito;
al mercato?

282. Due pedoni A
Il primo parte prima del sec
oche, la quale cammina davant
di pecore che fa ¼ di lega all
prima di trovarsi a due leghe

283. Nelle caselle
sino alle seguenti condizioni



1°. I numeri di ciascun
2°. Il maggiore dei num
3°. Nel quadrato A il p
4°. Nel quadrato B la s
5°. La somma costante
6°. Questo numero sia

284. Trovare un
eguale alla somma dei qu

Le risoluzioni si accet

ANNO X — GENNAIO 1907 — FASC. III

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - A. BASSI. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI. - R. VERCELLIN.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al Periodico di Matematica

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo; devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Onoranze al prof. Ulisse Dini. (LAZZERI.)
Equazioni irrazionali. (G. CANDIDO.)
Relazione del concorso annuale. (Anno IX, 1905-906).
74ª quistione a concorso.
Relazioni delle 68ª e 72ª quistioni a concorso.
Risoluzioni delle quistioni 784, 785, 788, 789, 793, 795 e 798.
Quistioni da risolvere 811-820.

Copertina:

Spiegazione dei giuochi 259, 275 e 276.
Il problema del ponte.
Giuochi proposti 285-292.

LIVORNO
RAFFAELLO GIÙSTI, EDITORE
LIBRAIO-TIPOGRAFO
1907

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes, a Savona**, *Via Luigi Corsi, Villa Garroni.*

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 259, 275 e 276.

259. *Due montagne, alte l'una 1200* m. *e l'altra 2000* m., *si trovano in due isole vicine, e la distanza delle loro sommità è di 36* km. *Dalla sommità di una di esse si vede l'altra emergere esattamente sull'orizzonte.*

Da questi dati ricavare il raggio della terra, supposta sferica.

C. Ciamberlini.

Risoluzione. — Siano: A il vertice della montagna più alta; B quello dell'altra; C il centro e x il raggio terrestre espresso in *km*. La retta AB risulta tangente alla superficie terrestre, e quindi l'altezza del triangolo ABC rispetto al lato AB è x. Dalla nota formula

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{si ricava} \qquad x = \frac{2}{36}\sqrt{(x+19{,}6)(x-16.4)\,.\,17{,}6\,.\,18.4},$$

da cui

$$x' = 6374,74\ldots \qquad x'' = 102.06\ldots$$

Per interpretare queste soluzioni, entrambe positive, si osservi che il problema proposto si riduce al seguente: Descrivere una circonferenza tangente alla retta AB, e alle due circonferenze di centri A, B e di raggi *km*. 2 e *km*. 1.2. Ora si hanno due circonferenze che rispondono a tale questione. La minore è tangente ad AB in un punto compreso tra A e B, ma il suo raggio si allontana di molto da quello terrestre; la maggiore è tangente ad AB in un punto non compreso tra A e B, e il suo raggio (*km*. 6374,74...) si approssima molto a quello generalmente ammesso per il raggio terrestre.

Inviarono risoluzioni analoghe alla precedente i sigg. **Bongini** e **Costa G.**, R. I. T. di *Torino*; risoluzioni alquanto diverse i sigg. **Brenta**, R. I. T. di *Torino*, e **Cellini** di *Forlì*. — Fu inviata poi una risoluzione errata.

C. Ciamberlini.

275. *Una libreria ha tre piani e ciascuno può contenere 20 libri. I libri constano di 3 opere in 5 volumi ciascuna, 6 opere in 4 volumi e 7 opere in 3. Trovare in qual modo si debbono disporre i libri affinchè nessuna opera sia divisa.*

Risoluzione. — Indicando con x, y e z il numero delle opere, rispettivamente formate da 5, 4 e 3 volumi, che debbono porsi in uno stesso piano della libreria, dovrà essere

$$5x + 4y + 3z = 20. \tag{1}$$

Cerchiamo le soluzioni intere e non negative della (1).

Poniamo intanto:

$$5x + 4y = 20 - 3z = t$$

cioè

$$5x + 4y = t \quad (2) \qquad ; \qquad t + 3z = 20, \tag{3}$$

Risolvendo la (3) in numeri interi e non negativi, essendo

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

ed ammettendo l'equazione

$$t' + 3z' = 2$$

la sola soluzione intera e non negativa $t' = 2$ e $z' = 0$,

tutte le soluzioni intere e non negative della (3) saranno date dalle formule

$$t = 2 + 3m \quad ; \quad z = n \qquad (\text{con} \quad m + n = 6)$$

e quindi si ha il seguente prospetto:

	VALORI DI			
	m	n	t	z
1)	0	6	2	6
2)	1	5	5	5
3)	2	4	8	4
4)	3	3	11	3
5)	4	2	14	2
6)	5	1	17	1
7)	6	0	20	0

Risolviamo ora la (2) in numeri interi e non negativi e prima di tutto osserviamo che per tutti i valori di t del prospetto precedente, l'ultimo eccettuato, cioè $t = 20$, l'equazione (2) non

ONORANZE AL PROF. ULISSE DINI

La facoltà di scienze dell'Università di Pisa ha deliberato di porgere degno tributo di onore e d'affetto al suo decano, l'illustre prof. ULISSE DINI, senatore del Regno, nel quarantesimo anniversario della nomina di lui a professore; ed ha perciò pubblicato la seguente circolare, che sono lieto di portare a conoscenza dei lettori del " Supplemento al Periodico di Matematica ".

Pisa, gennaio 1907.

Chiarissimo Signore,

Il 16 ottobre 1907 il prof. ULISSE DINI, senatore del Regno, compirà il 40° anno dalla sua nomina a professore nell'Università di Pisa.

A tutti i cultori della scienza sono noti i grandi meriti di lui come matematico e come insegnante.

Questa Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, che si onora di averlo nel suo seno, ha pensato in tale occasione di rivolgersi a quanti furono o sono del Dini o colleghi o discepoli o ammiratori della sua opera, perchè vogliano associarsi a lei nel far degnamente onore al grande maestro.

Le invia pertanto una nota di sottoscrizione pregandola di voler aderire e raccogliere delle adesioni e delle offerte.

Con ossequio

Per la Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

La Commissione

Prof. MARIO CANAVARI, *Preside della Facoltà*
Prof. EUGENIO BERTINI
Prof. ONORATO NICOLETTI, *Segretario Cassiere.*

N.B. — Si prega di rimandare le note di sottoscrizione colle relative offerte non oltre il 30 aprile prossimo venturo all'indirizzo del prof. Onorato Nicoletti, Via S. Martino n. 3, p. 2°, Pisa.

Il " Supplemento al Periodico di Matematica " si associa con entusiasmo alla bella iniziativa, e fa caldo appello a tutti i cultori della matematica, perchè vogliano concorrere a rendere la manifestazione degna del grande scienziato che si vuole onorare.

Specialmente si rivolge agli innumerevoli professori ed ingegneri che in questi quarant'anni sono usciti dalla R. Università o dalla R. Scuola normale superiore di Pisa. Essi sono legione; e tutti, evocando le memorie vicine o lontane della vita di studenti, ricordano che il Dini non è soltanto un grande scienziato, ma anche un maestro incomparabile, di una attività a tutta prova, sempre animato dal fuoco sacro dell'entusiasmo per la sua scienza, entusiasmo che sa comunicare ai suoi allievi.

Io sono certo che da tutte le parti d'Italia e dell'estero, ove sono stati dispersi dalle vicende della vita e della carriera, gli scolari del Dini vorranno inviare il loro contributo, affinchè nel nome grande del maestro si possa istituire (come so essere nelle intenzioni dei promotori) qualche fondazione benefica a favore di studenti della facoltà che gli è sempre stata e gli è così cara, alla quale ha consacrato le forti energie del suo alto intelletto e del suo nobile cuore.

Ed egli, il buon maestro, sarà felice di vedere che in un giorno solenne, il plebiscito di affetto riconoscente e di venerazione, che a lui tributano i suoi scolari del passato e del presente si converte in un'opera che renderà caro ed amato il suo nome anche agli scolari dell'avvenire.

Coloro che desiderano maggiori informazioni e schiarimenti, possono chiederli ad uno qualunque dei componenti la commissione.

Le offerte che saranno inviate alla direzione del *Periodico di matematica* saranno trasmesse al Segretario-cassiere della commissione, e di esse verrà reso conto nel giornale.

G. Lazzeri.

EQUAZIONI

In questo capitolo non possi
zionali „ in generale, giacchè qu
luppato che col sussidio dell'alg
di alcune equazioni irrazionali cl
cazioni dell'algebra elementare.

In ciò che segue intenderemo
hanno le stesse radici reali, e ciò

Ammettiamo inoltre che $f_1(x)$
contengano fattori comuni.

Ciò premesso andiamo a stab

TEOREMA. — *La equazione*:

$$A^m ($$

è equivalente alla equazione:

$$A ($$

se m *è dispari, ed è equivalent*

$$A(x) = B($$

se m *è pari.*

Infatti sia α una radice r

$$A^r$$

deve essere anche

ed inversamente. Quando n

deve essere anche

$$A(\alpha) = B(\alpha)$$

ed inversamente.

COROLLARIO I. — *La*

$$A^{m-1} + A^m$$

con $m = 2k + 1$ *ha tutte*

Esempio. — La equa

ha tutte le sue radici

(1) Da' miei "Appunti di Al

Corollario II. — *La equazione* ($m = 2k$)

$$A^{2(k-1)} + A^{2(k-2)} B^2 + \ldots + A^2 B^{2(k-2)} + B^{2(k-1)} = 0, \qquad (5)$$

ha tutte le sue radici immaginarie.

2. Poniamo

$$A = \sqrt[m]{f_1}\,, \quad B = \sqrt[m]{f_2}\,,$$

ed allora da quanto precede resulta:

1°. Le equazioni

$$\sqrt[2k+1]{f_1} \pm \sqrt[2k+1]{f_2} = 0\,,$$

sono respettivamente equivalenti alle equazioni

$$f_1 \pm f_2 = 0.$$

2°. La equazione

$$\sqrt[2k]{f_1} - \sqrt[2k]{f_2} = 0$$

è equivalente alla equazione

$$f_1 - f_2 = 0.$$

3°. La equazione

$$\sqrt[2k]{f_1} + \sqrt[2k]{f_2} = 0$$

ha le sue radici immaginarie.

Dicendo *risolvente* la equazione razionale che ha le stesse radici reali di una equazione irrazionale, quanto precede si può anche enunciare:

La risolvente dell'equazione

$$\sqrt[2k+1]{f_1} + \sqrt[2k+1]{f_2} = 0, \qquad (I)$$

è l'equazione

$$f_1 + f_2 = 0. \qquad (II)$$

La risolvente della equazione

$$\sqrt[2k+1]{f_1} - \sqrt[2k+1]{f_2} = 0, \qquad (III)$$

è l'equazione

$$f_1 - f_2 = 0. \qquad (IV)$$

La risolvente della equazione

$$\sqrt[2k]{f_1} - \sqrt[2k]{f_2} = 0 \qquad (V)$$

è l'equazione

$$f_1 - f_2 = 0. \qquad (VI)$$

3. Le equazioni

$$\sum_1^n \pm \sqrt{f_1} = 0.$$

a) Lemma. — La equazione

$$f_1^{2k} - f_2 = 0 \qquad (6)$$

è la risolvente delle due equazioni

$$f_1 + \sqrt[2k]{f_2} = 0\,, \quad (7) \qquad f_1 - \sqrt[2k]{f_2} = 0 \qquad (8)$$

e se x_1 è una radice reale de
secondo che si avrà $f_1(x_1) <$

Da questo lemma si dedu

L'equazione

è la risolvente della equazione
secondo che respettivamente

Esempio. — Sia da risolv

$$ax + b -$$

La risolvente di questa è

$$(a^2 - \alpha)x^2 +$$

in cui supponiamo

$$(2ab - \beta)^2 -$$

Se x_1 è una radice di qu
biamo detto innanzi, la x_1 app
ossia $x_1 > -\frac{b}{a}$; e se in cam
zione

$$ax + b +$$

La risoluzione completa

saper paragonare un numer
di 2° grado, cosa già nota.

b) *Le equazioni*

$$\sqrt{f_1}$$

Le radici reali delle equa

$$\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} + \sqrt{f_3} = 0$$

sono le radici reali della eq

$$(\sqrt{f_1}$$

ossia

$$f_1 + f_2$$

e poichè la (9) non ha radic
le radici reali della (10); le
dell'altra

$$(f_1 + f_2$$

ossia le radici reali della

$$\Sigma f$$

che rendono

$$f_1$$

Osserviamo che una radi
mente

$$f_1(\alpha) > 0,$$

oppure

$$f_2(\alpha) < 0,$$

La cosa si dimostra facilmente, osservando che se per una radice reale α della (10) si avesse

$$f_1(\alpha) < 0\,,\ f_2(\alpha) > 0\,,\ f_3(\alpha) > 0,$$

oppure

$$f_1(\alpha) < 0\,,\ f_2(\alpha) < 0\,,\ f_3(\alpha) > 0,$$

il primo membro della (4) verrebbe ad esprimersi mediante la somma di quantità tutte essenzialmente positive, ciò che escluderebbe la realità di α.

S'intende bene che in tal caso la (5) mutasi nell'altra

$$f_1 + f_2 - f_3 > 0.$$

Analogamente a quanto si è detto per la (10) si può concludere che le radici reali della (12) sono le radici reali della equazione

$$\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2} + \sqrt{f_3} = 0, \text{ se rendono } f_1 - f_2 + f_3 < 0,$$

della equazione

$$-\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} + \sqrt{f_3} = 0 \text{ se rendono } -f_1 + f_2 + f_3 < 0.$$

Applicazione. — *Risolvere e discutere la equazione*

$$f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} - \sqrt{x-c},$$

in cui a > b > c.

La risolvente di questa equazione è

$$\Sigma(x-a)^2 - 2\Sigma(x-a)(x-b) = 0,$$

ossia

$$3x^2 - 2x\Sigma a - (\Sigma a^2 - 2\Sigma ab) = 0,$$

da cui

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{3}\left[\Sigma a \pm 2\sqrt{\tfrac{1}{3}\Sigma(a-b)^2}\right],$$

ciò che ci dice che la risolvente ha le sue radici reali.

Discussione. — Una radice x_i $(i = 1, 2)$ della risolvente apparterrà alla equazione proposta, se si avrà

$$x_i > a \quad \text{ed} \quad x_i < a + b - c,$$

oppure

$$x_i < c \quad \text{ed} \quad x_i > a + b - c.$$

Ora, poichè $f(a) = -(b-c)^2$ ed $f(a+b-c) = 4(a-c)(b-c)$, si vede subito che solo la radice maggiore soddisfa alle prime, mentre, perchè è $f(c) = -(a-b)^2$ ed $f(a+b-c) = 4(a-c)(b-c)$, si vede che le seconde non possono essere soddisfatte. In conclusione: la equazione proposta ammette solo la radice

$$x = \tfrac{1}{3}\left[\Sigma a + 2\sqrt{\tfrac{1}{3}\Sigma(a-b)^2}\right].$$

Osservazione. — Per la costruzione della risolvente delle equazioni del tipo $\sum_1^n \pm \sqrt{f_i} = 0$ conviene formarsi il quadro di tutti i fattori polinomi che entrano in essa, e questo, naturalmente, per saper determinare a quali equazioni debbono appartenere le sue radici.

La costruzione del suddetto quadro si ottiene facilmente così:

Per il caso di due radicali quadratici si hanno le equazioni

$$\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} = 0, \quad \sqrt{f_1} - \sqrt{f_2} = 0.$$

Si deducono da queste due quelle per il caso di tre radicali quadratici, aggiungendo e sottraendo dal primo membro di ciascuna di queste $\sqrt{f_3}$, e si ha

$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}=0\,,\quad \sqrt{f_1}-\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}=0,$$
$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}-\sqrt{f_3}=0\,,\quad \sqrt{f_1}-\sqrt{f_2}-\sqrt{f_3}=0.$$

Analogamente si opera sui primi membri di queste equazioni col radicale quadratico $\sqrt{f_4}$ per il caso di quattro radicali, e così via.

4. Equazioni con radicali cubici.

a) Le radici reali della equazione

$$\sqrt[3]{f_1}+\sqrt[3]{f_2}+\sqrt[3]{f_3}=0 \tag{VII}$$

sono le radici reali della equazione

$$(f_1+f_2+f_3)^3-27\,f_1f_2f_3=0. \tag{VIII}$$

Infatti si ha identicamente

$$2\,(\sum_1^3 f_1-3\sqrt[3]{f_1f_2f_3})=\sum_1^3\sqrt[3]{f_1}\,[(\sqrt[3]{f_1}-\sqrt[3]{f_2})^2+(\sqrt[3]{f_1}-\sqrt[3]{f_3})^2+(\sqrt[3]{f_2}-\sqrt[3]{f_3})^2],$$

da cui si trae che le radici reali della (VII) sono le radici reali della equazione

$$\sum_1^3 f_1-3\sqrt[3]{f_1f_2f_3}=0\,;$$

ma le radici reali di questa sono le radici reali dell'altra

$$(\sum_1^3 f_1)^3-27\,f_1f_2f_3=0,$$

epperò la cosa è dimostrata.

Osservazione. — La (VIII) vale l'altra

$$\sum_1^3 f_1^3-3\,\Sigma f_1^2f_2-21\,f_1f_2f_3=0.$$

Esercizio. — La risolvente della equazione

$$\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x+b}+\sqrt[3]{x+c}=0, \tag{14}$$

è

$$9\,(\Sigma a^2-\Sigma ab)\,x+(\Sigma a)^3-27\,abc=0,$$

epperò la (14) ha una sola radice, espressa da

$$x=\frac{(\Sigma a)^3-27\,abc}{9\,(\Sigma a^2-\Sigma ab)},$$

e questa radice sarà positiva o negativa respettivamente, secondo che

$$(\Sigma a^2)^3-27\,abc\lesseqgtr 0$$

ossia, secondo che

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\lesseqgtr 0.$$

b) Dalla identità

$$(\sum_1^3\sqrt[3]{f_1})^3-\sum_1^3 f_1=3\,(\sqrt[3]{f_1}+\sqrt[3]{f_2})\,(\sqrt[3]{f_1}+\sqrt[3]{f_3})\,(\sqrt[3]{f_2}+\sqrt[3]{f_3})$$

risulta che:

Le radici reali della equazione

$$(\sum_1^3 \sqrt[3]{f_i})^3 - \sum_1^3 f_i = 0 \tag{15}$$

sono anche le radici reali delle equazioni

$$f_1 + f_2 = 0\,,\ f_1 + f_3 = 0\,,\ f_2 + f_3 = 0 \tag{16}$$

e reciprocamente. D'altra parte le radici reali della (15) sono pure le radici reali dell'altra

$$\sum_1^3 \sqrt[3]{f_i} - \sqrt[3]{\Sigma f_i} = 0 \tag{17}$$

e reciprocamente — dunque le radici reali delle (16) sono le radici reali della (17) e reciprocamente.

La equazione

$$\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+b} + \sqrt[3]{x+c} - \sqrt[3]{3x+a+b+c} = 0$$

ha le radici

$$x_1 = -\frac{a+b}{2}, \qquad x_2 = -\frac{a+c}{2}, \qquad x_3 = -\frac{b+c}{2}.$$

G. Candido.

(Continua)

RELAZIONE DEL CONCORSO ANNUALE

(*Anno IX* — 1905-06)

Secondo le norme stabilite N. II anno IX, sono stati ammessi al concorso pel 1905-06 tutti gli studenti di scuole secondarie che hanno risoluto più di 24 fra le 98 quistioni proposte nel corso dell'anno. Essi sono i giovani indicati nel seguente elenco, ove accanto al nome di ciascuno si trova il numero complessivo delle quistioni che egli ha risolute, e fra parentesi il numero delle quistioni a concorso comprese fra le suddette.

1. **Scopinich**, R. I. T. di Venezia.	quist.	82 (4)	11. **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*.	quist.	54 (2)
2. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*.	„	76 (4)	12. **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*.	„	51 (1)
3. **Cernuschi**, R. I. T. di Torino.	„	76 (3)	13. **Jodi**, R. I. T. di *Modena*.	„	50 (1)
4. **La Spina**, R. I. T. di Catania.	„	74 (3)	14. **De Castro**, R. L. Beccaria di Milano.	„	40 (2)
5. **Pelosio**, R. I. T. di *Venezia*.	„	72 (3)	15. **Urbani**, R. I. T. di *Ancona*.	„	34 (1)
6. **Mosca**, R. I. T. di *Torino*.	„	68 (1)	16. **Marchisio**, R. L. di *Cuneo*.	„	31
7. **Brenta**, R. I. T. di *Torino*.	„	66 (3)	17. **Terracini**, R. L. Cavour di Torino.	„	30 (4)
8. **De Bei**, R. I. T. di *Venezia*.	„	59 (4)	18. **Castaldi**, R. I. T. di Firenze.	„	27 (1)
9. **Costa**, R. I. T. di *Torino*.	„	59 (1)	19. **Fortunato**, L. P. di *Caserta*.	„	25 (1)
10. **Bongini**, R. I. T. di *Torino*.	„	56 (1)	20. **Salonia**, L. P. di *Caserta*.	„	25

Tenuto conto della bontà e del numero delle risoluzioni è stato conferito il *Diploma d'Onore di 1° grado*, e il Premio Annuale al sig.

MARIO SCOPINICH, R. I. T. di *Venezia*.

e la

P

quis

1.
2.
3.
4.
5.
6.

pur
cir

col

fra

spe

e i

Trattò abbastanza bene l'argomento, cercando di generalizzare la quistione proposta, il sig.

DE CASTRO, R. L. di *Milano*

al quale fu inviato il premio promesso.

Incompleta fu la risoluzione del sig. Perez. (1)

C. CIAMBERLINI.

Risoluzione. — Sia ABC una posizione qualunque del triangolo mobile, e supponiamo che i lati AB, AC debbano rispettivamente rimaner tangenti ai cerchi fissi O_1, O_2, di raggi r_1, r_2. Se A'B'C' è il triangolo eguale ad esso, coi lati A'B', A'C' passanti rispettivamente per O_1, O_2 e paralleli ed egualmente diretti ad AB, AC la somma algebrica dei parallelogrammi BCC'B', CAA'C', ABB'A' è nulla; e quindi se a, b, c, d indicano i valori di BC, CA, AB e della distanza delle parallele BC, B'C', sarà nulla la somma algebrica dei prodotti ad, cr_1, br_2; e perciò d è costante.

Sia Ω l'altro punto d'incontro della circonferenza O_1O_2A' colla parallela a BC condotta per A'. L'angolo $O_2A'\Omega$ essendo costante, il punto Ω è un punto fisso. Ora la distanza della retta BC dal punto Ω è somma algebrica della distanza (costante) di Ω da B'C' (eguale all'altezza del triangolo ABC corrispondenti a BC) e della distanza d; perciò la retta BC inviluppa una circonferenza di centro Ω.

RISOLUZIONE DELLA 72ª QUISTIONE A CONCORSO

In ogni triangolo l'area del triangolo che ha per vertici i piedi delle mediane sta a quello che ha per vertici i piedi delle simediane, come il prodotto delle mediane sta al prodotto delle simediane.

R. VERCELLIN.

Di questa quistione sono pervenute solamente quattro risoluzioni dei sigg. **Bonaiuti**, R. I. T. di *Modena*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Longo** di *Napoli*; **E. N. Barisien** di *Parigi*.

Messa fuori concorso quella esaurientissima del sig. Barisien, rimangono tre risoluzioni, di cui quelle dei sigg.

CUTORE, R. I. T. di *Catania*, **LONGO** di *Napoli*

sono pressochè identiche e superiori a quella del sig. Bonaiuti; perciò il premio sarà assegnato al Cutore o al Longo, secondochè il primo estratto del R. Lotto di Roma, di sabato 16 febbraio 1906, sarà *pari* o *dispari*. Queste risoluzioni sono ottime; riproduciamo quella del sig. Longo. Anche quella del sig. Bonaiuti è buona, senonchè egli tralascia una parte importantissima della dimostrazione, e si limita ad asserire che l'area del tr. pedale del punto di Lemoine ha per espressione

$$\frac{2Sa^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)},$$

(1) Il sig. Perez considera il triangolo A'B'C' simile al dato, coi lati A'B', A'C' paralleli ad AB, AC e passanti rispettivamente per O_1, O_2 e coi vertici B', C' situati sulla retta BC; afferma poi (senza dimostrarlo) che la distanza del punto Ω dalla retta BC è costante.

la quale espressione poti
mente, e suggerita dal r

Risoluzione del sig. Longo

Chiamando M_a, M_b, M_c;
e simediane del triangolo AB

$$AM'_b =$$

quindi

$$AM'_b$$

Da ciò risulta che

$$\frac{AM'_bM'_c}{ABC} =$$

e similmente

$$\frac{BM'_cM'_a}{ABC} = \frac{c^2a^2}{(b^2+c^2)\,(b}$$

Sommando membro a me

$$\frac{ABC - M'_aM'_bM'_c}{ABC} = \frac{b}{}$$

da cui, dopo facili riduzioni,

$$\frac{M'_aM'_bM'_c}{M_aM_bM_c}$$

Ora abbiamo

$$\frac{m_a}{m'_a} = \frac{b^2+c^2}{2bc};$$

queste, moltiplicate membro

$$\frac{m_am_bm_c}{m'_am'_bm'_c}$$

e quindi, per la (1),

$$M_aM_bM_c : M'_a$$

RISOLUZIONI DELLE Q

784. 1°. *Risolvere l'eq*

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}$$

2°. *Se* A', B', C' *sono i p*
triangolo, colla circonferenza

$$A'B'C' = 4R^2 \cos A$$

Casi particolari.

1°. L'equazione data può scriversi:

$$1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}+a=0.$$

E, moltiplicando per $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$:

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x+\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x+\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+a \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x=0,$$

che, essendo $\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x+\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$, può scriversi:

$$2-\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x(1-a)=0,$$

da cui

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x=\frac{2}{1-a}. \tag{1}$$

E poichè è $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, si ha che $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$ sono le radici dell'equazione

$$z^2-z+\frac{2}{1-a}=0. \tag{2}$$

Poichè la (1) porta per necessità che dev'essere $a<1$, la (2) ha due variazioni; quindi le due radici, se son reali, son positive.

La condizione di realtà, essendo $\Delta=\frac{1}{4}-\frac{2}{1-a}$, è:

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{1-a}\geqslant 0.$$

E poichè è $1-a>0$, si ha: $a+7\leqslant 0$ donde $a\leqslant -7$, che è compatibile colla condizione precedente. Di più dovendo essere le radici positive della (2) non maggiori di 1, la loro semisomma sarà non maggiore di uno: ma poichè la semisomma delle radici della (2) è $\frac{1}{2}$, quest'ultima condizione è evidentemente soddisfatta. Rimane quindi la sola condizione $a\leqslant -7$.

Con questa ipotesi, si ha:

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{2}{1-a}}.$$

Risolvettero il sistema con questo metodo, o seguendo procedimenti simili, i sigg. **De Conz** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Brenta**, **Cernuschi**, **Bongini**, **Costa G.**, **Mosca**, R. I. T. di *Torino*; sig.ª **Fossa**, I. T. P. di *Ravenna*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Maracci**, R. I. T. di *Ancona*. Nessuno però condusse bene la discussione.

2°. *Risoluzione* del sig. **Iodi**, R. I. T. di *Modena*.

Se H_a, H_b, H_c sono i punti ortici del tr. ABC, i due triangoli $H_aH_bH_c$ e A'B'C' sono omotetici rispetto all'ortocentro H e il rapporto d'omotetia è $\frac{1}{2}$; ed è

$$\widehat{A'}=180^\circ-2\widehat{A};\ \widehat{B'}=180^\circ-2\widehat{B};\ \widehat{C'}=180^\circ-2\widehat{C}.$$

Quindi:

$$\overline{A'C'}=2R\operatorname{sen}2\widehat{B};\quad \overline{A'B'}=2R\operatorname{sen}2\widehat{C};\quad \overline{B'C'}=2R\operatorname{sen}2\widehat{A}.$$

Ed essendo

$$A'B'C'=\frac{\overline{A'C'}.\overline{A'B}.\overline{B'C'}}{4R},$$

si ha:

$$A'B'C'=\frac{8R^3}{4R}\operatorname{sen}2\widehat{B}\operatorname{sen}2\widehat{C}\operatorname{sen}2\widehat{A}=16R^2\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}\operatorname{sen}\widehat{A}\operatorname{sen}\widehat{B}\operatorname{sen}\widehat{C}=$$
$$=4R^2\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}(\operatorname{sen}2\widehat{A}+\operatorname{sen}2\widehat{B}+\operatorname{sen}2\widehat{C}).$$

Se il triangolo dato ABC, è rettangolo,
» » » » equilatero,

$$A'B'C' = 4R^2 \cos^2 60^0 . 3 \text{ sen } 60^0 =$$

Mandarono analoghe risoluzioni i sigg.
Risolvettero anche il problema, senza t
i sigg. **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catan*
pinich, R. I. T. di *Venezia*.

785. *Sia* ABCD *un quadrilatero ins*
e DC *prolungati si seghino in* F, *e gli altri*
colo descritto su EF *come diametro intersec*

Risoluzione.

Siano O, R il centro e il raggio del cer
e G il punto medio di EF. Si ha

$$2\,\overline{OG}^2 + 2\,\overline{EG}^2 =$$

Ma (v. per es. Baltzer, *Plan.*, pag. 17

$$\overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 = \overline{E}$$

perciò

$$\overline{OG}^2 = \overline{EG}^2$$

Questa relazione esprime la proposizior
Inviarono risoluzioni analoghe alla pr
Torino; **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Ver*
con una dimostrazione che non è completa.
sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*.

788. *In una semi-circonferenza di d*
CD $= 2x$, *parallela al diametro, in modo ci*
perimetro dato $2p$. *Discutere il problema e*
soddisfano alle condizioni poste, quello di
regolare.

Risoluzione.

Posto $\overline{AC} = \overline{BD} = y$, per i dati del pro

$$x + y + r$$

ed essendo y un cateto triangolo rettangolo
ipotenusa $2r$, abbiamo:

$$y^2 = 2r\,(r$$

Eliminando y fra le (1), (2) si ottiene l

$$f(x) = x^2 - 2x\,(p - 2r) +$$

dalla quale si ha

$$x = p - 2r \pm \sqrt{}$$

e, per la (1),

$$y = r \mp \sqrt{r\,(5r}$$

Discussione. — Poichè $2x$ è la misura
diametro $2r$, dovrà essere $x \leqslant r$; inoltre pe

Se è $p - r \leqq r$ deve e
» $p - r \geqq r$ »

Si ha

$$f(0) = p^2 - 2pr -$$
$$f(p - r) = 2r(p - 2r)$$
$$f(r) = (p - 2r)^2$$
$$\Delta = r(5r - 2p)$$
$$\Sigma = p - 2r.$$

1°. Se è $p - r < r$, cioè p
$p - r(1 - \sqrt{2}) > 0$, $p - r(1$
il problema non ha soluzioni,
2°. Se è $p - r = r$, cioè
luzione limite ($x = r$, $y = 0$),
3°. Se è $p - r > r$, cioè
zione ordinaria quando sia f
invece $p = r(1 + \sqrt{2})$ abbia
zione limite ($x = 0$, $y = r\sqrt{}$
rettangolo isoscele che ha p
Per avere due soluzioni

$$f(0$$

$$0 <$$

Poichè i valori notevol

le (α) si riducono alla con

Nel caso in cui sia p

questo caso p acquista il
si riduce al semi-esagono
Riassumendo, si ha i

$$\begin{cases} 0 < p < 2r. \\ p = 2r. \\ 2r < p < r(\\ p = r(\\ r(1 + \sqrt{2}) < p < \frac{5r}{2} \\ p = \frac{5r}{2} \\ \frac{5r}{2} < p \ldots \end{cases}$$

I sigg. **Cutore** e **La**
buone e con discussio
vedere, R. I. T. di *Mes*
di *Torino*. Il sig. **Sco**
geometrica del trapez
trigonometria e così
lunghissima per la
gnori **Brenta** e **Cernus**
nezia; **Jodi**, R. I. T.

789. *Dimostrare l'identità:*

$$\sum_{r=1}^{r=n}\binom{m-r}{n-r}=\sum_{r=1}^{r=}$$

Risoluzione del sig. **Mosca**, R. I. T.

L'identità da dimostrare si può s

$$\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-2}{n-2}+\binom{m-3}{n-3}+\binom{m}{n}$$

$$+2\binom{m-3}{n-2}+3\Big($$

Osservando che è

$$\binom{m-1}{n-1}=\binom{m-2}{n-1}+\binom{m-2}{n-2}$$

il 1° membro dell'eguaglianza data p

$$\binom{m-2}{n-1}+2\binom{m-2}{n-2}+\binom{m-3}{n-3}$$

$$\binom{m-2}{n-1}+2\binom{m-3}{n-2}+3\binom{m-}{n-}$$

$$\binom{m-2}{n-1}+2\binom{m-3}{n-2}+3\binom{m-}{n-}$$

. . . . . .

$$\binom{m-2}{n-1}+2\binom{m-3}{n-2}+3\binom{m-}{n-}$$

Le altre risoluzioni pervenuteci e

793. *Risolvere l'equazione*

$$\left(\frac{16}{5}\right)^{x^3-5}$$

L'equazione come fu stampata n poteva riconoscere che nessun valore r

l'intenzione del proponente essa avev

Così modificata è stata ben risolu la risoluzione.

Risoluzione del sig. **Semenza** del I

L'equazione scritta deve contener

Probabilmente doveva essere:

$$8\left(\frac{2}{5}\right)^{x^3-}$$

Allora si può scrivere

$$2^{x^3-5x^2+3x+}$$

equazione che è soddisfatta solo quar

$$x^3-5x^2$$

dalla quale si hanno le subito le radi

$$x_1=$$

$$x_2=$$

$$x_3=$$

Altre risoluzioni del sig. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*, il quale corregge l'errore e risolve esattamente la quistione; ed i sigg. **Bongini** e **G. Costa**, R. I. T. di *Torino*, i quali inviarono una risoluzione inesatta. A. Bassi.

795. *In ogni quadrangolo inscrittibile, le proiezioni ortogonali del punto d'incontro delle diagonali interne sui lati sono vertici d'un quadrangolo circoscrittibile od un cerchio, il cui diametro è quarto proporzionale dopo il raggio del cerchio circoscritto, un lato e la distanza del lato opposto dal punto d'incontro delle diagonali.*

R. Vercellin.

Risoluzione.

Siano rispettivamente A', B', C', D' le proiezioni ortogonali del punto L d'incontro delle diagonali AC, BD d'un quadrangolo inscrittibile ABCD sui lati $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Risulta subito che le rette A'L, B'L,... bisecano gli angoli A', B',..., poichè è, ad esempio

$$B'\widehat{A'}L = B'\widehat{B}L = C\widehat{B}D = C\widehat{A}D = L\widehat{A}D' = L\widehat{A'}D';$$

ne viene che A'B'C'D' è circoscrittibile a una circonferenza di centro L.

Ora abbiamo

$$a \,.\, LC' = c \,.\, LA' = b \,.\, LD' = d \,.\, LB' = m^2 \qquad (1)$$

poichè i triangoli ALB, CLD; BLC, ALD sono due a due simili, ed è inoltre

$$a : b = \text{sen}\, A\widehat{C}B : \text{sen}\, C\widehat{A}B = \text{sen}\, A\widehat{D}L : \text{sen}\, C\widehat{D}L = LD' : LC'.$$

Detto ρ il raggio del cerchio inscritto al quadrangolo A'B'C'D', è

$$\rho = LB' \,\text{sen}\, C'\widehat{B'}L = LB' \,\text{sen}\, A\widehat{C}D,$$

e siccome

$$LB' = \frac{m^2}{d}; \qquad \text{sen}\, A\widehat{C}D = \frac{d \,\text{sen}\, B}{AC} = \frac{d}{2R},$$

ne viene

$$2\rho \,.\, R = m^2, \qquad \text{c. v. d.}$$

Di questa quistione è pervenuta una sola risoluzione del sig. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*. Egli però sbaglia chiamando 2R il *raggio* del cerchio circoscritto, mentre avrebbe dovuto dire *diametro*, quindi erroneamente dichiara che nell'enunciato del teorema è incorso un errore di svista.

R. Vercellin.

798. *Risolvere il sistema*

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \end{array} \begin{cases} x + \sqrt{xy} + y = a \\ x^2 + xy + y^2 = b. \end{cases}$$

E. De Conz.

Risoluzione del proponente leggermente modificata.

Posto $x + y = u$, $\sqrt{xy} = v$ il sistema dato si trasforma nell'altro equivalente

$$\begin{cases} u + v = a \\ u^2 - v^2 = b \end{cases} \qquad (1)$$

da cui

$$\begin{cases} u + v = a \\ u - v = \dfrac{b}{a} \end{cases} \qquad (2)$$

equivalente al precedente per a diverso da zero.

Il sistema (2) ha la soluzione:

$$u = \frac{a^2 + b}{2a} \qquad v = \frac{a^2 - b}{2a}$$

e quindi le soluzioni del dato saranno quelle del sistema

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{a^2 + b}{2a} \\ xy = \left(\dfrac{a^2 - b}{2a}\right)^2 \end{cases} \tag{3}$$

le quali sono offerte dalle radici dell'equazione di 2° grado in z:

$$z^2 - \frac{a^2 + b}{2a} z + \left(\frac{a^2 - b}{2a}\right)^2 = 0,$$

ossia

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a^2 + b}{4a} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + b)^2 - 4(a^2 - b)^2}{16a^2}} = \frac{a^2 + b \pm \sqrt{-3b^2 + 10a^2b - 3a^4}}{4a}.$$

Se $a = 0$ e b è diverso da zero, il sistema non ha soluzioni.

Se $a = 0$ e $b = 0$, soddisfa il sistema qualunque coppia di numeri uguali in valore assoluto e di segni contrari e la coppia (0, 0).

Se a è diverso da zero, per l'esistenza di soluzioni dovrà essere:

$$-3b^2 + 10a^2b - 3a^4 \geqslant 0$$

ossia

$$3b^2 - 10a^2b + 3a^4 = (3b - a^2)(b - 3a^2) \leqslant 0$$

o, infine,

$$\frac{a^2}{3} \leqslant b \leqslant 3a^2.$$

Al segno d'uguaglianza corrisponde una soluzione doppia del sistema.

A. Bassi.

Altre risoluzioni dei sigg. **Barbarino, Cutore e Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Bassi e Bonomi**, R. L. Beccaria, **Lorenz e Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Bitossi** di *Forlì*; **Bonaiuti**, R. I. T. di *Modena*; **Bongini e G. Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Brusoni**, R. I. T. e **Levi**, R. L. di *Venezia*; **Cellitti**, R. I. T. e **Perelli** di *Roma*; **Civieri e Tevarollo**, R. I. T. di *Padova*; **Corrado**, R. L. Minghetti di *Bologna*; **Ferrari** di *Pavia*; **Ferrari e Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Frediani e Romagnoli**, R. I. T. di *Livorno*; **Garotti**, L. P. di *Cremona*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Mancia**, I. T. di *Spoleto*; **Manzi e Paribelli**, L. P. di *Domodossola*; **Marangio**, R. L. di *Aquila*; **Micheletti**, R. L. di *Verona*; **Moreau**, Badia Fiesolana di *Firenze*; **Morocutti-Verso**, R. Scuola Superiore Navale di *Genova*; **Napolitano**, R. I. T. e **Salonia**, L. di *Caserta*; **Piaucich**, L. P. di *Portoré*; **Tuvola**, R. I. T. di *Mantova*.

A. Bassi.

QUISTIONI DA RISOLVERE

811. In un trapezio isoscele il quadrato della diagonale è equivalente alla somma del rettangolo delle basi e del quadrato di uno dei lati eguali.

812. Sopra una circonferenza di diametro AB $= 2r$ determinare un punto P in modo che le distanze di P da AB, da A e da B abbiano una data somma k.

G. Cardoso-Laynes.

813. Risolvere l'equazioni

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0;$$
$$a(a+x)(a+2x)(a+3x)=b(b+x)(b+2x)(b+3x);$$
$$x(x+a)(x+b)(x+a+b)+h=0$$
$$x^n-x^{-n}=3(1+x^{-n}).$$

A. Bassi.

814. Risolvere l'equazione

$$x^{x^x+4}+x^x(x^2+1)+x=278.$$

E.-N. Barisien.

815. Dimostrare che nell'equazione

$$x^3+bx^2+cx+\frac{4bc-b^3}{8}=0$$

una radice è uguale alla somma delle altre due.

S. Catania.

816. Risolvere l'equazione

$$(x^2+2\alpha x+\beta)(x^2+\beta)^3=3\alpha^4x^4+(x^2+3\alpha x+\beta)(x^2-2x+\beta)^2.$$

817. Dimostrare che l'equazione

$$x^2=y^2+z^n$$

ammette una infinità di soluzioni in numeri interi, sapendo che $x+y$ è una potenza n^{ma}.

G. Candido.

818. Se su due lati del triangolo si prendono due punti (uno per ciascun lato) allineati col baricentro, il rettangolo dei due segmenti che essi determinano col vertice comune ai due lati su cui stanno, è equivalente alla somma dei rettangoli di ciascuno di essi e dell'altro segmento determinato sull'altro lato.

A. Borio.

819. In ogni triangolo, le congiungenti, i vertici coi punti medii delle semicirconferenze costruite sui lati opposti come diametri, e situate tutte esternamente o tutte internamente rispetto al triangolo, concorrono in un punto.

820. Le perpendicolari condotte ai lati d'un triangolo nei punti in cui essi lati (non prolungati) toccano i circoli exinscritti, concorrono in un punto. Determinare la distanza di esso punto dal circoncentro.

R. Vercellin.

N. B. — Le risoluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 5 marzo 1907.

Si pregano vivamente i signori risolutori di *inviare ogni quistione o giuoco in foglio separato, scrivendo su ciascuno il proprio nome e l'istituto al quale essi appartengono.*

Le lettere non francate o insufficientemente francate vengono respinte. Ricordiamo che i manoscritti aperti, il cui peso non superi 50 grammi, devono esser francati con cent. 20 e non con cent. 15 come le lettere.

Errata-Corrige. — Ai risolutori delle quist. 709-715 si aggiunga il sig. **Costa**, R. I. T. di *Torino*; a quelli della quist. 741 si aggiunga il sig. **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; a quelli delle quistioni 761-765 si aggiunga il sig. **Iodi**, R. I. T. di *Modena*.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 gennaio 1907

avrà più di una soluzione intera e non negativa perchè è $t < 5.4$; solo per $t = 20$ si potranno avere due soluzioni.

a) Per $t = 2$ l'equazione $5x + 4y = 2$ non ha alcuna soluzione intera e non negativa
b) „ $t = 5$ „ $5x + 4y = 5$ ammette la soluzione $x = 1,\ y = 0$
c) „ $t = 8$ „ $5x + 4y = 8$ „ „ $x = 0,\ y = 2$
d) „ $t = 11$ „ $5x + 4y = 11$ non ha alcuna soluzione intera e non negativa
e) „ $t = 14$ „ $5x + 4y = 14$ ammette la soluzione $x = 2,\ y = 1$
f) „ $t = 17$ „ $5x + 4y = 17$ „ „ $x = 1,\ y = 3$
g) „ $t = 20$ „ $5x + 4y = 20$ „ le soluzioni $x = 4,\ y = 0$, e $x = 0,\ y = 5$.

Combinando questi ultimi risultati con quelli ottenuti precedentemente per i valori di z, le soluzioni intere e non negative della (1) sono date dal seguente prospetto:

	VALORE DI		
	x	y	z
1)	1	0	5
2)	0	2	4
3)	2	1	2
4)	1	3	1
5)	4	0	0
6)	0	5	0

Queste 6 soluzioni ci mostrano come si possano disporre i libri nei singoli piani della libreria: per la natura del problema però bisogna combinarle in modo che la somma dei tre valori di x sia 3 (perchè tre sono le opere composte di 5 volumi), quelle dei tre valori di y sia 6 e quella dei tre valori di z sia 7 e quindi i soli gruppi di soluzioni accettabili saranno i seguenti: (*V. ultimo prospetto*),

2), 3) e 4) ; 1), 3) e 6) ; 1), 4) e 4),

cioè i libri potranno disporsi nella libreria in uno dei seguenti tre modi:

	(I)				(II)				(III)			
	Opere di volumi			Numero totale dei volumi	Opere di volumi			Numero totale dei volumi	Opere di volumi			Numero totale dei volumi
	5	4	3		5	4	3		5	4	3	
1° piano	0	2	4	$2\times4+4\times3=20$	1	0	5	$1\times5+5\times3=20$	1	0	5	$1\times5+5\times3=20$
2° „	2	1	2	$2\times5+1\times4+2\times3=20$	2	1	2	$2\times5+1\times4+2\times3=20$	1	3	1	$1\times5+3\times4+1\times3=20$
3° „	1	3	1	$1\times5+3\times4+1\times3=20$	0	5	0	$5\times4=20$	1	3	1	$1\times5+3\times4+1\times3=20$
Complessi nei tre piani	3	6	7	60	3	6	7	60	3	6	7	60

Se si volessero considerare come soluzioni diverse quelle che si otterrebbero scambiando i volumi che vanno posti in un palchetto della libreria con quelli che vanno in un altro, da ciascuna delle 9 soluzioni se ne avrebbero $|\underline{3}$ (permutando i tre *piani* in tutti i modi possibili) e quindi in tutto sarebbero $3 . |\underline{3} = 3 . 6 = 18$.

Tenendo conto del modo di disporre le varie opere nei palchi della libreria (supponendo che lumi di ciascuna opera sieno riuniti e disposti ordinatamente), siccome per ciascuna delle tre soluzioni fondamentali trovate si ha che in un palco della libreria vi sono 6 opere e 5 in ciascuno degli altri due, da ciascuna soluzione ne avremo $|\underline{6} . (|\underline{5})^2 = 720 . 120^2 = 10368000$ e quindi complessivamente avremo 10368000×18 soluzioni, cioè 186624000.

Inviarono risoluzioni *complete* i sigg. **Cellini** di *Forlì* e **Yogna**, R. I. T. di *Venezia*; *incomplete* i sigg. **Barberino** e **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Belvedere** R. I. T. di *Messina*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Bitossi** di *Forlì*; **Borino** di *Palermo*; **Carissimo**, L. del Coll. Nazareno di *Roma*; **Ferra** i di *Pavia*; **Ferri B.**, R. L. di *Arezzo*; **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*; **Gavotti** di *Cremona*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Goglia**, L. P. di *Caserta*; **Lombardi** e **Salonia**, R. L. di *Salerno*; **Micheletti**, R. L. di *Verona*; **Ricci**, *Coll. della Badia Fiesolana* (*Firenze*); **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Ventola**, R. L. di *Fermo*.
Oltre a queste *due* risoluzioni errate. (G. C.-L.)

276. *Un ragazzo faceva pascolare un piccolo gregge; un suo compagno avendogli domandato quante pecore avesse, egli per burla rispose: se io avessi 6 volte, più $\frac{1}{2}$, più $\frac{3}{4}$, più $\frac{3}{8}$ il numero delle pecore che possiedo e te pure, avrei in tutto 100* bestie *da custodire. Quante pecore aveva?* ***

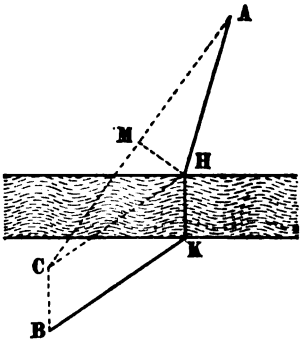
Risoluzione. — Indicando con x il numero delle pecore, si ha l'equazione

$$6x + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{8}x + 1 = 100,$$

che ridotta a forma intiera diviene $99x = 1188$ e quindi $x = 12$. Quel pastorello aveva **12** pecore.

Inviarono risoluzioni tutte analoghe a quella pubblicata, i sigg. **Acerbi**, L. P. di *Desenzano*; **Barberino** e **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Bitossi** e **Cellini** di *Forlì*; **Borino**, di *Palermo*; **Bottari** di *Vasto*; **Brusoni**, **Garbelotto** e **Jogna**, R. I. T. e **Levi**, R. L. Polo di *Venezia*; **Carissimo**, Coll. Nazareno di *Roma*; **Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*; **Cecere**, L. della *Badia di Cava* (Salerno); **D'Angelo** e **Marangio**, R. L. di *Aquila*; **De Caro** e **Lombardi**, R. L. di *Salerno*; **Ferrari, V.** R. L. di *Ancona*; **Ferrari F.** di *Pavia*; **Ferri A.** e **B.**, R. L. di

Arezzo; **Gavotti** di *Cremona*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Goglia** e **Salonia**, L. P. e **Pellegrino**, R. S. T. di *Caserta*; **Manzi** e **Paribelli**, L. P. di *Domodossola*; **Micheletti**, R. L. di *Verona*; **Pardo** di *Palermo*; **Pianciolch**, Coll. S. Giuseppe di *Porto-Re* (Croazia); **Redi-Bonaiuti**, R. I. T. di *Modena*; **Ricci**, Coll. della *Badia Fiesolana* (Firenze); **Satriano**, R. L. di *Benevento*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Venteia**, R. L. di *Fermo*; sig.ª **Villani**, R. I. T. di *Pavia*. (G. C.-L.)



IL PROBLEMA DEL PONTE

Un fiume il cui corso è rettilineo nella parte considerata, passa per due paesi A e B, da esso disegualmente distanti. Come si può costruire un ponte perpendicolarmente al fiume, egualmente distante dai due paesi?

Costruzione. — Da B conduciamo un segmento BC perpendicolare alla direzione del fiume ed eguale alla larghezza del fiume stesso; uniamo C con A e conduciamo l'asse MH del segmento ottenuto; il punto H ove questo incontra la riva del fiume ci rappresenterà la testata del ponte verso il paese A.

Dimostrazione. — Sia la KH il segmento che rappresenta il ponte, uniamo K con B ed H con A e con C; il quadrilatero BCHK, avendo due lati opposti eguali e paralleli, è un ▱ e quindi si ha BK = CH. Dall'eguaglianza dei triangoli rettangoli CHM e MHA si ha CH = HA e quindi è BK = HA. *c. d. d.*

GIUOCHI PROPOSTI.

285. Fabbricami una corona di sessanta mine — disse un antico re ad un tale — mescolandovi opportunamente oro, rame, stagno e ferro; l'oro ed il rame formino $\frac{2}{3}$ della corona, l'oro e lo stagno i $\frac{2}{5}$, l'oro e il ferro i $\frac{4}{7}$; orbene, dimmi esattamente la quantità d'oro, di rame, di stagno e di ferro che devi prendere.

286. A e B sono due città distanti d km; un battello parte da A ad ore p ed arriva in B ad ore a; un altro battello parte da B ad ore p' dello stesso giorno ed arriva ad A ad ore a'. A quale ora e a quale distanza da A i due battelli s'incrociano? — Discussione.

(In particolare porre $p = 6$, $a = 18$, $p' = 12$, $a' = 17$; $d = 93{,}75$).

287. Dato un triangolo isoscele costruirne un altro che abbia lo stesso perimetro e la stessa area.

288. Determinare un triangolo rettangolo i cui lati sieno misurati da numeri intieri ed inoltre l'area ed il perimetro siano espressi dallo stesso numero.

289. Determinare un triangolo che abbia i lati misurati da tre numeri consecutivi e l'angolo maggiore sia doppio del minore.

290. Determinare un triang. sapendo che le misure dei suoi lati sono tre num. int. consecutivi e che l'area è espressa da un numero doppio (oppure *metà*) di quello che esprime il perimetro.

291. Tre grandi italiani, un poeta, un artista ed uno scienziato vissero rispettivamente 56, 89 e 78 anni: quando nacque lo scienziato, l'artista era morto da un anno e mancava soltanto un anno a festeggiare il 3º centenario della nascita del poeta. Dire quali sieno questi tre grandi, sapendo anche che dal principio dell'E. V. alla nascita del poeta passarono 1000 anni più che dalla morte dello scienziato ai nostri giorni.

292. In un collegio i convittori generalmente pagano 82 lire di retta mensile ciascuno; ma due fratelli pagano complessivamente L. 155. Se in quest'anno ogni mese il collegio riscuote L. 4073, quanti convittori ha? *(da varie raccolte)*

Le risoluzioni si accettano fino al 5 marzo p. v.

Recentissima pubblicazione:

PROF. DOTT. ALFREDO BASSI

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI PIANI

NORME ED ESEMPI

Un volume in-8º piccolo — Lire **4**.

Il volume sarà spedito franco di porto a chi rimetterà relativo Vaglia alla Libreria RAFFAELLO GIUSTI in Livorno.

ANNO X — FEBBRAIO 1907 — FASC. IV

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - A. BASSI. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI. - R. VERCELLIN.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al Periodico di Matematica

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Equazioni irrazionali. (G. CANDIDO.) *(continuaz. e fine v. fasc. prec.)*

Un problema di calcolo combinatorio. (G. CARDOSO-LAYNES.)

75ª quistione a concorso. (R. VERCELLIN.)

Risoluzione della 70ª quistione a concorso.

Risoluzioni delle quistioni 794, 796, 797, e 799.

Quistioni da risolvere 821-830.

Copertina:

Spiegazione dei giuochi 266, 274, 278, 279 e 280.

Giuochi proposti 293-300.

LIVORNO

RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE

LIBRAIO-TIPOGRAFO

1907

MATEMATICA RIC

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, rivolgersi :

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes, a Savona,**

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 266, 2

266. *Un individuo comprò un certo numero di co dette le rimanenti a mezza lira l'una più di ciò che le ave Si domanda quante colombe aveva comperato.*

Risoluzione del sig. **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino.*

Indicando con x il numero delle colombe che quel t problema, sarà evidentemente:

$$(x-2)\left(\frac{35}{x}+\frac{1}{2}\right) =$$

ossia:

$$x^2-4x-140=0 \qquad \text{da cui :}$$

e, tralasciando la soluzione negativa, che in questo cas

Altre risoluzioni dei sigg. **Belvedere** e **Perez**, R. I R. I. T. di *Torino*; **Cellini** di *Forlì*; **Lombardi**, R. L. Tas **Satriano** e **Zanchelli**, R. L. di *Benevento.*

274. *Trovare un numero di tre cifre nel qua tava parte del numero rappresentato dalle altre due cifre l'ottava parte del numero rappresentato dalle altre due*

Risoluzione.

Se $N = 100x + 10y + z$ è il numero cercato, dov sarà

$$N = 100x + 8x$$

Inoltre dovendo essere

$$8z = 10x +$$

sarà

$$N = 10(10x + y) + z =$$

e quindi

$$108x = 81z, \qquad \text{cioè}$$

da cui si ha

$$x = 3m, \qquad z = 4m$$

Ma poichè è $x < 10$, $z < 10$, deve essere $m \leq$

(per $m = 1$) $\quad x_1 = 3, \quad z_1 = 4$;

Nel 1° caso per la (1), è $\quad 10y + z = 24$ e q

" 2° " " " $= 48$

I due numeri che soddisfano alle condizioni p

Inviarono risoluzioni i predetti sigg. **Belvedere racci, Perez, Satriano** e **Zanchelli**, ed i sigg. **Brenta,**

278. *In quanti modi diversi si possono dis*

1ª Risoluzione.

Siccome si tratta di vedere in quanti modi si p ciascuno, per la formula (2) della nota " *Un prob* fascicolo (pag. 53), indicando con x il numero c

$$x = \frac{4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.}{(\ 4}$$

2ª Risoluzione dei sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I

Una sola carrozza a 4 posti si può empire

Considerato uno qualunque di questi grup tranno disporre in $\binom{8}{4} = 70$ modi e per ciasch occupare la 3ª carrozza. In tutto quindi si hanno eguali. Se noi ne consideriamo uno; ad esso sa i gruppi nelle tre carrozze, cioè se ne otterran rozze, di 4 posti l'una, si possono disporre in

Le altre 16 *risoluzioni inviateci erano tutt*

EQUAZIONI IRRAZIONALI [1]

(Continuaz. e fine v. fasc. prec.)

---

5. A quanto abbiamo detto innanzi sulla risoluzione delle " equazioni irrazionali " vogliamo aggiungere che talvolta si può ottenere la risoluzione di un'equazione per mezzo dell'impiego di un'*incognita ausiliaria*, come apparisce dal seguente esempio.

Sia da risolvere la equazione

$$m\sqrt[k]{(a+x)^2}+p\sqrt[k]{(a-x)^2}+q\sqrt[k]{a^2-x^2}=0. \qquad (1)$$

Poichè la (1) non è verificata da $x=a$ ed $x=-a$, essa è equivalente all'altra

$$m\sqrt[k]{\frac{a+x}{a-x}}+p\sqrt[k]{\frac{a-x}{a+x}}+q=0, \qquad (2)$$

e ponendo $\sqrt[k]{\frac{a+x}{a-x}}=y$, la (2) diviene

$$my+p\,.\,\frac{1}{y}+q=0,$$

da cui

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\}=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4mp}}{2m},$$

e poichè

$$\frac{a+x}{a-x}=y^k,$$

si avrà

$$x=a\,\frac{y^k-1}{y^k+1}.$$

Esercizi e note.

6. *Sia da risolvere la equazione*

$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}-\sqrt{f_4}=0. \qquad (1)$$

La sua risolvente è

$$(\Sigma f_i^2-2\,\Sigma f_i f_h)^2-64\,f_1f_2f_3f_4=0, \qquad (i,\,h=1,\,2,\,3,\,4) \qquad (2)$$

---

[1] Da' miei "Appunti di Algebra ".

e possiamo dedurla o mediante la moltiplicazione, convenientemente fatta, dei primi membri delle otto equazioni

$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}+\sqrt{f_4}=0, \qquad (a)$$
$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}-\sqrt{f_4}=0, \qquad (b)$$
$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}-\sqrt{f_3}+\sqrt{f_4}=0, \qquad (c)$$
$$\sqrt{f_1}-\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}+\sqrt{f_4}=0, \qquad (d)$$
$$-\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}+\sqrt{f_4}=0, \qquad (e)$$
$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}-\sqrt{f_3}-\sqrt{f_4}=0, \qquad (f)$$
$$\sqrt{f_1}-\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}-\sqrt{f_4}=0, \qquad (g)$$
$$\sqrt{f_1}-\sqrt{f_2}-\sqrt{f_3}+\sqrt{f_4}=0, \qquad (h)$$

o come segue; mediante successive elevazioni a potenza:

Si ha dalla (1)

$$(\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2})^2=(\sqrt{f_3}-\sqrt{f_4})^2,$$

ossia

$$f_1+f_2-f_3-f_4=-\sqrt{4f_1f_2}-\sqrt{4f_3f_4}, \qquad (\alpha)$$

e nuovamente elevando a quadrato

$$(f_1+f_2-f_3-f_4)^2-4f_1f_2-4f_3f_4=+2\sqrt{16f_1f_2f_3f_4},$$

da cui finalmente

$$[(f_1+f_2-f_3-f_4)^2-4f_1f_2-4f_3f_4]^2-64f_1f_2f_3f_4=0,$$

ossia, come era stato enunciato

$$(\Sigma f_i^2-2\,\Sigma f_if_h)^2-64f_1f_2f_3f_4=0. \qquad (i,\,h=1,2,3,4)$$

Per procedere alla discussione della (1), osserviamo subito che nella sua risolvente entrano una quaterna ed una terna di equazioni, nella prima delle quali i primi membri differiscono solamente per un segno e sono (b), (c), (d), (e), nella seconda i primi membri differiscono per due segni e sono (f), (g), (h). Basta stabilire le condizioni di appartenenza delle radici reali della (2) ad una di ciascuna quaterna. Prendiamo la equazione

$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}-\sqrt{f_4}=0.$$

Le radici reali di questa sono le radici reali dell'altra

$$(\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}+\sqrt{f_3}-\sqrt{f_4})\,\Sigma\sqrt{f_i}=0,$$

ossia

$$f_1+f_2+f_3-f_4+2\sqrt{f_2f_3}+2\sqrt{f_3f_1}+2\sqrt{f_1f_2}=0,$$

da cui si vede che affinchè una radice reale della risolvente verifichi questa e reciprocamente, si deve avere

$$f_1+f_2+f_3-f_4<0.$$

Le condizioni analoghe si stabiliscono per le altre equazioni dello stesso tipo.

Prendiamo ora la equazione

$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}-\sqrt{f_3}-\sqrt{f_4}=0.$$

Analogamente le radici reali di questa sono le radici reali dell'altra

$$(\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}-\sqrt{f_3}-\sqrt{f_4})\,\Sigma\sqrt{f_1}=0$$

ossia

$$(f_1+f_2-f_3-f_4)+2\sqrt{f_1f_2}-2\sqrt{f_3f_4}=0$$

e le radici reali della risolvente sono le radici reali di questa e reciprocamente, purchè si abbia

$$(f_1+f_2-f_3-f_4)^2+4f_1f_2-4f_3f_4<0.$$

Analoghe condizioni di appartenenza si stabiliscono per le equazioni g ed h.

Diamo della risoluzione della equazione (1) una

Applicazione. — *Risolvere e discutere la equazione*

$$\sqrt[4]{f_1}+\sqrt[4]{f_2}-\sqrt[4]{f_3}=0. \qquad (\mu)$$

Ponendo la (μ) sotto la forma

$$\sqrt{\sqrt{f_1}}+\sqrt{\sqrt{f_2}}-\sqrt{\sqrt{f_3}}=0,$$

si ha la *sub-risolvente*

$$\Sigma f_i-2\,\Sigma\sqrt{f_if_h}=0, \qquad (i,h=1,2,3) \qquad (\nu)$$

e ponendo ora

$$\Sigma f_i=\varphi_1,\quad \sqrt{4f_1f_2}=\sqrt{\varphi_2},\quad \sqrt{4f_1f_3}=\sqrt{\varphi_3},\quad \sqrt{4f_2f_3}=\sqrt{\varphi_4},$$

si ha la equazione

$$-\varphi_1+\sqrt{\varphi_2}+\sqrt{\varphi_3}+\sqrt{\varphi_4}=0 \qquad (\pi)$$

di cui la risolvente è

$$[\varphi_1^4+\sum_2^4\varphi_i^2-2\varphi_1^2\sum_2^4\varphi_i-2\varphi_2\varphi_3-2\varphi_2\varphi_4-2\varphi_3\varphi_4]^2-64\varphi_1^2\varphi_2\varphi_3\varphi_4=0, \qquad (\rho)$$

e sostituendo in questa in luogo delle φ_i le f_i e facendo tutte le riduzioni, si ha la risolvente della (μ)

$$\sum_1^3 f_i^4-4\Sigma f_1^3f_2+6\Sigma f_1^2f_2^2-124\Sigma f_1^2f_2f_3=0. \qquad (\rho')$$

Le radici reali della (ρ) sono le radici reali della (ν), purchè si abbia

$$\varphi_1^2+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4<0,$$

ossia, purchè si abbia

$$\Sigma f_i^2-2\Sigma f_if_2>0 \qquad (\varkappa)$$

e le radici reali della (ν) sono le radici reali della (μ), purchè si abbia

$$\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}-\sqrt{f_3}<0. \qquad (\lambda)$$

In conclusione, le radici reali della (ρ') sono le radici reali della (μ), purchè siano soddisfatte le condizioni ($\varkappa$) e (λ) contemporaneamente.

La risolvente della equazione

$$\sqrt[4]{x+a}+\sqrt[4]{x+b}+\sqrt[4]{x+c}=0, \text{ (1)}$$

(1) Crelle, Vol. XIV, anno 1835, pag. 237 (Forstemann).

è

$$Mx^4 + Nx^3 + Px^2 + R = 0,$$

in cui

$$M = 375\,;\ N = 500\,\Sigma a\,;\ P = 130\,\Sigma a^2 + 620\,\Sigma ab\,;$$
$$Q = 4\,\Sigma a^3 + 124\,\Sigma\, a^2 b + 498\, abc\,;$$
$$R = -\,\Sigma a^4 + 4\,\Sigma a^3 b - 6\,\Sigma a^2 b^2 + 124\,\Sigma a^2 bc.$$

7. Esercizio. — *Risolvere e discutere la equazione*

$$\sqrt{x^2 - a^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2 - c^2} - \sqrt{x^2 - c^2 - a^2} - x = 0. \qquad (1)$$

La risolvente di questa equazione è

$$\left\{\begin{array}{l}(x^2-a^2-b^2)^2+(x^2-{}^2b-c^2)^2+(x^2-c^2-a^2)^2+x^2-2(x^2-a^2-b^2)(x^2-b^2-c^2)\\ -2(x^2-a^2-b^2)(x^2-c^2-a^2)-2x^2(x^2-a^2-b^2)-2(x^2-b^2-c)(x^2-c^2-a^2)\\ -2x^2-b^2-c^2)x^2-2x^2(x^2-c^2-a^2)\end{array}\right\}^2 +$$
$$-\,64\,x^2(x^2-a^2-b^2)(x^2-b^2-c^2)(x^2-a^2-c^2-0.$$

Svolgendo e riducendo si ha

$$4a^2b^2c^2x^2 - (\Sigma a^2b^2)^2 = 0,$$

da cui

$$x = \pm\,\frac{\Sigma a^2b^2}{2abc}.$$

Discussione. — Perchè un valore della x convenga alla equazione proposta dev'essere

$$f_1 > 0,\ f_2 > 0,\ f_3 > 0,\ f_4 > 0 \quad (f_1 + f_2 - f_3 - f_4)^2 + 4f_1f_2 - 4f_3f_4 < 0.$$

Le prime quattro di queste condizioni sono sempre soddisfatte, poichè si ha

$$f_1 = \frac{(-\,a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)^2}{4a^2b^2c^2},\quad f_2 = \frac{(a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2)^2}{4a^2b^2c^2},$$
$$f_3 = \frac{(a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2)^2}{4a^2b^2c^2},\quad f_4 = \frac{(\Sigma a^2b^2)^2}{4a^2b^2c^2}.$$

Relativamente alla quinta condizione essa proviene dal fatto che le radici reali della risolvente che convengono sono anche le radici reali della equazione

$$f_1 + f_2 - f_3 - f_4 + \sqrt{4f_1f_2} - \sqrt{4f_3f_4} = 0,$$

ossia

$$\sqrt{4\,(x^2 - a^2 - c^2)\,x^2} - \sqrt{4\,(x^2 - a^2 - b^2)(x^2 - b^2 - c^2)} + 2b^2 = 0,$$

e la condizione quinta si traduce nel caso nostro nell'altra

$$4\,(x^2 - a^2 - c^2)\,x^2 - 4\,(x^2 - a^2 - b^2)(x^2 - b^2 - c^2) + 4b^4 < 0,$$

ossia

$$a^2b^2 + b^2c^2 < a^2c^2.$$

8. Quanto abbiamo detto, sia relativamente alla formazione della risolvente di una equazione irrazionale, sia rispetto alla discussione delle radici della risolvente, crediamo che basti a far vedere quale utile impiego possa trarsi in questo studio dalle identità.

Diamo qualche altro esempio.

Dalle identità

$$a^3+b^3-(a+b)^3=-3ab\,(a+b),$$
$$a^5+b^5-(a+b)^5=-5ab\,(a+b)\,(a^2+ab+b^2),$$
$$a^7+b^7-(a+b)^7=-7ab\,(a+b)\,(a^2+ba+b^2)^2,$$

si ricava che:

Le radici reali delle equazioni

$$\sqrt[3]{f_1}+\sqrt[3]{f_2}-\sqrt[3]{f_1+f_2}=0,$$
$$\sqrt[5]{f_1}+\sqrt[5]{f_2}-\sqrt[5]{f_1+f_2}=0,$$
$$\sqrt[7]{f_1}+\sqrt[7]{f_2}-\sqrt[7]{f_1+f_2}=0,$$

sono le radici reali delle equazioni

$$f_1=0,\quad f_2=0,\qquad f_1+f_2=0.$$

In modo simile si può risolvere la seguente

QUESTIONE. — *Per quali valori di* λ, *variabile da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *la equazione*

$$\sqrt[7]{4x^2-(\lambda+1)\,x-\lambda}+\sqrt[7]{x^2+x-2\lambda}-\sqrt[7]{5x^2-\lambda x-3\lambda}=0$$

ha le sue radici reali e quali sono?

G. CANDIDO
Galatina.

UN PROBLEMA DI CALCOLO COMBINATORIO

(Distribuzioni di *kn* elementi *n* ad *n*).

Può presentarsi qualche volta l'occasione di ricercare *in quanti modi con* kn *elementi si possono formare* k *gruppi di* n *elementi ciascuno*; questo problema, di cui è un caso particolare il giuoco 278, proposto nel I fasc., non si risolve, come può parere a prima vista, (1) applicando senz'altro le formule notissime del Calcolo combinatorio, e mi sembra che meriti di fermare un poco su di esso la nostra attenzione. (2)

Il numero cercato lo indicheremo con $\left\{\begin{matrix} kn \\ n \end{matrix}\right\}$ e lo diremo *numero delle* **distribuzioni** *di* kn *elementi* n *ad* n.

1° METODO. — Se si tenesse conto anche dell'ordine dei gruppi, si potrebbe fare il seguente ragionamento: il 1° gruppo si può formare

(1) E come è parso a quasi tutti i risolutori del giuoco 278.

(2) Vedi una risoluzione di questo problema in BELLACCHI, *Lezioni ed esercizi di Algebra complementare*, vol. II. Firenze, Barbèra, 1899, pag. 32. (È usato un metodo simile al 2°.)

in $\binom{kn}{n}$ modi, il 2° gruppo, avendo a disposizione soltanto $kn - n$ elementi, si può formare in $\binom{(k-1)n}{n}$ modi, cosicchè il numero dei diversi modi di formazione dei primi due gruppi è $\binom{kn}{n} \cdot \binom{(k-1)n}{n}$; così procedendo, si avrebbe che il numero dei diversi modi di formazione dei primi tre gruppi è

$$\binom{kn}{n} \cdot \binom{(k-1)n}{n} \cdot \binom{(k-2)n}{n}, \text{ ecc.}$$

e finalmente il numero dei diversi modi di formazione dei k gruppi è

$$\binom{kn}{n} \cdot \binom{(k-1)n}{n} \cdot \binom{(k-2)n}{n} \cdots \binom{2n}{n}.$$

Ma non tenendo conto dell'ordine secondo cui si succedono i k gruppi, dovremo dividere il numero trovato per il numero delle permutazioni di k elementi, cioè per $\underline{|k}$, e quindi avremo:

$$\left\{ {kn \atop n} \right\} = \frac{1}{\underline{|k}} \binom{kn}{n} \cdot \binom{(k-1)n}{n} \cdot \binom{(k-2)n}{n} \cdots \binom{2n}{n} \cdot \binom{n}{n} \tag{1}$$

cioè

$$\left\{ {kn \atop n} \right\} = \frac{\underline{|kn}}{\underline{|k}\,(\underline{|n})^k}. \tag{2}$$

2° Metodo. — Per formare il 1° gruppo si può immaginare ch'esso contenga un determinato elemento e, potendo a questo unire gli altri $kn - 1$ elementi in $\binom{kn-1}{n-1}$ modi, i modi di formazione del 1° gruppo saranno $\binom{kn-1}{n-1}$. Per formare il 2° gruppo abbiamo a nostra disposizione $kn - n$ elementi e quindi

$$\left\{ {kn \atop n} \right\} = \binom{kn-1}{n-1} \cdot \left\{ {(k-1)n \atop n} \right\}.$$

Analogamente si ha:

$$\left\{ {(k-1)n \atop n} \right\} = \binom{(k-1)n-1}{n-1} \cdot \left\{ {(k-2)n \atop n} \right\}$$

. . . . . .

$$\left\{ {2n \atop n} \right\} = \binom{2n-1}{n-1} \cdot \left\{ {n \atop n} \right\}.$$

Moltiplicando membro a membro le $k-1$ precedenti eguaglianze ed osservando che è evidentemente $\binom{n}{n} = 1$, si ha

$$\left\{ {kn \atop n} \right\} = \binom{kn-1}{n-1} \cdot \binom{(k-1)n-1}{n-1} \cdots \binom{2n-1}{n-1}$$

e poichè è

$$\binom{kn-1}{n-1} = \frac{1}{k}\binom{kn}{n}, \quad \binom{(k-1)n-1}{n-1} = \frac{1}{k-1}\binom{(k-1)n}{n} \cdots \binom{2n-1}{n-1}$$

la precedente si riduce alla (1), e quindi si ritrova la formul

---

3° Metodo. — Tenendo conto dell'ordine dei gruppi, tener conto dell'ordine degli elementi di ciascun gruppo cercato può considerarsi come il numero delle permuta elementi n ad n eguali, e quindi il numero cercato sarebb

$$\frac{|\underline{kn}}{(|\underline{n})^k};$$

ma non tenendo conto dell'ordine dei gruppi, per le ste già esposte per il 1° metodo, avremo:

$$\left\{ {kn \atop n} \right\} = \frac{|\underline{kn}}{|\underline{k}\,(|\underline{n})^k},$$

cioè la (2).

***

Applichiamo la formula trovata ad alcuni problemi p

1°. *In quanti modi si possono distribuire 12 persone in ciascuna a 4 posti?* (Giuoco **278**, Fasc. I.)

Risposta.

$$\left\{ {12 \atop 4} \right\} = \frac{|\underline{12}}{|\underline{3}\,(|\underline{4})^3} = 5775.$$

2°. *In quanti modi si possono distribuire 10 oggetti diver sone, dando 2 oggetti a ciascuna?*

Risposta.

$$\left\{ {10 \atop 2} \right\} = \frac{|\underline{10}}{|\underline{5}\,(|\underline{2})^5} = 945.$$

3°. *In quanti modi si possono distribuire 18 soldati in di 6 soldati ciascuna?*

Risposta.

$$\left\{ {18 \atop 6} \right\} = \frac{|\underline{18}}{|\underline{3}\,(|\underline{6})^3} = 2858856.$$

4°. *In quanti modi si possono distribuire le 28 pedine a quattro giuocatori, dandone 7 a ciascuno?*

Risposta.

$$\left\{ {28 \atop 7} \right\} = \frac{|\underline{28}}{|\underline{4}\,(|\underline{7})^4} = 19\,688\,264\,481\,600.$$

G. Cardoso

Savona, 13 gennaio 1907.

75ª QUISTIONE A CONCORSO

Determinare la relazione che lega i coefficienti dell'equazione

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

con la somma di due delle sue radici.

Dedurre un metodo per risolvere le equazioni di 4° grado.

R. VERCELLIN.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 31 marzo 1907.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONE DELLA 70ª QUISTIONE A CONCORSO

Se AH_a, BH_b, CH_c *sono le altezze di un qualunque triangolo* ABC, *si ha*

$$\overline{CH_c}^2 = \pm\, \overline{BH_c \,.\, H_cA} \pm \overline{BC \,.\, H_aC}, \qquad \textit{(ed analoghe)}, \tag{1}$$

intendendo che i doppi segni sieno indipendenti l'uno dall'altro e debba scegliersi in ciascun termine il superiore o l'inferiore secondo che i due segmenti che compariscono nel termine stesso hanno eguale direzione o direzione contraria.

Dedurre da questo teorema, come casi particolari, i due notissimi teoremi di Euclide sul triangolo rettangolo.

Dedurre altresì la nota formula trigonometrica che dà $\cos(\widehat{A} + \widehat{B})$.

G. CARDOSO-LAYNES.

Inviarono risoluzioni i signori: **Bongini**, **Costa** e **Cernuschi**, R. I. T. di *Torino*; **Campetti**, I. T. P. di *Lucca*; **Casalasco**, R. L. di *Cuneo*; **Cutore** e **La Spina**, R. I. T. di *Catania*; **De Bei**, **De Conz**, **Pelosio** e **Scopinich**, R. I. T. di *Venezia*; **Jodi**, R. I. T. di *Modena* e **Plancich**, Coll. S. Giuseppe di *Porto-Re*.

Fra questi ci è sembrata la migliore quella del sig.

E. CUTORE, del R. I. T. di *Catania*,

che pubblichiamo con qualche lieve modificazione, inviando all'autore il premio promesso.

LA REDAZIONE.

Risoluzione del sig. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*.

Fig. 1.

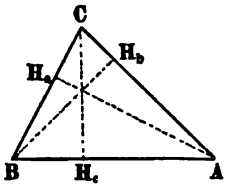


Fig. 2.

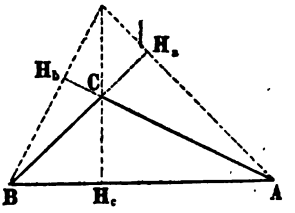
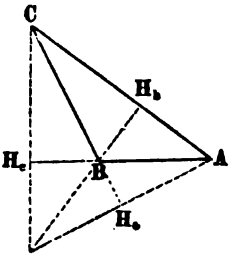


Fig. 3.



1° Caso. — (Il triangolo ABC è acutangolo; H_a, H_b, H_c sono interni ai lati; la formula da dimostrarsi è $\overline{CH_c}^2 = \overline{BH_c} . \overline{H_cA} + \overline{BC} . \overline{H_aC}$) [fig. 1ª].

Dai triangoli simili AH_aC e BH_bC e dagli altri due, pure simili, CBH_c e ABH_a, si ricava:

$$BC : AC = H_bC : H_aC, \qquad AC : AB = AH_c : AH_b$$

e quindi:

$$\overline{BC} . \overline{H_aC} = \overline{AC} . \overline{H_bC} = \overline{AC} . (\overline{AC} - \overline{AH_b}) = \overline{AC}^2 - \overline{AB} . \overline{AH_c} =$$
$$= \overline{AC}^2 - (\overline{AH_c} + \overline{H_cB}) \overline{AH_c} = \overline{CH_c}^2 - \overline{BH_c} . \overline{H_cA}$$

e perciò:

$$\overline{CH_c}^2 = \overline{BH_c} . \overline{H_cA} + \overline{BC} . \overline{H_aC}.$$

2° Caso. — (Il triangolo è ottusangolo in C; H_a e H_b sono esterni ai lati del triangolo; la formula da dimostrarsi è $\overline{CH_c}^2 = \overline{BH_c} . \overline{H_cA} - \overline{BC} . \overline{H_aC}$) [fig. 2ª].

Dai triangoli simili BCH_b, ACH_a e dagli altri due ABH_c e ACH_c si deduce:

$$\overline{BC} . \overline{H_aC} = \overline{AC} . \overline{H_bC} = \overline{AC} (\overline{AH_b} - \overline{AC}) = \overline{AC} . \overline{AH_b} - \overline{AC}^2 =$$
$$= \overline{AB} . \overline{AH_c} - \overline{AC}^2 = (\overline{AH_c} + \overline{H_cB}) \overline{AH_c} - \overline{AC}^2 = \overline{H_cB} . \overline{AH_c} - \overline{CH_c}^2$$

e quindi:

$$\overline{CH_c}^2 = \overline{BH_c}^2 . \overline{AH_c} - \overline{BC} . \overline{H_aC}.$$

3° Caso. — (Il triangolo è ottusangolo in B; H_a e H_c sono esterni ai lati del triangolo; la formula da dimostrarsi è $\overline{CH_c}^2 = \overline{BC} . \overline{H_aC} - \overline{BH_c} . \overline{H_cA}$) [fig. 3ª].

Dagli stessi triangoli simili considerati nel caso precedente si ha:

$$\overline{BC} . \overline{H_aC} = \overline{AC} . \overline{H_bC} = \overline{AC}^2 - \overline{AC} . \overline{AH_b} = \overline{AC}^2 - \overline{H_cA} (\overline{H_cA} - \overline{BH_c}) =$$
$$= \overline{CH_c}^2 + \overline{H_cA} . \overline{BH_c},$$

cioè:

$$\overline{CH_c}^2 = \overline{BC} . \overline{H_aC} - \overline{BH_c} . \overline{H^cA}.$$

4° Caso. — (Il triangolo è ottusangolo in A; cfr. 3° caso).

5° Caso. — (Il triangolo è rettangolo in C; H_a coincide con C).

La formula (1) diviene:

$$\overline{CH_c}^2 = \overline{BH_c} . \overline{H_cA} \qquad (2^\circ \textit{ teor. di Euclide}).$$

6° Caso. — (Il triangolo è rettangolo in A; H_c coincide con A).

La (1) diviene:

$$\overline{CH_c}^2 = \overline{BC} . \overline{H_aC}$$

cioè:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} . \overline{H_aC} \qquad (1^\circ \textit{ teor. di Euclide}).$$

7° Caso. — (Il triangolo è rettangolo in B; cfr. 6° caso).

* * *

Dalla (1) si ha, dividendo per $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$:

$$\frac{\overline{CH_c}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CH_c}}{\overline{CB}} = \pm \frac{\overline{BH_c}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{H_cA}}{\overline{AC}} \pm \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{H_aC}}{\overline{AC}}$$

cioè, tenendo conto dei varî casi,

$$\operatorname{sen} \widehat{A} \,.\, \operatorname{sen} \widehat{B} = \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \pm \cos \widehat{C}$$
$$= \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} - \cos (\widehat{A} + \widehat{B})$$

e finalmente

$$\cos (\widehat{A} + \widehat{B}) = \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} - \operatorname{sen} \widehat{A} \operatorname{sen} \widehat{B}.$$

(G. C.-L.)

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 794, 796, 797 E 799

794. *Risolvere il sistema*

$$x^3 = 7x + 3y \qquad (1) \qquad\qquad y^3 = 7y + 3x \qquad (2)$$

C. Alasia.

Risoluzione. — Sommando le (1) e (2), abbiamo,

$$x^3 + y^3 = 10\,(x + y) \qquad (3)$$

e sottraendo (2) da (1),

$$x^3 - y^3 = 4\,(x - y). \qquad (4)$$

Per una ben nota proposizione la (3) è equivalente alle due equazioni

$$x + y = 0, \qquad (5)$$
$$x^2 - xy + y^2 = 10. \qquad (6)$$

Analogamente, la (4) è equivalente alle due equazioni

$$x - y = 0, \qquad (7)$$
$$x^2 + xy + y^2 = 4. \qquad (8)$$

Risolvendo ora successivamente i sistemi (5) (7); (5) (8); (6) (7); (6) (8); otteniamo i gruppi di valori,

$$1^\circ.\ [0, 0], \qquad 2^\circ.\ [\pm 2, \mp 2], \qquad 3^\circ.\ [\pm \sqrt{10}, \pm \sqrt{10}],$$
$$4^\circ.\ [\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13}), \tfrac{1}{2}(1 \mp \sqrt{13})], \quad [\tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{13}), \tfrac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{13})].$$

Di questa questione giunsero 38 risoluzioni, ma solo sette di esse sono complete ed esatte: esse appartengono ai sigg. **Salonia**, L. di *Caserta*; **Genta**, L. di *Cuneo*; **Marocutti-Verso**, Scuola Navale Superiore di *Genova*; **Orlando** e **Prochownick**, I. T. di *Milano*; F. **Ferrari** di *Pavia*, il quale ultimo tenta pure la generalizzazione del sistema. Altri giungono alla sola soluzione 4ª: essi sono i sigg. **V. Ferrari**, **Gramanacini** e **Magi**, I. T. di *Ancona*; **Ferri**, L. di *Arezzo*; **Cutore**, I. T. di *Catania*; **Napolitano**, I. T. di *Caserta* (la 2ª coppia di valori ottenuta è errata); **Moreau** di *Firenze*; **Bassi** e **Bonomi**, L. di *Milano*; **Civieri** e **Tevarotto**, I. T. di *Padova*; **G. Costa** e **Bongini**, I. T. di *Torino*; **De Conz**, **Brusoni** e **Garbelotto**, I. T. di *Venezia*.

Alcuni altri ottengono la sola soluzione $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})$, e sono i sigg. **Bellomo**, I. T. di *Ancona*; **Antoldi** di *Bologna*; **Barberino** e **Mangeri**, I. T. di *Catania*; **Gavotti**, L. di *Cremona*; **Turola**, I. T. di *Mantova*; **Guerrini**, L. di *Pesaro*; **Mancia**, I. T. di *Spoleto* (che ottiene pure la soluzione 1ª) e **Poretti**.

Il sig. **Romagnoli**, I. T. di *Livorno* ottiene le soluzioni 1ª 3ª e 4ª e solo per la mancata considerazione d'un segno lascia sfuggirsi la soluzione 2ª; **Micheletti**, L. di *Venezia* si limita alla soluzione 2ª; **Semenza**, I. T. di *Milano*, **Gellitti**, I. T. di *Roma* e **Corrado**, L. di *Milano* errano completamente la risoluzione, ed infine il sig. **Pardo**, di *Palermo*; stabilisce l'equazione dalla quale dovrebbe ricavare i valori $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})$, ma non la risolve, nè accenna ad ulteriore discussione.

C. Alasia.

796. *Costruire un triangolo, dati i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto e un'altezza.*

R. Vercellin.

1ª. **Risoluzione.** — Essendo: (V. " Supplemento ". Anno IX, Fasc. III, pag. 33).

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right),$$

da cui

$$r_a = \frac{rh_a}{h_a - 2r},$$

si può avere r_a come quarto proporzionale dopo $h_a - 2r$, r e h_a. Siamo in tal modo ricondotti al problema II della nota " Alcune identità... " (" Supplemento, Anno IX, Fasc. III).

Analoghe a questa sono le risoluzioni dei sigg. **Bongini** e **Costa** di *Torino*; **Manzi** e **Paribelli**, L. Civ. di *Domodossola*.

2ª. **Risoluzione** del sig. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*.

Trovato r_a, come nella precedente costruzione, si costruisca il medio proporzionale fra 4R e $r_a - r$, e si avrà la distanza II_a. Allora le tre tangenti comuni ai cerchi $I(r)$, $I_a(r)$ formano il triangolo richiesto.

La condizione di possibilità è data da

$$2r < h_a < 2R.$$

Il sig. **Corrado**, R. L. di *Bologna*, trova

$$a = 2r\sqrt{\frac{r^2 + 4R(r + h_a)}{3h_a^2 - 8r(h_a - r)}}.$$

e non accenna alla costruzione. Il sig. **Napolitano**, R. I. T. di *Caserta*, infine, manda una risoluzione errata, giacchè egli ammette la relazione

$$h_a^2 = \sqrt{(b^2 - h_a^2)(c^2 - h_a^2)},$$

la quale è vera solamente quando il triangolo è rettangolo.

R. Vercellin.

797. *Risolvere l'equazione*

$$x^4 + 8a(x + a) + 1 = 0.$$

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **Conz**, R. I. T. di *Venezia*.

L'equazione proposta è equivalente alla

$$(x^2 - 1)^2 - (-2)(x + 2a)^2 = 0, \qquad (1)$$

dalla quale

$$[x^2 - 1 + i\sqrt{2}(x + 2a)][x^2 - 1 - i\sqrt{2}(x + 2a)],$$

e si scinde nelle due

$$x^2 + i\sqrt{2}\,x + 2a\sqrt{2}\,i - 1 = 0,$$

$$x^2 - i\sqrt{2}\,x - (1 + 2a\sqrt{2}\,i) = 0,$$

dalla quale si ricava

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-i \pm \sqrt{1 - 4a\sqrt{2}\,i}\right\}; \quad \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4a\sqrt{2}\,i}\right).$$

Fra le risoluzioni ricevute tre sono simili alla precedente; ma in esse si trova il grave errore di dedurre dalla (1) la sola equazione

$$x^2 - 1 = (x + 2a)\sqrt{2}.$$

Altri tre risolutori credono che nell'enunciato sia incorso un errore. Uno di essi s'occupa dell'equazione

$$x^4 + 8a(x - a) + 1 = 0,$$

e gli altri due della

$$x^4 - 8a(x + a) + 1 = 0.$$

I sigg. **Bongini** e **Costa** di *Torino*, e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*, risolvono l'equazione proposta applicando metodi generali.

Infine abbiamo ricevuto una risoluzione completamente sbagliata, in cui, fra l'altro, è detto che da

$$y^2 + 8a\sqrt{y} - 8a^2 + 1 = 8$$

scende

$$y = -4a \pm \sqrt{\frac{32a^2 + 1}{4}} \quad (sic).$$

R. Vercellin.

799. *Risolvere il sistema*

$$\begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix}\left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = m^2 \\ x + y + u + v = 2n \\ xy + vu = q^2 \end{matrix}\right.$$

dove m, n, q, sono numeri interi e positivi.

E. De Conz.

Risoluzione.

Posto $x+y=n+z$ ove z rappresenta un'incognita ausiliare sarà $u+v=n-z$; tenendo conto della 1ª, dalla 3ª si avrà:

$$(n + z)^2 + (n - z)^2 - 2q^2 = 2m^2$$

da cui sviluppando, riducendo e ricavandone z si otterrà:

$$z = \pm\sqrt{m^2 + q^2 - n^2},$$

e quindi

$$x + y = n \pm \sqrt{m^2 + q^2 - n^2}, \quad (1) \qquad u + v = n \mp \sqrt{m^2 + q^2 - n^2}, \quad (2)$$

badando che nella (1) e nella (2) si debbono prendere contemporaneamente i segni superiori o i segni inferiori.

Ora dalla 1ª del sistema dato si ricava:

$$(x + y)^2 - m^2 = 2xy, \quad (3) \qquad (u + v)^2 - m^2 = 2uv, \quad (4)$$

e tenendo conto, per la (3), della (1); per la (4), della (2), si avrà:

$$2xy = n^2 - m^2 + z^2 \pm 2nz = q^2 \pm 2nz \quad 2uv = n^2 - m^2 + z^2 \mp 2nv = q^2 \mp 2nz$$

onde

$$xy = \tfrac{1}{2}q^2 \pm nz, \quad (5) \qquad uv = \tfrac{1}{2}q^2 \mp nz, \quad (6)$$

osservando che ponendo in sistema la (1) con la (5) si dovranno tenere in en-

trambe i medesimi segni e così per la (2) rispetto alla (6). Ne risulta che tutte e sole le soluzioni del sistema dato sono quelle dei due sistemi risolventi

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x+y=n+z \\ \quad xy=\frac{1}{2}q^2+nz \\ u+v=n-z \\ \quad uv=\frac{1}{2}q^2-nz, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=n-z \\ \quad xy=\frac{1}{2}q^2-nz \\ u+v=n+z \\ \quad uv=\frac{1}{2}q^2+nz, \end{cases}\quad (\beta)$$

uno dei quali si ricava dall'altro scambiandovi x con u e y con v.

Se quindi indichiamo con φ_1 e φ_2 due incognite ausiliarie i valori di x e y, di u e v saranno rispettivamente forniti dalle radici delle equazioni quadratiche

$$\varphi_1^2-(n+z)\varphi_1+\tfrac{1}{2}q^2+nz=0 \tag{7}$$

$$\varphi_2^2-(n-z)\varphi_2+\tfrac{1}{2}q^2-nz=0 \tag{8}$$

ossia si avrà

$$\left.\begin{matrix} u, x \\ v, y \end{matrix}\right\}=\frac{n+z\pm\sqrt{(n-z)^2-2q^2}}{2} \quad (9) \qquad \left.\begin{matrix} x, u \\ y, v \end{matrix}\right\}=\frac{n-z\pm\sqrt{(n+z)^2-2q^2}}{2} \quad (10)$$

cosicchè se con A e B indichiamo, per semplicità, le radici della (7), con C, D quelle della (8) i sistemi di valori che soddisfano i sistemi (α) e (β) sono i seguenti:

$$\begin{cases} x=A \\ y=B \\ u=C \\ v=D \end{cases} \begin{cases} x=B \\ y=A \\ u=C \\ v=D \end{cases} \begin{cases} x=A \\ y=B \\ u=D \\ v=C \end{cases} \begin{cases} x=B \\ y=A \\ u=D \\ v=C \end{cases} \begin{cases} x=C \\ y=D \\ u=A \\ v=B \end{cases} \begin{cases} x=C \\ y=D \\ u=B \\ v=A \end{cases} \begin{cases} x=D \\ y=C \\ u=A \\ v=B \end{cases} \begin{cases} x=D \\ y=C \\ u=B \\ v=A. \end{cases}$$

Si sono ottenute così le otto soluzioni del sistema dato: i valori che le costituiscono non differiscono da una soluzione all'altra che per l'ordine. Ciò si poteva dedurre *a priori*, osservando che il sistema dato rimane inalterato se vi si inverte x con y oppure u con v, oppure x con y e u con v, od anche x con u e y con v, o x con v e y con u.

Discussione. — Come prima condizione per l'esistenza di soluzioni dovrà essere z reale. Quindi converrà distinguere le ipotesi:

$$n^2>m^2+q^2, \qquad n^2=m^2+q^2, \qquad n^2<m^2+q^2.$$

I. Se $n^2>m^2+q^2$, il sistema dato *non ha soluzioni reali.*

II. Se $n^2=m^2+q^2$, $\theta=0$: i due sistemi α) e β) sono *identici*:

$$C=A, \qquad D=B$$

le soluzioni del dato si riducono a quattro

$$\begin{cases} x=A \\ y=B \\ u=A \\ v=B \end{cases} \begin{cases} x=B \\ y=A \\ u=A \\ v=B \end{cases} \begin{cases} x=A \\ y=B \\ u=B \\ v=A \end{cases} \begin{cases} u=B \\ y=A \\ u=B \\ v=A \end{cases}$$

allorquando (vedi la (9) e la (10)) sia verificata la condizione:

$$n^2>2q^2$$

oppure, per la $n^2=m^2+q^2$, sia:

$$m^2>q^2 \qquad \text{o, infine} \qquad m>q.$$

Se invece $m=q$, le radici della (9) o della (10) sono uguali, $A=B$, e i sistemi precedenti si riducono all'unico

$$x=A, \qquad y=A, \qquad u=A, \qquad v=A,$$

essendo poi

$$A=\tfrac{1}{2}n.$$

Se infine $m<q$ *non abbiamo soluzioni.*

III. Sia ora

$$n^2<m^2+q^2; \tag{11}$$

z è reale, positivo e non nullo; *per l'esistenza di una soluzione* (e quindi di tutte) dovrà essere, *contemporaneamente*, per la (9) e per la (10)

$$(n-z)^2 > 2q^2, \qquad (12) \qquad\qquad (n+z)^2 > 2q^2, \qquad (13)$$

esaminando a parte i casi che riguardano le radici *doppie* della (9) o della (10).

Delle due (12) e (13) basterà evidentemente sia verificata la (12), perchè allora a più forte ragione lo sarà la (13).

Sviluppando, tenendo conto del valore di z, e riducendo, dalla (12) si ricava:

$$2nz < m^2 - q^2. \qquad (12)'$$

Ora se $m \leqslant q$ la (12)' non può essere soddisfatta: quindi il sistema *non ha soluzione*.

Se $m > q$, si elevino i membri della (12)' a quadrato: si avrà l'*equivalente*

$$4n^2(m^2+q^2-n^2) < (m^2-q)^2,$$

da cui

$$4n^4 - 4n^2(m^2+q^2) + (m^2-q^2)^2 > 0. \qquad (14)$$

Risolvendo rispetto ad n^2 si trova

$$n^2 = \frac{m^2+q^2 \pm 2mq}{2} = \frac{(m \pm q)^2}{2},$$

e perchè sia verificata la (14) dovrà essere

$$n^2 > \frac{(m+q)^2}{2}, \qquad (15)$$

oppure

$$n^2 < \frac{(m-q)^2}{2}. \qquad (16)$$

La (15) equivale alla

$$n > \frac{m+q}{\sqrt{2}}, \qquad (17)$$

e la (16), ricordando che supponemmo $m > q$, equivale alla

$$n < \frac{m-q}{\sqrt{2}}. \qquad (18)$$

Riunendo la (17) con la (11) e osservando che la (18) assorbe la (11), si avrà che il sistema dato ammette soluzioni per $m > q$ se

$$\frac{m+q}{\sqrt{2}} < n < \sqrt{m^2+q^2},$$

oppure

$$n < \frac{m-q}{\sqrt{2}}.$$

Circa le soluzioni doppie della (9) e della (10) si osservi che le condizioni:

$$(n-z)^2 = 2q^2 \qquad (n+z)^2 = 2q^2$$

equivalgono alle

$$2nz = m^2 - q^2 \qquad (19)$$

$$2nz = q^2 - m^2. \qquad (20)$$

Ora *se si verifica la* (19) dovrà essere $m \geqslant q$, dovendosi escludere, per dato, valori negativi di n.

Sia $m > q$: la (20) non potrà verificarsi, bensì la (13): ma le radici della (19) sono

$$n = \frac{m \pm q}{\sqrt{2}},$$

dovendo scartare, per l'ipotesi, valori *negativi* di n: le otto soluzioni del sistema dato si ridurranno a quattro, se

$$n = \frac{m \pm q}{\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad m > q.$$

Sia $m = q$; poichè z per la (11) è positivo e diverso da zero, la (19) cata solo da $n = 0$ e anche la (20), cosicchè le soluzioni del sistema si ri a due per $n = 0$, $m = q$.

Se ora si osserva che, verificandosi la (20), dovrebbe essere $m < q$, e q non potrebbe verificarsi la (12), si conclude che è da escludere, per l'esisteuz soluzioni, l'ipotesi precedente.

Riassumendo, si ha per il movimento delle soluzioni il quadro seguente:

$$n^2 > m^2 + q^2 \quad \text{nessuna soluzione.}$$

$$n^2 = m^2 + q^2 \begin{cases} m < q & \text{nessuna soluzione} \\ m = q & \text{una soluzione} \\ m > q & \text{quattro soluzioni.} \end{cases}$$

$$n^2 < m^2 + q^2 \begin{cases} m < q & \text{nessuna soluzione.} \\ m > q \text{ e} \begin{cases} n > \dfrac{m+q}{\sqrt{2}} \\ \text{oppure:} \\ n < \dfrac{m-q}{\sqrt{2}} \end{cases} & \text{otto soluzioni.} \\ m > q \text{ e} \quad n = \dfrac{m+q}{\sqrt{2}} & \text{quattro soluzioni} \\ m = q \text{ e} \quad n = 0 & \text{due soluzioni} \\ m = q \text{ e} \quad n > 0 & \text{nessuna soluzione.} \end{cases}$$

Altre risoluzioni dei sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Corrado**, R. I. Minghetti di *Bologna*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **De Conz** e **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*; **Levi**, R. L. Marco Polo di *Venezia*; **Ferrari F.** di *Pavia*; **Ferrari V.**, R. I. T. di *Ancona*; **Gavotti**, L. di *Cremona*; **Mancia**, I. T. di *Spoleto*; **Napolitano**, R. I. T. di *Caserta*; **Perelli** di *Roma*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Turola**, R. I. T. di *Mantova*.

A. Bassi.

QUISTIONI DA RISOLVERE

821. Se dal centro del cerchio circoscritto ad un triangolo si abbassa una perpendicolare sopra ad una altezza del triangolo, la differenza (in un triangolo acutangolo) e la somma (in un triangolo ottusangolo) dei due segmenti compresi, uno fra il piede di questa perpendicolare e il vertice da cui esce l'altezza, l'altro dal medesimo piede ed il piede dell'altezza, è uguale al segmento compreso fra l'ortocentro del triangolo e il piede dell'altezza.

O. Jona.

822. Dimostrare le formule che dànno $\cos(nx)$ e $\operatorname{sen}(nx)$ in funzione di $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, senza fare uso delle formule che dànno $\cos(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ e $\operatorname{sen}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ in funzione di $\cos x_i$ e $\operatorname{sen} x_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

823. L'area A' del triangolo che ha per vertici i punti medî delle altezze di un triangolo di lati a, b, c (di area A), è data dalla formola

$$A' = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{16a^2b^2c^2} \cdot A.$$

G. Cardoso-Laynes.

824. Se K_1, K_2, K_3, K_4 sono i punti in cui una trasversale taglia rispettivamente i lati AB, BC, CD, DA di un trapezio ABCD, dimostrare la relazione

$$AK_1 . BK_2 . CK_3 . DK_4 = BK_1 . CK_2 . DK_3 . AK_4 .$$

825. Costruire " geometricamente " un triangolo, dati un angolo e le distanze dei piedi delle bisettrici interna ed esterna dal piede della mediana relative. B. e C.

826. Risolvere l'equazione

$$(cx^2 - a)\frac{b}{x^2} = \frac{4}{27}\left(\frac{b}{x^2} - (cx^2 - a)\right)^2.$$

E. De Conz.

827. Un pezzo di metallo il cui coefficiente di dilatazione lineare è k, immerso nel mercurio subisce la spinta s_0 alla temperatura di 0^0, e la spinta s_t alla temperatura di t^0. Dedurre da questi dati, il coefficiente di dilatazione assoluta del mercurio. ***

828. Il triangolo T_4 che ha per vertici i baricentri dei triangoli T_1, T_2, T_3 che si ottengono congiungendo il baricentro di un triangolo dato T coi vertici è omotetico a quest'ultimo, e la sua area ne è $\frac{1}{3}$.

L'area dell'esagono convesso che ha per vertici i punti medi dei lati dei lati dei triangoli T, T_1, T_2, T_3, è metà dell'area di T.

L'area dell'esagono che ha per vertici i baricentri dei triangoli T_1, T_2, T_3 e i punti medi dei loro lati comuni è il triplo di quella del triangolo T_4. M. Scalabrini.

829. Detta α una radice dell'equazione

$$z^3 - 2qz^2 + (pr + q^2 - 4s)z + p^2s + r^2 - pqr = 0,$$

l'equazione

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

si scinde nelle due seguenti

$$x^2 + \tfrac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 - 4\alpha})x + \tfrac{1}{2}[q - \alpha + \sqrt{(q-\alpha)^2 - 4s}] = 0,$$
$$x^2 + \tfrac{1}{2}(p + \sqrt{p^2 - 4\alpha})x + \tfrac{1}{2}[q - \alpha - \sqrt{(q-\alpha)^2 - 4s}] = 0.$$

830. Costruire un triangolo, conoscendo il raggio del cerchio circoscritto, la differenza di due angoli e la distanza fra l'incentro e il vertice dell'altro. R. Vercellin.

N. B. — Le risoluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 31 marzo 1907.

ERRATA-CORRIGE.

Nella risoluz. della quist. **788**, 3ª riga invece di *cateto triangolo*, si legga: *cateto del triangolo*; nel quadro riassuntivo della discussione, 3ª riga, invece di $r(1 < \sqrt{2})$ si legga $(1 + \sqrt{2})$.

Nella risoluzione della quistione **789** a pag. 45, invece di

$$\binom{m-2}{n-2} = \binom{m-3}{n-2} + \binom{m-3}{n-3}; \quad \text{si legga} \quad \binom{m-2}{n-3} = \binom{m-3}{n-2} + \binom{m-3}{n-3}, \text{ ecc.}$$

Nella risoluzione del giuoco **275**, a pag. 3 della copertina, invece che *da ciascuna delle 9 soluzioni* si legga: da *ciascuna delle 3 soluzioni*.

Fra i nomi dei risolutori della questione n. **798**, invece di **Tuvola**, si legga **Turola**.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 20 febbraio 1907

279. *Alla morte di un tale che possedeva cinque stabili di valore determinato, i due nipoti* A *e* B, *che si ritenevano soli eredi, si divisero l'eredità nel modo seguente:*

A 1º, 2º e 3º stabile, B 4º e 5º,

avendo così diviso il patrimonio perfettamente per metà.

Ma saltò fuori un terzo nipote C *per far valere i suoi diritti e il tribunale emise una sentenza, per la quale ai tre nipoti spettava eguale quota.*

I due primi fecero il seguente progetto di divisione:

A *avesse gli stabili* 2º *e* 4º, B *gli stabili* 1º *e* 3º *e* C *il* 5º *stabile; ma* A *avrebbe dato* L. 20000 *a* C *in contanti.*

L'altro erede, C, *fece un contro-progetto e cioè:*

A *avesse il* 1º *ed il* 5º *stabile,* B *il* 2º *ed il* 3º *ed egli il* 4º, *purchè* A *e* B *gli dessero rispettivamente* L. 25000 *e* L. 15000.

Si domanda quanto valesse ciascuno stabile e quale fosse il patrimonio.

(G. C.-L.)

Risoluzione.

Indicando rispettivamente con x, y, z, u, v il valore degli stabili 1º, 2º, 3º, 4º e 5º, prendendo per unità di misura il migliaio di lire, avremo:

$$x + y + z = u + v \qquad (1)$$
$$y + u - 20 = x + z \qquad (2)$$
$$v + 20 = x + z \qquad (3)$$
$$x + v - 25 = u + 40 \qquad (4)$$
$$y + z - 15 = u + 40 \qquad (5)$$

Sommando membro a membro le (3) (5), e tenendo conto della (1), si ha

$$z = \mathbf{75}.$$

Sommando le (2) (4), tenendo conto del valore trovato per z, si ha

$$y + v = 160. \qquad (6)$$

Sommando invece le (1) (2), si ha

$$2y - v = 20. \qquad (7)$$

Dalle (6) (7), si ha subito

$$y = \mathbf{60}. \qquad v = \mathbf{100}.$$

Dalla (5) si ricava

$$u = y + 20 = \mathbf{80},$$

e dalla (3)

$$x = \mathbf{45},$$

dunque i cinque stabili valgono rispettivamente L. 45000, L. 60000, L. 75000, L. 80000, L. 100000, e il patrimonio del defunto è di L. 360000.

(Verifica)

1ª Divisione:

A			B		
1º stabile	L.	45000	4º stabile	L.	80000
2º „	„	60000	5º „	„	100000
3º „	„	75000			
		180000			180000

Progetto di A e B:

A			B			B		
2º stabile	L.	60000	1º stabile	L.	45000	5º stabile	L.	100000
4º „	„	80000	3º „	„	75000	Avere da A	„	20000
	L.	140000						
Dare a C	„	20000						
	L.	120000		L.	120000		L.	120000

Progetto di C:

A			B			C		
1º stabile	L.	45000	2º stabile	L.	60000	4º stabile	L.	80000
5º „	„	100000	3º „	„	75000	Avere da A	„	25000
	L.	145000		L.	135000	„ „ B	„	15000
Dare a C	„	25000	Dare a C	„	15000			
	L.	120000		L.	120000		L.	120000

Inviarono risoluzioni i predetti sigg. **Belvedere, Bitossi, Bongini, Borino, Castiglioni, Cerere, Cellini, Costa, De Caro, Ferrari F., Ferrari V., Jogna, Gavotti, Garbelotto, Levi, Lombardi, Maugeri, Micheletti, Salonia, Satriano, Semenza** ed i sigg. **Barberino**, R. I. T. di *Catania* e **Bottari**, di *Vasto*.

Oltre a queste, *due* risoluzioni errate. (G. C.-L.)

280. (1) *Un impiegato governativo per il suo trasferimento dalla città* B *alla città* C *riceve un'indennità di L. 190; qualche anno avanti, quando da* A *fu trasferito a* B, *quantunque la distanza fosse di 75 km. maggiore, ebbe 5 lire meno d'indennità, perchè l'ultimo dei suoi figli non aveva allora compiuto il 3° anno di età.*

Si domanda: 1°) *La distanza da* A *a* B; 2°) *quella da* B *a* C; 3°) *il numero dei componenti la famiglia del* Travet. (G. C.-L.)

Risoluzione. — Indicando con x la distanza da B a C, in km., e con y il numero dei componenti la famiglia dell'impiegato, si ha il sistema

$$[0{,}16 \times 100 + 0{,}11\,(x - 100)]\,y = 190$$
$$[0{,}16 \times 100 + 0{,}11\,(x + 75 - 100)]\,(y - 1) = 185.$$

La 2ª equazione può scriversi:

$$[0{,}16 \times 100 + 0{,}11\,(x - 100)]\,y + 0{,}11 \times 75y - [0{,}16 \times 100 + 0{,}11\,(x + 75 - 100)] = 185$$

e tenendo conto della 1ª, si ha, dopo eseguite le riduzioni:

$$75y - x = 75 \qquad \text{da cui} \qquad x = 75\,(y - 1). \tag{1}$$

Sostituendo nella 1ª equazione e riducendo, si ha

$$33y^2 - 13y - 760 = 0,$$

da cui, tralasciando la radice negativa, si ha $y = 5$ e sostituendo nella (1) si ha $x = 300$, quindi la distanza da B a C è **300** km., e per conseguenza quella da A a B è di **375** km., e la famiglia dell'impiegato si compone di **5** persone.

Verifica:

	TRASFERIMENTO	
	da A a B (375 km.)	da B a C (300 km.)
Indennità per ogni persona:		
per i primi 100 km. a L. 0,16 per km.	L. 16.—	L. 16.—
„ 200 km. a L. 0,11 per km.	„ 22.—	„ 22.—
„ 75 „ „ „ „ „ „	„ 8.25	. . . .
	„ 46.25	L. 38.—
Indennità per tutta la famiglia	(4 pers.) L. 185.—	(5 pers.) „ 190.—
	Differenza „ 5.—	
	L. 190.—	

Inviarono risoluzioni i predetti sigg. **Belvedere, Bitossi, Borino, Cellini, Ferrari V., Garbelotto, Gavotti, Jogna, Lombardi** e **Micheletti.** — Inoltre ci pervennero *tre* risoluzioni errate.

(G. C.-L.)

(1) A gli impiegati trasferiti per ragioni di servizio lo Stato concede un'indennità di trasferimento e cioè per ogni membro della famiglia, esclusi i bambini sotto ai tre anni, dà L. 0,16 per ciascuno dei primi 100 km. percorsi e L. 0,11 per ciascuno dei km. successivi.

GIUOCHI PROPOSTI.

293. Trovare un quadrato perfetto di 4 cifre tale che disponendo le cifre stesse in ordine inverso, il numero che si viene a rappresentare sia pure un quadrato perfetto.

294. Trovare un quadrato perfetto di 4 cifre tale che aumentando di un'unità il valore assoluto di ciascuna cifra, si venga a rappresentare un altro quadrato perfetto.

295. Trovare un quadrato perfetto di 4 cifre di cui le prime due sieno eguali fra loro ed eguali pure sieno le ultime due.

296. Quanti soldi hai? — domandò un tale ad un suo amico. — Se ne avessi il doppio più 2 — rispose l'altro — o il triplo più 3, avrei un numero esatto di lire, senza però mai arrivare ad averne 5. Quanti soldi aveva?

297. In quanti modi si possono disporre i primi sei numeri naturali su le faccie di un cubo? (non riguardando come diverse quelle distribuzioni che possono ottenersi l'una dall'altra con un movimento del cubo).

298. Con un mazzo di 40 carte da giuoco qual'è la probabilità di fare *sette e mezzo reale?*

299. Date le posizioni P e Q di due palle sopra un bigliardo di dimensioni d e $2d$ per mezzo delle distanze ch'esse hanno da due sponde, trovare in qual punto di una data sponda bisogna far battere la palla P, affinchè *di calcio* prenda in pieno la palla Q.

300. Si hanno monete da 5, da 20 e da 25 centesimi e cioè una lira per ogni specie di monete; si vuol dare una lira per ciascuna a tre persone; quante monete di ciascuna specie si deve dare ad ognuna? (Trovare tutte le possibili soluzioni). G. C.-L.

Le risoluzioni si accettano fino al 31 marzo p. v.

ERRATA-CORRIGE. — I giuochi **290**, **291** e **292** sono stati proposti da G. C.-L. e gli altri sono stati tolti “da varie raccolte„.

ANNO X. MARZO-APRILE 1907 FASC. V-VI

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - A. BARSI. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES. - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNI. - R. VERCELLIN.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 48 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e per abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al Periodico di Matematica

(9 fasc. mensili ciascuno di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Di alcune notevoli curve piane. (E. NANNI.) *(continua.)*
Una lezione su la teoria elementare dei determinanti. (G. CARDOSO-LAYNES.)
Su alcune proprietà del triangolo. (R. VERCELLIN.)
76ª quistione a concorso. (F. FERRARI.)
Risoluzione della 73ª quistione a concorso.
Risoluzioni delle quistioni 791, 792, 801, 802, 803, 805, 806, 807, 808, 809 e 818.
Quistioni da risolvere 831-840.
Su alcuni problemi di calcolo combinatorio. (G. CARDOSO-LAYNES.)
Errata-corrige.

Copertina:

Falsa dimostrazione.
Spiegazione dei giuochi 277, 284 e 285.

LIVORNO
RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE
LIBRAIO-TIPOGRAFO
1907

MATEMATICA RICREATIVA.

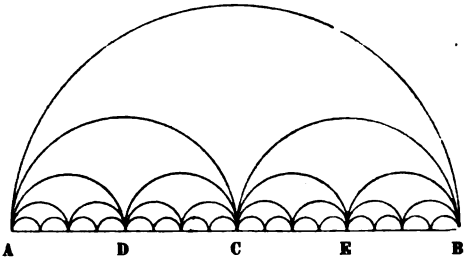
Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes, a Savona,** *Via Luigi Corsi, Villa Garroni.*

FALSA DIMOSTRAZIONE

La semi-circonferenza è uguale al diametro.

La misura di una semi-circonferenza che abbia un diametro $AB = 2r$ è πr; se C è il centro di questa semicirconferenza, le due semicirconferenze che hanno per diametri AC e CB hanno ciascuna per misura $\frac{1}{2}\pi r$, cosicchè complessivamente queste due semicirconferenze hanno la stessa misura della semicirconferenza di diametro AB. Ciò posto, stabilito cioè, che una semicirconferenza ha la stessa misura di due semicirconferenze che hanno diametro metà, con lo stesso ragionamento si prova che se D ed E sono rispettivamente i punti medî di AC e CB, le quattro semicirconferenze che hanno per diametri AD, DC, CE ed EB hanno complessivamente la stessa misura delle due semicirconferenze di diametri AC e CB e quindi anche della semicirconferenza di diametro AB. Così procedendo e riducendo sempre a metà i diametri delle semicirconferenze che si considerano, *passando al limite*, le semicirconferenze si ridurranno ai punti del diametro AB e quindi la semicirconferenza di diametro AB ha la stessa misura del suo diametro (!)



Con lo stesso procedimento si potrebbe dimostrare anche che *un lato di un triangolo è uguale alla somma degli altri due* (!!)

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 277, 284 e 285.

277. *Una certa somma è stata divisa in parti eguali fra più persone; se queste fossero state 3 di più, ciascuna avrebbe ricevuta una lira meno, e se fossero state 2 di meno, ciascuna avrebbe ricevuta una lira di più. Trovare il numero delle persone e il numero di lire toccate a ciascuna.*

Risoluzione. — Indicando con x il numero delle persone e con y quello delle lire che sono toccate a ciascuna, avremo il sistema:

$$(x+3)(y-1) = xy$$
$$(x-2)(y+1) = xy$$

cioè:

$$-x + 3y = 3$$
$$x - 2y = 2$$

da cui, sommando membro a membro, si ha $y = 5$ e quindi $x = 12$.

Le persone erano 12 *e ciascuna ha avuto* L. 5 *e quindi la somma distribuita era* L. 60.

Infatti se le persone fossero state 3 più, cioè 15, a ciascuna sarebbero toccate L. 60 : 15 = L. 4, cioè una lira meno di quelle che effettivamente hanno avuto; se le persone fossero state 2 meno, cioè 10, a ciascuna sarebbero spettate L. 60 : 10 = L. 6 e cioè una lira più di ciò che hanno avuto.

Generalizzazione. — *Il prodotto di due numeri rimane inalterato, se si aumenta di* m *unità il primo fattore e si diminuisce di* n *unità il secondo e rimane pure inalterato se si diminuisce invece di* p *unità il primo fattore e si aumenta di* q *unità il secondo. Determinare i due fattori.*

Indicando con x ed y i due fattori, si ha:

$$(x+m)(y-n) = xy$$
$$(x-p)(y+q) = xy$$

cioè:

$$-nx + my = mn$$
$$qx - py = pq$$

donde si ricava:

$$x = \frac{mp(n+q)}{mq-np}; \qquad y = \frac{nq(m+p)}{mq-np}.$$

Per $m = 3$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 1$ si ritrova $x = 12$, $y = 5$.

Inviarono risoluzioni *esatte e complete* i sigg. **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Borino** di *Palermo*; **Cellini** di *Forlì*; **Ferrari F.** di *Pavia* e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*.

Inviarono risoluzioni *incomplete o in parte inesatte* i sigg. **Bitossi** di *Forlì*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Bottari** di *Vasto*; **Brusoni**, **Garbellotto** e **Jogna**, R. I. T. e **Levi**, R. L. Polo di *Venezia*; **Carissimo**, L. del Coll. Nazareno di *Roma*; **Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*; **Cecere**, L. della *Badia di Cava*; **De Caro** e **Lombardi**, R. L. di *Salerno*; **Ferrari V.**, R. L. di *Ancona*; **Ferri B.**, R. L. di *Arezzo*; **Gavotti** di *Cremona*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Marangio**, R. L. di *Aquila*; **Manzi** e **Paribelli**, L. P. di *Domodossola*; **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Micheletti**, R. L. di *Verona*; **Pardo** di *Palermo*; **Piancich**, Coll. S. Giuseppe di *Porto-re*; **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Satriano**, R. L. di *Benevento* e sig.na **Villani**, R. I. T. di *Pavia*.

Oltre a queste, *una* risoluzione errata. (G. C.-L.)

DI ALCUNE NOTEVOLI CURVE I'

Esporremo in quel che segue alcune nozioni sul curve di grado superiore al secondo. Non volendo s cognizioni elementari, dovremo in qualche caso lim definizione, o a qualche costruzione geometrica, o dov qualche proprietà senza dimostrarla.

Ma crediamo che questa esposizione, pur necessar e imperfetta, possa pur sempre giovare ad accrescer dei nostri giovani lettori, e forse invogliarli a studiar maggiore interesse uno dei più belli e piacevoli capitol

Supporremo che il lettore conosca la rappresentaz e polare.

Le fonti di cui più ci serviremo sono: Loria G., *Spezielle algebraische und trascendente ebene kurven.* — Gomez Texeira, *Tratado de las curvas especiales notables.* — Brocard H., *Notes de bibliographie des courbes géometriques.* — Cesàro E., *Geom. intrinseca* oltre le pubblicazioni speciali che indicheremo caso per caso.

I. Agnesiana. — Si abbia un circolo di centro C (circolo *direttore*) e raggio $2p$ (fig. 1).

Consideriamo due tangenti parallele agli estremi di un diametro OA, e si fissi la retta del diametro come asse delle ascisse, e una delle tangenti, per es. quelle nel punto O, come asse delle ordinate. Dal punto O si costruisca una retta qualunque che incontri il circolo e l'altra tangente, rispettivamente nei punti P e Q. Dai punti P e Q si costruiscano le parallele agli assi, le quali s'incontrino in M. Il luogo degl'infiniti punti M che si ottengono, variando la secante al circolo, è una linea, che, per essere stata studiata da Maria Gaetana Agnesi nelle sue " Istituzioni di matematica " (Vol. I, pag. 380) fu detta *agnesiana* o *cubica dell'Agnesi.* L'Agnesi la chiamò *versiera.* [1]

È facile stabilire l'equazione di questa curva in co siane ortogonali.

Dai triangoli simili OHP, OAQ si ha la proporzio

$$\overline{OH} : \overline{OA} :: \overline{HP} : \overline{AQ},$$

[1] Da *vertere* o *versura*, secondo Cantor. La curva, però, era già conosciu

da cui si ricava

$$x : 2p :: \sqrt{x(2p-x)} : y,$$

donde

$$xy = 2p\sqrt{x(2p-x)} \quad \text{e} \quad xy^2 = 4p^2(2p-x)$$

che è un'equazione di 3° grado.

Ponendo nell'equazione $y=0$, si ricava $x=2p$; quindi il punto A appartiene alla curva.

Dall'essere $y = \pm 2p\sqrt{\frac{2p-x}{x}}$ si ricava che la retta OA è un asse di simmetria per la curva; di più che si hanno punti reali solamente per $x \leqslant 2p$: cioè che la curva è tutta compresa nella striscia formata dalle due tangenti del circolo già costruite.

Infine dall'essere $x = \frac{8p^3}{y^2+4p^2}$ si deduce che per $y=\infty$ si ha $x=0$, cioè l'asse delle y è assintoto (o tangente, a distanza infinita) della curva.

Si noti che indicando con y_1 e y_1' le ordinate di due punti appartenenti rispettivamente al circolo direttore e alla curva e aventi la medesima ascissa x_1, si ha:

$$y_1 : y_1' :: x_1 : 2p;$$

quindi si può costruire per punti la curva prendendo sulle ordinate y dei punti del circolo dei segmenti y' tali che $y : y' :: x : 2p$.

Si dimostra (ma non elementarmente) che l'area C compresa tra la curva e il suo assintoto è data da $S = 4\pi p^2$ cioè è quattro volte l'area del circolo direttore; e il volume V del solido generato ruotando intorno all'assintoto è dato da $V = \frac{\pi^2 a^3}{2}$.

2. Astroide. — Date due rette perpendicolari nel punto O (fig. 2) e un segmento costante $AB = a$, si muova questo segmento in modo che i suoi estremi A e B scorrano sulle due rette date. Si completi il rettangolo AOBC e sia M la proiezione del vertice C sulla diagonale AB.

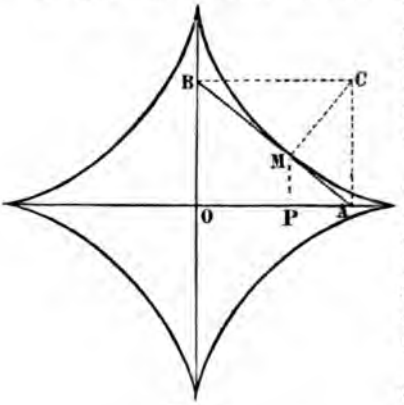


Fig. 2.

Il l. g. dei punti M è una curva che si chiama *astroide* o *epicicloide a quattro spigoli*, od anche *cubocicloide*: e può essere ottenuta anche facendo ruotare un circolo, senza strisciare, sopra un altro circolo fisso ed esterno di cui il raggio sia quadruplo del circolo mobile.

Per trovare l'equazione della curva in coordinate cartesiane, prendendo le due rette perpendicolari date come assi, indicando con P il piede della perpendicolare condotta da P all'asse, si ponga:

$$MP = y, \quad OP = x, \quad OA = k.$$

Essendo MP parallelo a BO per

$$OA : : OP = 1$$

ossia (essendo $BM . BA = \overline{BC}^2$, B

$$k : x : :$$

da cui:

$$k = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \quad \text{o}$$

In simil guisa, posto $OB = h$, si

$$h^2 = a^{\frac{1}{2}}$$

E siccome è $h^2 + k^2 = a^2$, sommar dendo il risultato per $a^{\frac{1}{2}}$, si ha

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} =$$

che è l'equazione richiesta.

Questa curva gode importanti p I. Bernouilli, D'Alembert, Montucla geon, Lemoine, Barbarin.

Ricorderemo la seguente, dovuta

La lunghezza d'un quadrante della segmento costante.

Inoltre: *La superficie racchiusa dal ficie del circolo che ha per raggio il se*

(Continua).

UNA LEZIONE SU LA TEORIA ELE

1. Si dice *determinante del 2° ord*

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_1$$

Esempi:

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 7 \times 8 - 5 \times$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a & b \end{vmatrix} = (a+b)b - (a -$$

Si dice *determinante del 3° ordine* l'espressione

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

ossia, indicando con $\Delta^{(2)}_{r,s}$ il determinante del 2° ordine che si ottiene da Δ sopprimendo gli elementi che hanno per primo indice r (elem. della r^a linea) e quelli che hanno per secondo indice s (elem. della s^a colonna):

$$\Delta^{(3)} = a_{11}\,\Delta^{(2)}_{11} - a_{12}\,\Delta^{(2)}_{12} + a_{13}\,\Delta^{(2)}_{13}.$$

Esempio:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & -4 \\ 6 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7\,[8 \times 9 - (-4) \times 1] - 5\,[2 \times 9 - (-4) \times 6] + 3\,[2 \times 1 - 8 \times 6] +$$

$$= 7 \times 76 - 5 \times 42 + 3 \times (-46) = 184.$$

Si dice *determinante del 4° ordine* l'espressione

$$\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\,\Delta^{(3)}_{11} - a_{12}\,\Delta^{(3)}_{12} + a_{13}\,\Delta^{(3)}_{13} - a_{14}\,\Delta^{(3)}_{14},$$

dove $\Delta^{(3)}_{r,s}$ indica il determinante del 3° ordine che si ottiene sopprimendo in $\Delta^{(4)}$ gli elementi della linea r^a e quelli della colonna s^a.

Così seguitando si potrebbero analogamente definire i determinanti del 5° ord., del 6° ord., ecc.

Immaginiamo già definito il determinante dell'ordine $n-1$; diremo *determinante dell'ordine* n l'espressione

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,\Delta^{(n-1)}_{11} - a_{12}\,\Delta^{(n-1)}_{12} + a_{13}\,\Delta^{(n-1)}_{13} - \dots + (-1)^{n-1} a_{1,n}\,\Delta^{(n-1)}_{1,n},$$

indicando, al solito, con $\Delta^{(n-1)}_{r,s}$ il determinante dell'ordine $n-1$ che si ottiene da $\Delta^{(n)}$ sopprimendo gli elementi della linea r^a e quelli della colonna s^a.

*
* *

2. Per dimostrare varie proprietà dei determinanti useremo il metodo d'induzione; proveremo cioè che tali proprietà sono verifi-

cate per $\Delta^{(2)}$ e dimostreremo che, per $\Delta^{(n-1)}$, sono verificate anche pe

TEOREMA I. — *Scambiando le lin non si altera; cioè i due determina*

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ e}$$

hanno lo stesso valore.

Per $\Delta^{(2)}$ infatti si ha

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,,$$

e quindi

$$\Delta^{(2)} =$$

Supponiamo ora di avere già d

$$\Delta^{(n-1)} =$$

e dimostriamo che è pure

$$\Delta^{(n)} =$$

Si ha infatti

$$\Delta^{(n)} = a_{11}\Delta_{11}^{(n-1)} - a_{12}\Delta_{12}^{(n-1)} + a_{13}\Delta$$

ed inoltre

$$\Delta_{11}^{(n-1)} = \Delta'^{(n-1)}_{11}$$
$$\Delta_{1s}^{(n-1)} = \Delta'^{(n-1)}_{s1} = a_{21}\Delta'^{(n-2)}_{1,s;1,2} - a_{31}\Delta$$

dove con $\Delta_{rs}^{(n-1)}$ si indica il determina gli elementi della linea r^a e quelli indica il determinante ottenuto da delle linee r^a e r'^a e quelli delle co

Avremo perciò

$$\begin{aligned}\Delta^{(n)} = a_{11}\Delta'^{(n-1)}_{11} &- a_{12}\{a_{21}\Delta'^{(n-2)}_{1,2;1,2} - a_{31}\Delta \\ &+ a_{13}\{a_{21}\Delta'^{(n-2)}_{1,3;1,2} - a_{31}\Delta \\ &- \dots\dots\dots\dots \\ &+(-1)^{n-1}a_{1n}\{a_{21}\Delta'^{(n-2)}_{1,n;1,2} - a_{31}\Delta \\ = a_{11}\Delta'^{(n-1)}_{11} &- a_{21}\{a_{12}\Delta'^{(n-2)}_{1,2;1,2} - a_{13}\Delta \\ &+ a_{31}\{a_{12}\Delta'^{(n-2)}_{1,2;1,3} - a_{13}\Delta \\ &- \dots\dots\dots\dots \\ &+(-1)^{n-1}a_{n1}\{a_{12}\Delta'^{(n-2)}_{1,2;1,n} - a_{13}\Delta\end{aligned}$$

ma poichè è:

$$a_{12}\Delta'^{(n-1)}_{1,2;1,s} - a_{13}\Delta'^{(n-2)}_{1,3;1,s} + \dots +$$

avremo finalmente

$$\Delta^{(n)} = a_{11}\Delta'^{(n-1)}_{11} - a_{21}\Delta'^{(n-1)}_{12} + a_{31}\Delta'^{(n-1)}_{13} - \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}\Delta'_{1n} = \Delta'^{(n)}. \text{ c.d.d.}$$

Per il teorema dimostrato qualunque proprietà che troveremo per le *linee* di un determinante varrà pure per le *colonne* ed inversamente.

Corollario. — Dal teorema dimostrato resulta:

$$\begin{aligned}\Delta^{(n)} = \Delta'^{(n)} &= a_{11}\Delta'^{(n-1)}_{11} - a_{21}\Delta'^{(n-1)}_{12} + a_{31}\Delta'^{(n-1)}_{13} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}\Delta'^{(n-1)}_{1n} \\ &= a_{11}\Delta^{(n-1)}_{11} - a_{21}\Delta^{(n-1)}_{21} + a_{31}\Delta^{(n-1)}_{31} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}\Delta^{(n-1)}_{n,1}.\end{aligned}$$

Esempio:

a) Secondo la definizione di $\Delta^{(3)}$, si ha:

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 8 \times 16 - 4 \times 24 + 5 \times (-20) = -68.$$

b) Secondo il corollario precedente si ha invece

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 8 \times 16 - 7 \times 19 + 9 \times (-7) = -68.$$

Si dice che $\Delta^{(3)}$ in *a*) è stato *sviluppato rispetto agli elementi della 1ª linea* e in *b*) è stato invece *sviluppato rispetto agli elementi della 1ª colonna.*

Teorema II. — *Se in un determinante si scambiano fra loro due colonne (linee) il determinante conserva il suo valore assoluto, ma cambia di segno.*

Per i determinanti del 2° ordine si ha

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\Delta^{(2)}.$$

Supposto di avere dimostrato la proprietà per $\Delta^{(n-1)}$, prima di dimostrarla per $\Delta^{(n)}$, osserviamo che se in un $\Delta^{(n-1)}$ si trasporta la s^a colonna fra le colonne $k-1^a$ e k^a, se per es. è $k > s$ equivale a scambiare prima le colonne s^a e $(s+1)^a$, poi s^a e $(s+2)^a$, ... e finalmente s^a e k^a. In tal modo il determinante cambierà di segno tante volte quanti sono gli scambi fatti; ma questi sono $s-k$ e perciò il determinante cambierà di segno, se $s-k$ è dispari, rimarrà inalterato se $s-k$ è pari. Ciò premesso consideriamo il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ns} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ottenuto da Δ_n scambiando le colonne k^a ed s^a; sviluppando tale determinante rispetto agli elementi della 1ª linea, avremo:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} \dots a_{2s} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n2} \dots a_{ns} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}\, a_{23} \dots a_{2s} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n3} \dots a_{ns} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots a_{2s} \dots a_{2k} \dots a_{2,n-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \dots a_{ns} \dots a_{nk} \dots a_{n,n-1} \end{vmatrix}. \qquad (\alpha)$$

Ora osserveremo che i determinanti di ordine $n-1$ per i quali vanno moltiplicati rispettivamente a_{11}, a_{12}, $a_{13} \dots a_{1,s-1}$, $a_{1,s+1} \dots$ $\dots a_{1,k-1}$, $a_{1,k+1} \dots a_{1,n}$ sono rispettivamente uguali in valore assoluto e contrari di segno a $\Delta^{(n-1)}_{1,2}$, $\Delta^{(n-1)}_{1,3} \dots \Delta^{(n-1)}_{1,s-1}$, $\Delta^{(n-1)}_{1,s+1}, \dots \Delta^{(n-1)}_{1,k-1}$, $\Delta^{(n-1)}_{1,k+1}$, $\dots \Delta^{(n-1)}_{1,n}$, perchè si otterrebbero da questi con lo scambio di due colonne, ed il teorema si ammette come dimostrato per $\Delta^{(n-1)}$; in quanto ai determinanti che moltiplicano a_{1s} e a_{1k}, si può osservare che per ottenere da questi rispettivamente $\Delta^{(n-1)}_{1s}$ e $\Delta^{(n-1)}_{1k}$ occorrerebbe portare la colonna k^a nel posto precedente alla s^a e la colonna s^a nel posto seguente alla k^a, e quindi cambiano di segno se $k-s$ è dispari e non cambiano se $k-s$ è pari; ma secondo che $k-s$ è dispari o pari i termini che hanno per coefficienti a_{1k} ed a_{1s} hanno segno contrario od eguale, dunque in ogni caso i termini dell'espressione (α) sono eguali in valore assoluto e di segno contrario a quelli dello sviluppo di $\Delta^{(n)}$ rispetto agli elementi della 1ª linea e quindi l'espressione (α) equivale a $-\Delta^{(n)}$ c. d. d.

Corollario I. — *In un determinante qualunque colonna (linea) può trasportarsi ad occupare il 1º posto, cambiando di segno il determinante, se la colonna (linea) è d'ordine pari, e lasciandolo invariato, se è di ordine dispari.*

Corollario II. — *Si può sviluppare un determinante rispetto agli elementi di una colonna (linea) qualunque, attribuendo al 1º termine dello sviluppo il segno* (+) *o* (—) *secondo che la colonna (linea) è di ordine dispari o pari e alternando i segni nei successivi termini*, cioè

$$\Delta^{(n)} = (-1)^{s+1} a_{1s} \Delta^{(n-1)}_{1s} + (-1)^{s+2} a_{2s} \Delta^{(n-1)}_{2s} + \dots + (-1)^{s+n} a_{ns} \Delta^{(n-1)}_{ns}.$$

Esempio:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-7) \times 18 + 3 \times (-2) - 8 \times (-41) = -126 - 6 - 328 = -460.$$

Corollario III. — *Se un determinante ha una colonna (linea) costituita da elementi nulli ad eccezione di uno,* a_{rs}, *si ha*

$$\Delta^{(n)} = (-1)^{r+s} a_{rs} \Delta^{(n-1)}_{r,s}.$$

Esempio:

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b & 1 \\ a-b & a+b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = c\,\{(a+b)^2 - (a-b)^2\} = 4abc.$$

Corollario IV. — *Se un determinante ha due colonne (linee) eguali, è nullo.*

Infatti se indichiamo con $\Delta^{(n)}$ il determinante dato e con $\Delta_1^{(n)}$ quello che si ottiene scambiando fra loro le due colonne (linee) eguali, per il teor. II, dovremo avere

$$\Delta^{(n)} = -\Delta_1^{(n)};$$

ma poichè evidentemente è

$$\Delta^{(n)} = \Delta_1^{(n)},$$

sommando membro a membro, avremo

$$2\Delta^{(n)} = 0, \qquad \text{cioè } \Delta^{(n)} = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Corollario V. — *Se un determinante ha una colonna (linea) composta di termini nulli, esso è nullo.*

È evidente, immaginando di sviluppare il determinante rispetto agli elementi di quella colonna (linea).

Corollario VI. — *Moltiplicando o dividendo tutti gli elementi di una colonna (linea) per un certo numero, il determinante viene moltiplicato per quel numero.*

Infatti se si moltiplica per es. gli elementi della colonna s^a per il numero m; sviluppando il determinante che si ottiene rispetto agli elementi di quella colonna si avrà:

$$(-1)^{s+1} m a_{1s} \Delta_{1s}^{(n-1)} + (-1)^{s+2} m a_{2s} \Delta_{2s}^{(n-1)} + \ldots (-1)^{s+n} m a_{ns} \Delta_{ns}^{(n-1)} =$$
$$= m[(-1)^{s+1} a_{1s} \Delta_{1s}^{(n-1)} + (-1)^{s+2} a_{2s} \Delta_{2s}^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{s+n} a_{ns} \Delta_{ns}^{(n-1)}] = m\Delta^{(n)}$$

c. d. d.

Corollario VII. — *Se tutti gli elementi di una colonna (linea) hanno un fattore comune, tale fattore può mettersi in evidenza, considerandolo cioè come coefficiente del determinante,* per es.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & m a_{1s} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & m a_{2s} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & m a_{ns} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ns} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Corollario VIII. — *Se un determinante ha due colonne (linee) composte di elementi rispettivamente proporzionali esso è nullo* (cfr. Cor. IV e VII).

3. Teorema III. — *Se gli elementi della* s^a *colonna (linea) di un determinante sono polinomi di* m *termini, il determinante è uguale alla somma di* m *determinanti dello stesso ordine e nei quali tutte le colonne (linee), all'infuori dell'* s^a, *sono rispettivamente eguali a quelle del determinante dato e nell'* i^0 *determinante gli elementi dell'* s^a *colonna (linea) sono rispettivamente gli* i^i *termini dei polinomi appartenenti alla stessa linea (colonna) nel determinante dato.*

Si abbia infatti il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots, (a_{1s} + b_{1s} + \ldots + z_{1s}), \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots, (a_{2s} + b_{2s} + \ldots + z_{2s}), \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots, (a_{ns} + b_{ns} + \ldots + z_{ns}), \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sviluppandolo rispetto agli elementi della s^a colonna si ha

$$\begin{aligned} &(-1)^{s+1}(a_{1s}+b_{1s}+\ldots+z_{1s})\Delta_{1s}^{(n-1)} + (-1)^{s+2}(a_{2s}+b_{2s}+\ldots+z_{2s})\Delta_{2s}^{(n-1)} + \\ &\quad + \ldots + (-1)^{s+n}(a_{ns}+b_{ns}+\ldots+z_{ns})\Delta_{ns}^{(n-1)} = \\ &= (-1)^{s+1}a_{1s}\Delta_{1s}^{(n-1)} + (-1)^{s+2}a_{2s}\Delta_{2s}^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{s+n}a_{ns}\Delta_{ns}^{(n-1)} + \\ &+ (-1)^{s+1}b_{1s}\Delta_{1s}^{(n-1)} + (-1)^{s+2}b_{2s}\Delta_{2s}^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{s+n}b_{ns}\Delta_{ns}^{(n-1)} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (-1)^{s+1}z_{1s}\Delta_{1s}^{(n-1)} + (-1)^{s+2}z_{2s}\Delta_{2s}^{(n-1)} + \ldots + (-1)^{s+n}z_{ns}\Delta_{ns}^{(n-1)} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1s} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2s} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{ns} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots b_{1s} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots b_{2s} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots b_{ns} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots \\ &\ldots + \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots z_{1s} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots z_{2s} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots z_{ns} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

Volendo applicare il teorema ora dimostrato per sviluppare un determinante nel quale i termini di una colonna (linea) sono polinomi che non hanno tutti lo stesso numero di termini, basterà supplire ai termini mancanti con zeri; esempio:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & \\ b & a+b & 1 \\ c & a+b+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+0+0 & 1 \\ b & a+b+0 & 1 \\ c & a+b+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & a & 1 \\ c & a & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b & b & 1 \\ c & b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Il 1° determinante è nullo (Cor. VIII del Teor. II); si ha inoltre: (Cor. VII del Teor. II; Cor. IV del Teor. II, ecc.):

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b & b & 1 \\ c & b & 1 \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = b\left\{a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} b & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix}\right\} = b(b-c)$$

e per il Cor. III del Teor. II si ha

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} = -c\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix} = -c(a-c),$$

e quindi

$$\Delta = b(b-c) - c(a-c).$$

Teorema IV. — *Aggiungendo rispettivamente agli elementi di una colonna (linea) quelli di un'altra colonna (linea), moltiplicati (o divisi) per uno stesso numero, il determinante non si altera.*

Infatti per il teor. preced. si ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1s} + ma_{1k} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2s} + ma_{2k} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{ns} + ma_{nk} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1s} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2s} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{ns} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots ma_{1k} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots ma_{2k} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots ma_{nk} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

e poichè, per il coroll. VIII del teor. II, l'ultimo determinante è nullo, il teorema è dimostrato.

Mediante questo teorema si può sviluppare anche nel seguente modo il determinante Δ del § precedente, togliendo prima dagli elementi della 3ª linea quelli della 2ª, poi dagli elementi della 2ª quelli della 1ª ed applicando il coroll. III del teor. II:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & a+b & 1 \\ c & a+b+c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & a+b & 1 \\ c-b & c & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b-a & b & 0 \\ c-b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b \\ c-b & c \end{vmatrix} = (b-a)\,c - b\,(c-b) =$$

$$= b\,(b-c) - c\,(a-c),$$

come si è trovato con altra via.

***

4. Per dare un'applicazione della teoria dei determinanti dimostriamo il seguente

Teorema V. — *Un sistema lineare di* n *equazioni ad* n *incognite*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n = k_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n = k_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \dots + a_{nn}\,x_n = k_n \end{array}\right\}$$

se il determinante

$$\Delta^{(n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

formato coi coefficienti delle incognite è diverso da zero, ha una sola soluzione data da

$$x_1 = \frac{\Delta_1^{(n)}}{\Delta^{(n)}} \quad x_2 = \frac{\Delta_2^{(n)}}{\Delta^{(n)}} \dots \quad x_i = \frac{\Delta_i^{(n)}}{\Delta^{(n)}} \dots \quad x_n = \frac{\Delta_n^{(n)}}{\Delta^{(n)}}$$

dove in in generale $\Delta_i^{(n)}$ *rappresenta ciò che diventa* $\Delta^{(n)}$, *quando al posto dei coefficienti della* x_i *si sostituiscono i corrispondenti termini noti* $k_1\ k_2 \ldots k_n$.

Infatti si ha (coroll. VI del teor. II):

$$x_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & x_i a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & x_i a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & x_i a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

e se ai termini della i^a colonna aggiungiamo rispettivamente quelli delle colonne $1^a, 2^a, \ldots (i-1)^a, (i+1)^a, \ldots n^a$ moltiplicati rispettivamente per $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$, poichè è

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = k_j,$$

avremo

$$x_i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & k_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & k_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & k_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e quindi

$$x_i = \frac{\Delta_i^{(n)}}{\Delta^{(n)}}. \qquad \text{c. d. d.}$$

Questa è dunque l'unica soluzione possibile del dato sistema. Inversamente è facile dimostrare che i detti valori verificano effettivamente il sistema stesso.

Esempio. — Risolviamo il sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Avremo:

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \times (-2-3) - 5 \times (1-6) - 1 \times (1+4) = -15 + 25 - 5 = 5$$

$$\Delta_1^{(3)} = \begin{vmatrix} 10 & 5 & -1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \times (-2-3) - 5 \times (6-21) - 1 \times (6+14) = -50 + 75 - 20 = 5$$

$$\Delta_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \times (6-21) - 10 \times (1-6) - 1 \times (7-12) = -45 + 50 + 5 = 10$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \times (-14-6) - 5 \times (7-12) + 10 \times (1+4) = -60 + 25 + 50 = 15$$

e quindi:

$$x_1 = \frac{\Delta_1^{(3)}}{\Delta^3} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2^{(3)}}{\Delta^{(3)}} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3^{(3)}}{\Delta^3} = 3.$$

Nell'esempio precedente si è fatto uso della sola definizione di determinante; usando i teoremi dimostrati, si può pervenire in altro modo agli stessi resultati; si ha per es.:

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e sottraendo dagli elementi della 2ª colonna rispettivamente quelli della 3ª (Teor. IV) si ha

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e togliendo dagli elementi della 1ª colonna rispettivamente quelli della 3ª, moltiplicati per 2 (Teor. IV):

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -1 \\ -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e per il Coroll. III del Teor. II:

$$\Delta^{(3)} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$$

e sottraendo dagli elementi della 2ª colonna quelli della 1ª:

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -[1 \times (-5)] = 5.$$

Analogamente si potrebbe fare per $\Delta_1^{(3)}$, $\Delta_2^{(3)}$, $\Delta_3^{(3)}$.

G. Cardoso-Laynes.

Savona, 1906.

SU ALCUNE PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO

1. Le rette e i punti coniugati isogonali rispetto a un triangolo godono di molte interessantissime proprietà, la conoscenza delle quali può tornar utile in molte ricerche. Credo perciò non inutile esporre qualcuna fra le citate proprietà, che credo poco nota, e di mostrarne l'applicazione risolvendo alcune notevoli questioni sul triangolo.

2. Teorema. — *I lati del triangolo podario d'un punto, rispetto a un dato triangolo, sono rispettivamente perpendicolari alle coniugate isogonali delle congiungenti i vertici con quel punto.*

Siano infatti P_a, P_b, P_c rispettivamente le proiezioni ortogonali d'un punto P, sui lati BC, CA, AB d'un triangolo ABC, e sia P' il coniugato isogonale di P. Il quadrangolo AP_bPP_c è, evidentemente inscrittibile in un circolo, laonde si ha

$$P\widehat{A}B = P\widehat{P_b}P_c,$$

e quindi, essendo

$$P\widehat{A}B = P'\widehat{A}C,$$

risulta che gli angoli $P\widehat{P_b}P_c$, $P'\widehat{A}C$ sono eguali, e siccome inoltre è $PP_b \perp AC$ sarà necessariamente

$$P_bP_c \perp AP'. \qquad \text{c. v. d.}$$

Questo teorema suggerisce una risoluzione molto semplice del problema:

" *In un dato triangolo, inscrivere un triangolo coi lati ordinatamente perpendicolari alle rette che congiungono i vertici di esso con un punto fissato nel suo piano* ".

Basta costruire il triangolo podario del coniugato isogonale del punto dato.

3. Teorema. — *I punti d'incontro delle circonferenze descritte sui lati* BC, CA, AB *d'un triangolo* ABC, *ed i cui archi interni rispetto al triangolo sono capaci rispettivamente degli angoli* $\pi - A'$, $\pi - B'$, $\pi - C'$; A', B', C', *hanno per coniugati isogonali i punti d'incontro delle circonferenze descritte sugli stessi lati, ed i cui archi interni sono capaci degli angoli* $A + A'$, $B + B'$, $C + C'$; $A - A'$, $B - B'$, $C - C'$, *essendo* A', B', C' *angoli d'un triangolo* A'B'C'.

Siano infatti N, N' rispettivamente i punti di concorrenza delle due prime terne di circonferenze summenzionate; M, M' i punti coniugati isogonali di N, N'. Si ha

$$B\widehat{M}C + B\widehat{N}C = 2\pi - (M\widehat{B}C + M\widehat{C}B + N\widehat{B}C + N\widehat{C}B) = \\ = 2\pi - (B + C) = \pi + A,$$

e quindi, essendo

$$B\widehat{N}C = \pi - A'$$

risulta

$$B\widehat{M}C = A + A',$$

ossia deduciamo che M è un punto dell'arco capace di $A + A'$ descritto sul lato BC. In modo perfettamente analogo dimostriamo che

$$B\widehat{M'}C = A - A',$$

e il teorema è in tal modo dimostrato.

Corollario. — *I triangoli podari dei punti* M, M' *sono simili al triangolo* A'B'C'.

Ciò risulta immediatamente applicando il teorema precedente, unitamente a quello del § 2.

È notevole il caso in cui il punto N sia all'infinito; allora gli angoli A', B', C' sono nulli, o piatti e quindi il punto M è un punto della circonferenza circoscritta; dunque risulta immediatamente la seguente proprietà, che mette in relazione due notevoli teoremi dovuti, l'uno a Beltrami, l'altro a Simson o Wallace:

" *Le coniugate isogonali delle congiungenti i vertici d'un triangolo con un punto della circonferenza circoscritta, sono fra loro parallele, e le proiezioni di quel punto sui lati del triangolo risultano su una retta ad esse perpendicolare* ".

Noi frattanto abbiamo risoluto il problema generale seguente:

Dato un triangolo ABC, *trovare nel suo piano un punto, tale che le proiezioni ortogonali di esso sui lati* BC, CA, AB, *siano vertici d'un triangolo simile ad un triangolo dato* A'B'C'.

4. Siano A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1 le proiezioni ortogonali dei suddetti punti M, M' sui lati BC, CA, AB. Abbiamo com'è facile vedere:

$$B_1C_1 = MA \,.\, \text{sen}\, A; \quad C_1A_1 = MB \,.\, \text{sen}\, B; \quad A_1B_1 = MC \,.\, \text{sen}\, C;$$
$$B'_1C'_1 = M'A \,.\, \text{sen}\, A; \quad C'_1A'_1 = M'B \,.\, \text{sen}\, B; \quad A'_1B'_1 = M'C \,.\, \text{sen}\, C.$$

Perciò, indicando con a, b, c; a', b', c' le misure de' lati dei triangoli ABC, A'B'C' abbiamo,

$$MA : \frac{a'}{a} = MB : \frac{b'}{b} = MC : \frac{c'}{c};$$
$$M'A : \frac{a'}{a} = M'B : \frac{b'}{b} = M'C : \frac{c'}{c}.$$

ossia: " *Le distanze dei punti* M, M' *dai vertici del triangolo sono proporzionali ai rapporti dei lati di* A'B'C' *a quelli di* ABC ".

Indicando con d_a, d_b, d_c; d'_a, d'_b, d'_c le distanze dei punti M', M dai lati, abbiamo:

$$MB \,.\, MC \,.\, \text{sen}\,(A + A') = a d_a,$$

onde sarà

$$d_a = \frac{MB \,.\, MC \,.\, \text{sen}\,(A + A')}{a} = \frac{C_1A_1 \,.\, A_1B_1 \,.\, \text{sen}\,(A + A')}{a \,.\, \text{sen} \,.\, B \,\text{sen}\, C} =$$
$$= 2R \frac{S_1}{S} \cdot \frac{\text{sen}\,(A + A')}{\text{sen}\, A'},$$

dove S, S_1, R sono rispettivamente le aree dei triangoli ABC, $A_1B_1C_1$ e il raggio del cerchio circoscritto ad ABC. Analogamente si dimostra essere

$$d'_a = 2R \frac{S_1}{S} \cdot \frac{\text{sen}\,(A - A')}{\text{sen}\, A'}.$$

Insomma: " *Le distanze dei punti* M, M' *dai lati del triangolo sono rispettivamente proporzionali ai rapporti*

$$\frac{\text{sen}\,(A + A')}{\text{sen}\, A'}, \quad \frac{\text{sen}\,(B + B')}{\text{sen}\, B'}, \quad \frac{\text{sen}\,(C + C')}{\text{sen}\, C'},$$
$$\frac{\text{sen}\,(A - A')}{\text{sen}\, A'}, \quad \frac{\text{sen}\,(B - B')}{\text{sen}\, B'}, \quad \frac{\text{sen}\,(C - C')}{\text{sen}\, C'}.$$

5. Applicando le proprietà dianzi dimostrate, possiamo facilmente trattare la seguente questione generale:

" *Nel piano d'un dato triangolo, trovare un punto le cui distanze dai vertici* A, B, C *di esso siano proporzionali ai numeri* n_a, n_b, n_c ".

Si costruisca perciò il triangolo A'B'C', coi lati proporzionali alle lunghezze $n_a a$, $n_b b$, $n_c c$. Allora i punti di concorrenza delle circonfe-

renze a cui appartengono gli archi descritti sui lati BC, CA, AB, internamente al triangolo, e capaci rispettivamente degli angoli $A + A'$, $B + B'$, $C + C'$; $A - A'$, $B - B'$, $C - C'$, rispondono al problema. Vi sono dunque, in generale, due soluzioni del problema, purchè uno qualunque segmenti dei $n_a a$, $n_b b$, $n_c c$ sia minore della somma degli altri due, e maggiore della loro differenza.

Se, invece che a tre numeri, le distanze si richieggono proporzionali a tre quantità omogenee, noi potremo sempre ricondurci al caso precedente, poichè potremo facilmente determinare tre numeri proporzionali alle quantità date.

6. Un caso particolare molto importante si ha allorquando A'B'C' è un triangolo equilatero; allora è facile conchiudere quanto segue:

Le due terne di circonferenze a cui appartengono gli archi capaci di $\widehat{A} + 60^\circ$, $\widehat{B} + 60^\circ$, $\widehat{C} + 60^\circ$; $\widehat{A} - 60^\circ$, $\widehat{B} - 60^\circ$, $\widehat{C} - 60^\circ$, *descritti sui lati* BC, CA, AB *d'un triangolo* ABC, *internamente al medesimo, concorrono rispettivamente in due punti, che sono i coniugati isogonali de'* centri isogonici *del triangolo; le loro distanze dai vertici sono inversamente proporzionali ai lati opposti e i loro triangoli podari sono equilateri.*

Questi due punti son detti *centri isodinamici* del triangolo.

Se il triangolo A'B'C' si costruisce coi lati inversamente proporzionali a quelli del dato, o, se si vuole, co' lati eguali rispettivamente alle altezze del dato, *si otterranno*, con la costruzione precedente, *i punti del piano del triangolo, le cui distanze dai vertici di esso sono inversamente proporzionali ai quadrati dei lati opposti.*

R. Vercellin.

76ª QUISTIONE A CONCORSO

Trovare una formula generale che permetta di trovare infinite soluzioni in numeri interi e positivi dell'equazione

$$\pm x_1^n \pm x_2^n \pm x_3^n \pm \ldots \pm x_k^n = \pm x_{k+1}^{n+1}.$$

Come casi particolari si risolvano in numeri interi e positivi le seguenti equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^3 \qquad \text{(I)}$$

$$x^n \pm y^n = z^{n+1} \qquad \text{(II)}$$

$$x^{2n+1} \pm y^{2n+1} = z^{2n} \qquad \text{(III)}$$

ed il sistema

$$x^2 + y^2 = u^2 - v^2 = z^3.$$

Fabio Ferrari.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 30 aprile 1907.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONE DELLA 73ª QUISTIONE A CONCORSO

Trovare la condizione necessaria e sufficiente che deve sussistere fra a, b, c *affinchè possano coesistere le equazioni*

$$\overset{(I)}{y^2+z^2-2ayz=0,}\quad \overset{(II)}{z^2+x^2-2bxz=0,}\quad \overset{(III)}{x^2+y^2-2cxy=0.}$$

A. Bassi.

Pervennero 9 risoluzioni, delle quali 7 sono o inesatte o incompiute o poco chiare, mentre sono abbastanza buone quelle di **E. De Conz**, R. I. T. di *Venezia* e di **A. Vergottini**, S. I. di *Fermo* e più particolarmente la seconda; perciò il premio promesso è stato conferito al signor

A. VERGOTTINI.

A. Bassi.

Risoluzione. — Le equazioni date coesistono per valori quali si vogliano di a, b, c: invero esse sono verificate da

$$x=y=z=0.$$

La condizione necessaria e sufficiente da determinare riguarda la coesistenza delle equazioni date per valori di x, y, z diversi da zero. Ora se nell'identità

$$x^2(y^2+z^2)^2+y^2(x^2+z^2)^2+z^2(y^2+x^2)^2-4x^2y^2z^2=(y^2+z^2)(z^2+x^2)(x^2+y^2)$$

sostituiamo alle espressioni poste fra parentesi i loro valori ricavati dalle equazioni date, abbiamo

$$4x^2y^2z^2a^2+4x^2y^2z^2b^2+4x^2y^2z^2c^2-4x^2y^2z^2=8abc\,x^2y^2z^2,$$

da cui, semplificando si ricava la condizione cercata

$$a^2+b^2+c^2-2abc=1. \tag{1}$$

La (1) è necessaria: per provare che è sufficiente basterà dimostrare che dalla (1) e da due delle equazioni date si può ricavare la terza; ad es. che dalla (1) e dalle (I) e (II) si può ottenere la (III).

Risolvendo la (1) rispetto a c si ha

$$c=ab\pm\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}. \tag{2}$$

Sostituendo nella (2) ad a, b i loro valori ricavati dalle (I), (II) si ottiene facilmente

$$c=\frac{(y^2+z^2)(x^2+z^2)}{4xyz^2}\pm\frac{(y^2-z^2)(z^2-x^2)}{4xyz^2}.$$

Se nella precedente si considera il segno + dopo qualche semplificazione si ottiene la (III).

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

791, 792, 801, 802, 803, 805, 806, 807, 808, 809 E 818

791. *In un cerchio è inscritto un trapezio isoscele, la cui base è il diametro. Conoscendo il raggio e il rapporto fra la somma dei lati paralleli e quella degli altri due, determinare gli elementi incogniti. Esaminare i casi particolari.*

E. Cutore.

Indichiamo con $2r$ la misura del diametro, con $2x$ quella del lato parallelo al diametro, con y quella di uno dei lati eguali e con k il rapporto dato. Distingueremo due casi, secondo che il trapezio è convesso, o intrecciato.

Se il trapezio è convesso si ha il sistema:

$$\frac{r+x}{y}=k \qquad y^2=2r(r-x)$$

dalla prima delle quali di ricava

$$x=ky-r \tag{1}$$

che, sostituita nella seconda, ci dà l'equazione

$$y^2+2rky-4r^2=0. \tag{2}$$

Poichè dalla (1), dovendo essere $x>0$, si ricava $y>\frac{r}{k}$, ed essendo il trapezio convesso dev'essere $y<r\sqrt{2}$, si ha il sistema risolutivo:

$$\begin{cases} f(y)=y^2+2rky-4r^2=0 \\ \frac{r}{k}<y<r\sqrt{2}. \end{cases}$$

Di qui, intanto, si vede che dev'essere $\frac{r}{k}<r\sqrt{2}$, cioè $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$ da cui $k^2>\frac{1}{2}$; e perciò è $f\left(\frac{r}{k}\right)=\frac{r^2}{k^2}(1-2k^2)<0$, mentre è $f(r\sqrt{2})=2r^2(k\sqrt{2}-1)>0$. Il che prova, che indicando con y_1 e y_2 le radici di $f(y)=0$, esse son sempre reali, ed è

$$y_1<\frac{r}{k}<y_2<r\sqrt{2}$$

cioè la sola radice maggiore dell'equazione soddisfa il problema: e ciò sempre, purchè sia $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Se il trapezio è intrecciato si ha il sistema:

$$\frac{r+x}{y}=k \qquad y^2=2r(r+x).$$

Ricavando x dalla prima, e sostituendo nella seconda, si ha l'equazione:

$$y^2-2rky=0$$

che ci dà la soluzione limite $y=0$ e l'altra $y=2rk$, colle condizioni $2rk<2r$, cioè $k<1$ e $2rk>r\sqrt{2}$,

cioè $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Riassumendo si ha:

Se $k < \frac{\sqrt{2}}{2}$; **il problema non ha nessuna soluzione.**

„ $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **una soluzione limite. (Il trapezio degenera in un tr. isoscele.)**

„ $\frac{\sqrt{2}}{2} < k < 1$; **due soluzioni: un trapezio convesso e uno intrecciato.**

„ $k = 1$; **una soluzione ordinaria (trapezio convesso) e una limite (il trapezio intrecciato si riduce al diametro).**

„ $k > 1$; **una soluzione ordinaria (trapezio convesso).**

La soluzione dell'equazione (2) che serve pel problema, è

$$y = r(-k + \sqrt{k^2 + 4})$$

e dalla (1) è facile ricavare x.

Casi particolari.

Se $k = 1$, si ha $y = r(-1 + \sqrt{5})$, cioè ognuno dei lati non paralleli è la parte aurea del diametro.

Se $k = \frac{1}{2}$; si ha $y = r$, $2x = r$, cioè il trapezio è un semiesagono regolare.

Mandarono buone risoluzioni, senza però tener conto del trapezio intrecciato i sigg. **Bellomo, Ferrari V., Gramaccini** e **Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Ferrari F.** di *Pavia*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Becchi**, R. L. di *Savona*; **Mancia**, I. T. P. di *Spoleto*; **Colombino**, R. I. T. di *Torino*.

Tra questi, il sig. Semenza dette una risoluzione trigonometrica, il sig. Mancia calcolò gli angoli del trapezio in parecchi casi particolari; infine il sig. Ferrari F. notò che nell'enunciato del problema poteva tralasciarsi di dire che il trapezio dev'essere isoscele; e determinò il massimo e il minimo dell'area e del perimetro del trapezio inscritto nel semicircolo.

Mandarono anche soluzioni, ma incomplete o poco esatte i sigg. **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Antoldi**, R. U. e **Corrado**, R. L. Minghetti di *Bologna*; **Napolitano**, R. I. T. di *Caserta*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Bitossi**, *Forlì*; **Morocutti**, R. S. S. Nav. di *Genova*; **Romagnoli**, R. I. T. di *Livorno*; **Turola**, R. I. T. di *Mantova*; **Bonaiuti**, R. I. T. di *Modena*; **Pardo**, di *Palermo*; **Cellitti**, R. I. T. di *Roma*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Levi**, R. L. M. Polo di *Venezia*; **Brusoni, De Conz** e **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*; **Micheletti**, R. I. T. di *Verona*.

E. Nannei.

792. *Conoscendo un angolo, la somma dei lati adiacenti e la distanza dal punto medio del lato opposto al punto di contatto di esso con l'incerchio, costruire geometricamente il triangolo.*

E. Cutore.

Risoluzione del sig. **V. Ferrari** del R. I. T. di *Ancona*.

Sia s la somma dei lati b e c che comprendono l'angolo dato A; e d la distanza data dal punto medio M del terzo lato $BC = a$ al punto di contatto A_1 di questo con l'incentro.

Si ha

$$\overline{MA_1} = \overline{CA_1} - \overline{CM} = p - c - \frac{a}{2} = \frac{2p - 2c - a}{2} = \frac{b - c}{2}$$

da cui

$$b - c = 2\,\overline{MA_1}.$$

Si deduce subito che $b = \frac{s}{2} + \overline{MA_1}$ e $c = \frac{s}{2} - \overline{MA_1}$. I lati b e c si posson quindi facilmente costruire e il problema è ridotto a costruire un triangolo conoscendo un angolo e i due lati che lo comprendono.

Risolvettero nello stesso modo il problema i sigg. **Bellomo, Magi e Gramaccini**, R. I. T. di *Ancona*; **Barberino e Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **F. Ferrari** di *Pavia*.

Il sig. **F. Ferrari** osserva che il problema è possibile solo se è $\overline{MA_1} < \frac{s}{2}$. Se poi il segmento $\overline{MA_1}$ fosse nullo il triangolo sarebbe isoscele. Se l'angolo dato è di 60° ed è $\overline{MA_1} = \frac{s}{6}$, il triangolo è rettangolo e l'ipotenusa è uno dei lati adiacenti all'angolo dato. Se l'angolo dato è di 45°, ed è $MA_1 = \frac{s}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, il triangolo è rettangolo e isoscele, ecc.

E. Nannei.

801. *Risolvere i sistemi*

1°. $$\frac{y(1+x^2)}{x(1+y^2)} = a, \qquad \frac{y(1-x^2)}{x(1-y^2)} = b.$$

2°. $$\frac{x^5+y^5}{x^3+x^3} = \frac{121}{13}, \qquad x+y=2.$$

3°. $$\frac{a^3x}{y^2z^2} = \frac{b^3y}{z^2x^2} = \frac{c^3z}{x^2y^2} = 1.$$

A. Bassi.

Risoluzione del sistema 1° del sig. Bellomo, R. I. T. di *Ancona*.

Eseguendo le operazioni indicate nella prima equazione, componendo, e dividendo si ha

$$\frac{y+x^2y}{x+xy^2} = \frac{a}{1}; \qquad \frac{y+x^2y+x+xy^2}{y+x^2y-x-xy^2} = \frac{a+1}{a-1}.$$

Mettendo in evidenza xy,

$$\frac{(y+x)+xy(x+y)}{(y-x)-xy(y-x)} = \frac{a+1}{a-1},$$

da cui facilmente

$$\frac{(x+y)(1+xy)}{(y-x)(1-xy)} = \frac{a+1}{a-1}. \tag{1}$$

Analogamente trasformo la seconda equazione data, ottenendo l'altra:

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(y-x)(1+xy)} = \frac{b+1}{b-1}. \tag{2}$$

Moltiplicando la (1) per la (2) membro a membro:

$$\left(\frac{x+y}{y-x}\right)^2 = \frac{(a+1)(b+1)}{(a-1)(b-1)}.$$

Estraendo la radice quadrata da ambo i membri:

$$\frac{x+y}{y-x} = \pm\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{(a-1)(b-1)}}.$$

Indicando il radicale con k avremo:

$$\frac{x+y}{y-x} = \pm k.$$

Componendo e dividendo:

$$\frac{2y}{2x} = \frac{\pm k+1}{\pm k-1} \qquad \frac{y}{x} = \frac{\pm k+1}{\pm k-1}$$

ove i doppi segni si debbono corrispondere.

Indicando con s il secondo membro della relazione precedente si ha:

$$\frac{y}{x} = s,$$

$$y = xs. \tag{3}$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema proposto, si ha

$$\frac{sx(1+x^2)}{x(1+x^2s^2)} = a,$$

$$s + sx^2 = a + as^2x^2$$

$$x^2s(1-as) = a - s$$

$$x^2 = \frac{a-s}{s(1-as)} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{a-s}{s(1-as)}}.$$

Sostituendo nella (3) ad x il proprio valore e portando s sotto il segno di radice si ottiene:

$$y = \pm\sqrt{\frac{s(a-s)}{1-as}}.$$

In generale dunque si hanno quattro soluzioni.

Risoluzione del sistema 2° del sig. **Fresia**, R. I. T. di *Mondovì*.

Ricordando le note identità

$$x^5 + y^5 = (x+y)^5 - 5xy\{x^3 + y^3 + 2xy(x+y)\}$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y),$$

e sostituendo ad $x+y$ il valore dato dalla seconda equazione, la prima si può scrivere

$$\frac{16 - 20xy + 5x^2y^2}{4 - 3xy} = \frac{121}{13},$$

da cui si ricava l'equazione quadratica

$$65x^2y^2 + 103xy - 276 = 0,$$

le cui radici in xy sono

$$xy = \frac{92}{65}$$

$$xy = -3.$$

Tenendo conto della seconda equazione proposta, si hanno i due sistemi risolventi:

$$\text{I.} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \frac{92}{65}. \end{cases}$$

Dal sistema I si avrà l'equazione in z^2

$$z^2 - 2z - 3 = 0,$$

e quindi le soluzioni reali

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -1, \end{cases}$$

per il sistema dato.

Dal sistema II si avrà l'equazione in z_1

$$z_1^2 - 2z_1 + \frac{92}{65} = 0$$

la quale ha le radici immaginarie: $(1 \pm \frac{3i}{65}\sqrt{195})$.

Il sistema dato ammette dunque due soluzioni reali e due immaginarie.

Risoluzione del sistema 3° del proponente.

Osservando che $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ non è soluzione del sistema dato, esso equivale al seguente

$$a^3x = y^2z^2, \qquad b^3y = z^2x^2, \qquad c^3z = x^2y^2,$$

od anche

$$a^3x^3 = b^3y^3 = c^3z^3 = x^2y^2z^2, \tag{1}$$

da cui facilmente si ricava

$$x^3y^3z^3 = a^3b^3c^3,$$

e quindi

$$xyz = abc, \qquad xyz = abc\,\alpha, \qquad xyz = abc\,\alpha^2$$

ove α e α^2 rappresentano le radici immaginarie dell'unità.

Si ha quindi, partendo dal valore reale di xyz, per sostituzione nella (1)

$$x^3 = \frac{b^2c^2}{a}, \qquad y^3 = \frac{c^2a^2}{b}, \qquad z^3 = \frac{a^2b^2}{c},$$

quindi

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{b^2c^2}{a}},$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{b^2c^2}{a}}\,\alpha,$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\frac{b^2c^2}{a}}\,\alpha^2,$$

e analogamente si trovano i valori

$$y_1, y_2, y_3 \text{ di } y, \qquad z_1, z_2, z_3 \text{ di } z.$$

È facile, per sostituzione nel sistema dato, convincersi che soddisfano le soluzioni:

$$\begin{array}{ll} & x_1, y_1, z_1 \\ & x_1, y_2, z_3 \\ & x_1, y_3, z_2 \\ x_2, y_2, z_2 & x_3, z_1, y_2 \\ x_2, y_1, z_3 & x_2, z_1, y_3 \\ x_3, y_1, z_2 & x_3, y_3, z_3 \end{array}$$

di cui solo la prima è reale.

Analoghi resultati si avranno se si partirà dai valori immaginari di xyz.

Risolvettero più o meno completamente *tutti* i sistemi proposti i sigg. **Ferrari F.**, R. I. T. di *Pavia*; **Vergottini**, S. I. di *Fermo*; **Corrado**, R. L. di *Bologna*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Sonaglia**, **Castiglioni** e **Anau**, R. I. T. di *Firenze*; **Garbelotto** e **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Bellomo**, **Ferrari V.**, **Gramaccini**, **Lanternari**, **Magi** e **Papini**, R. I. T. di *Ancona*; **Bassi**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*.

Risolvettero due o uno solo dei sistemi proposti i sigg. **Fresia**, R. I. T. di *Mondovì*; **Gatti**, R. I. T. di *Alessandria*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Plancich**, L. Priv. di *Portorè*; **Gazzola**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Botto**, R. I. T. di *Firenze*; **De Stefano**, R. L. Garibaldi di *Napoli*; **Salutari**, R. L. di *Macerata*; **Perelli**, R. U. di *Roma*; **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Bitossi**, di *Forlì*; sig.ª **Villani**, R. I. T. di *Pavia*; **D'Amico**, R. I. T. di *Ancona*.

A. Bassi.

802. *Risolvere l'equazione*

$$(1 + k)\frac{\cos x \cos(2x - \alpha)}{\cos(x - \alpha)} = 1 + k \cos 2x.$$

A. Bassi.

Risoluzione. — Sviluppando nel 1° membro e trasportando, si ha facilmente

$$k\left[\frac{\cos x \cos(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)} - \cos 2x\right] = 1 - \frac{\cos x \cos(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)};$$

od anche

$$k\left[\frac{\cos x \cos(2x-\alpha) - \cos 2x \cos(x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)}\right] = \frac{\cos(x-\alpha) - \cos x \cos(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)}. \quad (1)$$

Ora se si osserva che:

$$\cos(x-\alpha) = \cos(2x-\alpha-x) = \cos(2x-\alpha)\cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2x-\alpha),$$

e

$$\cos x \cos(2x-\alpha) - \cos 2x \cos(x-\alpha) =$$
$$= \cos x \cos 2x \cos\alpha + \cos x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen}\alpha - \cos 2x \cos x \cos\alpha - \cos 2x \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\alpha =$$
$$= \operatorname{sen}\alpha(\cos x \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x \cos 2x) = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} x,$$

sostituendo nella (1), si ha senz'altro,

$$k\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\alpha}{\cos(x-\alpha)} = \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)},$$

e quindi le risolventi

$$\operatorname{sen} x = 0, \quad (2)$$
$$\operatorname{sen}(2x-\alpha) = k \operatorname{sen}\alpha. \quad (3)$$

La (2) dà le radici

$$x = h_1\pi \quad (4)$$

ove h_1 rappresenta un intero qualunque positivo, negativo o nullo: e quanto alla (3), se β è il minimo angolo positivo il cui seno ha il valore $k \operatorname{sen}\alpha$, si avrà

$$2x - \alpha = 2\pi h_1 + \beta$$
$$2x - \alpha = \pi(2h_1 + 1) - \beta$$

onde:

$$x = \pi h_1 + \tfrac{1}{2}(\beta + \alpha) \quad (5) \qquad x = \pi h_1 + \tfrac{1}{2}(\pi - \beta + \alpha) \quad (6)$$

Le soluzioni (4) si hanno qualunque sia k; le (5), (6) invece se $k^2 \operatorname{sen}^2\alpha \leqslant 1$; per la loro accettabilità si noti che si dovranno escludere i valori di x che fanno perdere il significato alla equazione data ossia che annullano $\cos(x-\alpha)$.

Risolvettero l'equazione proposta, incompletamente i sigg. **De Conz** e **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*.

In modo più o meno soddisfacente risolvettero la questione **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Mancia**, I. T. di *Spoleto*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Bellomo**, **D'Amico**, **Ferrari** e **Lanternari**, R. I. T. di *Ancona*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*. Altre quattro risoluzioni pervenuteci sono errate. Nessuno fa l'osservazione necessaria che riguarda l'accettabilità o meno delle soluzioni trovate.

A. Bassi.

803. *Risolvere un triangolo rettangolo conoscendo i raggi dei cerchi inscritti nei due triangoli nei quali quello cercato è decomposto dalla congiungente il vertice dell'angolo retto col punto medio dell'ipotenusa.*

A. Bassi.

Risoluzione dei sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*, alquanto modificata.

Siano r_1, r_2 i raggi dei cerchi noti inscritti nei triangoli ABM, AMC, in cui il triangolo ABC, rettangolo in A, rimane decomposto dalla congiungente A col punto medio M dell'ipotenusa. Avremo immediatamente:

$$2r_1(x+y) = yz \qquad 2r_2(x+z) = yz \quad (1)$$

ove con x, y, z indichiamo rispettivamente le misure dell'ipotenusa BC e dei cateti AB, AC.

Se β e γ sono le misure degli angoli acuti del triangolo da risolvere si avrà subito evidentemente

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r_2}{\frac{z}{2}},\qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{r_1}{\frac{y}{2}},$$

ossia

$$z=\frac{2r_2}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}},\qquad y=\frac{2r_1}{\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)}. \tag{2}$$

Sostituendo nelle (1) i valori di y e z dati dalle (2) si ha:

$$x=\frac{2r_1}{\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)}\left(\frac{2r_2}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\,.\,2r_1}-1\right),\quad x=\frac{2r_2}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\left(\frac{2r_1}{2r_2\,.\,\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)}-1\right), \tag{3}$$

donde

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)}\cdot\frac{2r_2}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}-\frac{2r_1}{\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{2r_1}{\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)}-\frac{2r_2}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}},$$

$$r_2-r_1=r_1\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-r_2\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right),$$

e poichè

$$\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}},$$

sostituendo e riducendo, si ottiene

$$r_1\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+2r_1\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-2r_2+r_1=0; \tag{4}$$

da cui

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-1\pm\sqrt{\frac{2r_2}{r_1}}. \tag{5}$$

Noto $\frac{\beta}{2}$ e quindi β e γ, le (2) ci permettono di calcolare y, z, e una delle (3) la x.

Discussione. — Dei due valori di $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ si scarterà subito il negativo, l'altro sarà accettabile se è compreso fra 0 e 1 ossia se

$$0<\sqrt{\frac{2r_2}{r_1}}-1<1$$

oppure se

$$\frac{r_1}{2}<r_2<2r_1. \tag{6}$$

Verificata la (6) si ha un solo valore per β e γ; y e z risultano positivi, e così pure x, che si può ricavare da una delle (3). Il problema ammette allora una e una sola soluzione.

Se

$$r_2=r_1,\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}-1,\quad \beta=45^0=\gamma;\quad y=z=\frac{2r_1}{\sqrt{2}-1}=2r_1(\sqrt{2}+1),$$

$$x=2r_1(2+\sqrt{2}),$$

il triangolo è isoscele. Si noti che potendo considerare, ad es., $r_2>r_1$ la, condizione di possibilità sarà semplicemente:

$$r_1\leqslant r_2<2r_1.$$

Altre risoluzioni dei sigg. **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*; **Salutari**, R. L. di *Macerata*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*, i quali risolvono la questione ma non la discutono, o la discutono incompletamente. Così dicasi delle risoluzioni di **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Anau**, R. I. T. di *Firenze*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*. Lodevole è la risoluzione di **Corrado**, R. L. di *Bologna*, fondata su considerazioni puramente geometriche. Infine un'altra risoluzione pervenutaci è errata.

A. Bassi.

805. *Nell'equazione* $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, *determinare per* b, c, d *valori reali tali che* b, c, d, *siano le radici dell'equazione stessa.*

S. Catania.

Risoluzione dei sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*.

Dall'enunciato del problema si ha

$$b + c + d = -b, \qquad bc + bd + cd = c, \qquad bcd = -d. \tag{1}$$

Dalla terza si ricava subito

$$d(bc + 1) = 0,$$

donde, o

$$d = 0,$$

oppure

$$bc + 1 = 0$$

ossia

$$b = -\frac{1}{c}.$$

Caso 1°. $d = 0$; allora dalle prime due equazioni si ricava

$$2b = -c, \qquad bc = c,$$

ossia, sommando,

$$b(c + 2) = 0,$$

donde, o

$$b = 0,$$

oppure

$$c + 2 = 0,$$

cioè

$$c = -2.$$

Per $b = 0$ si ha $c = 0$, e per $c = -2$ si ha $b = 1$.

Caso 2°. $d \neq 0$; cioè $b = -\frac{1}{c}$, ossia $c = -\frac{1}{b}$.

La seconda delle (1) può scriversi anche

$$b(c + d) + c(d - 1) = 0,$$

ma per la prima questa diventa

$$2b^2 + c(2b + c + 1) = 0,$$

e sostituendo a c il suo valore in funzione di b, si ha

$$2b^4 - 2b^2 + 1 - b = 0$$

ossia

$$2b^2(b^2 - 1) - (b - 1) = 0,$$

cioè

$$(b - 1)[2b^2(b + 1) - 1] = 0$$

donde, o

$$b - 1 = 0,$$

cioè

$$b = 1,$$

e allora

$$c = -1, \qquad d = -1;$$

oppure

$$2b^2(b + 1) - 1 = 0,$$

equazione cubica che ci dà la sola soluzione reale

$$b = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}\right] = k.$$

Riassumendo si hanno le seguenti terne di valori

$$\left.\begin{matrix} b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} b=1 \\ c=-2 \\ d=0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} b=1 \\ c=-1 \\ d=-1 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} b=k \\ c=-\dfrac{1}{k} \\ d=-2k+\dfrac{1}{k} \end{matrix}\right\}.$$

Mandarono analoghe risoluzioni i sigg. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Semenza**, R. I. T. e **Piatti**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **De Conz** e **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*; inoltre abbiamo ricevuto tre soluzioni errate.

E. Nannei.

806. *L'espressione*

$$4\,[a^4 + b^4 - ab\,(a^2 + b^2)]$$

può mettersi sotto la forma $A^2 + 3B^2$.

G. Candido.

1ª **Risoluzione** del sig. **Garbelotto** del R. I. di *Venezia*. Si ha successivamente

$$\begin{aligned} 4\,[a^4 + b^4 - ab\,(a^2 + b^2)] &= 4\,[a^3\,(a-b) - b^3\,(a-b) \\ &= 4\,(a-b)\,(a^3 - b^3) \\ &= (a-b)^2\,(4a^2 + 4b^2 + 4ab) \\ &= (a-b)^2\,[(a+2b)^2 + 3a^2] \\ &= [(a-b)\,(a+2b)]^2 + 3\,[a\,(a-b)]^2 \end{aligned}$$

e la cosa è dimostrata.

2ª **Risoluzione** sostanzialmente analoga dei sigg. **Anau** di *Ivrea*; **Bellomo**, **D'Amico Landernani** e **Papini**, R. I. T. di *Ancona*; **De Stefano**, R. L. di *Napoli*; **Ferri**, I. R. L. di *Arezzo*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Lattuado** di *Milano*; **Vergottini**, S. T. di *Fermo*.

La espressione data, sviluppando ed aggiungendo e togliendo $6a^2b^2$, diviene

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 + 3a^4 - 6a^2b^2 + 3b^4,$$

ossia

$$(a-b)^4 + 3\,(a^2 - b^2)^2,$$

od anche

$$[(a-b)^2]^2 + 3\,(a^2 - b^2)^2;$$

e la cosa è dimostrata.

Risposero pure i sigg. **Bongini**, R. I. T. di *Torino*; **Cellini** di *Forlì*; **Corrado**, R. L. Minghetti di *Bologna*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Ferrari V.**, **Grammaccini** e **Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Orlandi**, I. T. Cavalli e Conti di *Milano*.

Osservazioni del Redattore. — 1ª. La espressione $4a^2 + 4b^2 + 4ab$ si può mettere sotto una delle forme: $(a+2b)^2 + 3a^2$, $(2a+b)^2 + 3b^2$, $(a-b)^2 + 3(a+b)^2$, e ad ognuna di queste corrisponde una decomposizione della espressione data sotto la forma $A^2 + 3B^2$.

2ª. La equazione

$$f_1^4 + f_2^4 - f_1 f_2\,(f_1^2 + f_2^2) = 0$$

dove f_1 ed f_2 non hanno fattori comuni, ha le sue radici imaginarie.

3ª. Le due espressioni

$$16\left[\frac{a^7 + b^7 - ab\,(a^5 + b^5)}{a+b}\right], \qquad 16\left[a^6 + b^6 - 2ab\,\frac{a^5 + b^5}{a+b}\right]$$

possono, come nel precedente esercizio, mettersi sotto la forma $A^2 + 3B^2$.

G. Candido.

807. *Semplificare il polinomio*

$$\begin{aligned}
&(a-x_1)(a-x_2) && \ldots (a-x_n) + \\
&\quad + x_1(a-x_2)(a-x_3) && \ldots (a-x_n) + \\
&\qquad + ax_2(a-x_3) && \ldots (a-x_n) + \\
&\qquad\quad + a^2x_3(a-x_4) && \ldots (a-x_n) + \\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + a^n x_n .
\end{aligned}$$

G. Candido.

Risoluzioni sostanzialmente analoghe dei sigg. Bassi, R. L. di *Milano*; **Bongini e Costa G.**, R. I. T. di *Torino*; **Cellini** di *Forlì*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **De Stefano**, R. I. T. di *Napoli*; **De Conz e Garbelotto**, R. I. T., **Levi**, R. L. di *Venezia*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*.

Indicando le successive linee con $u_0, u_2, \ldots u_n$ si ha

$$\begin{aligned}
&u_0 + u_1 && = a\,(a-x_2)(a-x_3)\ldots(a-x_n) \\
&u_0 + u_1 + u_2 && = a^2(a-x_3)(a-x_4)\ldots(a-x_n) \\
&u_0 + u_1 + u_2 + u_3 && = a^3(a-x_3)(a-x_4)\ldots(a-x_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} && = a^{n-1}(a-x_n) \\
&u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = a^n. && \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nota del Redattore. — Il giovane studioso può servirsi della identità (1) per ottenerne delle altre, scendendo a casi particolari.

Esempio. — Ponendo $x_1 = x_n = \ldots = x_n$ si ha

$$(a-x)^n + x(a-x)^{n-1} + ax(a-x)^{n-2} + a^2x(a-x)^{n-3} + \ldots + a^{n-1}x = a^n.$$

Candido.

808. *Dimostrare l'identità*

$$\sum_{r=1}^{r=m-1} r\,.\,(m-r) = \frac{m(m^2-1)}{6}.$$

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione. — Il primo membro dell'identità da dimostrare si può scrivere:

$$1\,.\,(m-1) + 2\,.\,(m-2) + 3\,.\,(m-3) + \ldots + (m-1)\,.\,(m-[m-1])$$

cioè

$$m\,[1+2+3+\ldots+(m-1)] - [1^2+2^2+3^2+\ldots(m-1)^2]$$

e per le note formule che dànno le somme dei primi n numeri naturali e dei quadrati di essi, facendo nel nostro caso $n = m-1$, l'espressione diviene successivamente:

$$\begin{aligned}
m\,.\,\frac{(m-1)\,.\,m}{2} - \frac{(m-1)\,.\,m\,(2m-1)}{6} &= \\
= \frac{m(m-1)}{6}\,[3m-(2m-1)] &= \\
= \frac{m(m-1)(m+1)}{6} = \frac{m(m^2-1)}{6}&.
\end{aligned}$$

c. d. d.

Inviarono risoluzioni sostanzialmente analoghe a quella pubblicata (benchè alcune assai diverse nella forma) i sigg. **Bassi**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Bellomo, D'Amico, Ferrari V., Gramaccini, Lanternari, Magi** e **Papini**, R. I. T. di *Ancona*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Corrado**, R. L. Minghetti di *Bologna*; **De Conz**, R. I. T. e **Levi**, R. L. Polo di *Venezia*; **Delle Piane** e **Varese**, I. T. P. di *Casal Monferrato*; **Ferri B.**, R. L. di *Arezzo*; **Mancia**, I. T. P. di *Spoleto*; **Moreau** e **Ruspoli**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze* e **Perelli** di *Roma*.

I sigg. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Genta**, R. L. di *Cuneo* e **Semenza**, R. I. T. di *Milano* nelle loro dimostrazioni assai diverse da quella pubblicata, distinguono due casi, secondo che m è dispari o pari, ciò che era preferibile evitare; i signori **Cellini** di *Forlì* e **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia* dimostrano l'identità, supponendo tacitamente che m sia dispari, poichè considerano la somma dei primi $\frac{1}{2}(m-1)$ termini della serie naturale. G. C.-L.

809. *Dimostrare l'identità*

$$\sum_{r=0}^{r=m} \binom{m}{r}^2 = \binom{2m}{m}.$$

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione. — Dalla nota identità

$$\binom{p+q}{n} = \binom{p}{n}\binom{q}{0} + \binom{p}{n-1}\binom{q}{1} + \dots + \binom{p}{1}\binom{q}{n-1} + \binom{p}{0}\binom{q}{n},$$

facendo $p = q = n = m$, si ha

$$\binom{2m}{m} = \binom{m}{m}\binom{m}{0} + \binom{m}{m+1}\binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{1}\binom{m}{m-1} + \binom{m}{0}\binom{m}{m},$$

e, ricordando che è

$$\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r},$$

si ha

$$\binom{2m}{m}^2 = \binom{m}{0}^2 + \binom{m}{1}^2 + \dots + \binom{m}{m-1}^2 + \binom{m}{m}^2,$$

che è appunto l'identità che si voleva dimostrare.

Inviarono risoluzioni analoghe a quella pubblicata i sigg. **Bassi**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Moreau** e **Ruspoli**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*.

Ci sono pervenute inoltre due risoluzioni errate. G. C.-L.

818. *Se su due lati del triangolo si prendono due punti (uno per ciascun lato) allineati col baricentro, il rettangolo dei due segmenti che essi determinano col vertice comune ai due lati su cui stanno, è equivalente alla somma dei rettangoli di ciascuno di essi e dell'altro segmento determinato sull'altro lato.*

A. Borio.

Risoluzione del sig. **Florian**, L. di *Ploesti* (Romania).

Sia ABC il triangolo, M e N i punti scelti sui lati AB e AC ed allineati col baricentro G; e sieno $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ le perpendicolari condotte dai vertici del triangolo sulla retta MN.

Le coppie di triangoli simili APM, BQM e APN, CNR, ci danno respettivamente:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{AP}}; \qquad \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{AP}}.$$

Sommando, a membro a membro, si ha:

$$\frac{\overline{AN}\,.\,\overline{MB} + \overline{AM}\,.\,\overline{NC}}{\overline{AM}\,.\,\overline{AN}} = \frac{\overline{QB} + \overline{RC}}{\overline{AP}} = 1$$

perchè è $\overline{AP} = \overline{QB} + \overline{RC}$, per una nota proprietà del baricentro.

Si ha quindi:

$$\overline{AM}\,.\,\overline{AN} = \overline{AN}\,.\,\overline{MB} + \overline{AM}\,.\,\overline{NC}. \qquad \text{c. v. d.}$$

Dimostrarono il teorema, pure servendosi di semplici considerazioni geometriche i sigg. **Longo** di *Napoli*; **Plancich**, L. Priv. di *Portorè*; **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*. Lo dedussero faticosamente dal teorema di Menelao i sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino* e molto più semplicemente il sig. **Ferri**, R. L. di *Arezzo*. Si servirono di proprietà trigonometriche, seguendo una via tutt'altro che breve i sigg. **Barberino**, **Maugeri** e **Cutore**, R. I. T. di *Catania*.

E. Nannei.

QUISTIONI DA RISOLVERE

831. Costruire un trapezio conoscendo di posizione e grandezza una delle basi e il punto d'incontro delle diagonali, e conoscendo la distanza del punto d'incontro dei lati non paralleli dalla base stessa.

E. Cutore.

832. Dato un cerchio e un quadrilatero inscritto in esso, il quadrato della terza diagonale è uguale alla somma dei quadrati delle tangenti condotte dai suoi estremi, e la diagonale stessa è uguale alla somma delle 2 tangenti condotte dal suo punto medio.

833. Gli ortocentri dei quattro triangoli, che hanno per vertici quattro punti dati sopra un circolo, presi tre a tre, sono sopra un circolo eguale al circolo dato.

C. F. Jodi.

834. Dato un triangolo qualunque, le perpendicolari condotte dal circoncentro sulle mediane, incontrano rispettivamente le tangenti al circolo nei vertici del triangolo in tre punti situati in linea retta.

I. S. Teodorescu.

835. Dimostrare geometricamente che in ogni triangolo è

$$m_a < m_b + m_c.$$

836. Siano A', B', C' i punti d'incontro delle altezze di un triangolo ABC colla circonferenza circoscritta al triangolo stesso. Indicheremo gli elementi del triangolo A'B'C' come quelli del triangolo ABC, ma accentati, Dimostrare che:

1°. le AA', BB', CC' sono le bisettrici del triangolo A'B'C'.

2°. $S = \frac{R}{3}(AA' \operatorname{sen}^3 \alpha + BB' \operatorname{sen}^3 \beta + CC' \operatorname{sen}^3 \gamma)$,

3°. $S = \frac{R^2}{2}(\operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \beta' + \operatorname{sen} \gamma')$,

4°. $S' = \frac{1}{2} Rp$,

5°. $S' = 2R^2 \operatorname{sen} 2\alpha \,.\, \operatorname{sen} 2\beta \,.\, \operatorname{sen} 2\gamma$.

6°. $\sigma = \frac{R^2}{4}\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 2S'$ (σ = superf. esagono AC'BA'CB'.

7°. $AA' + BB' + CC' = 2R\left(4 \cos \frac{\alpha - \beta}{4} \cos \frac{\beta - \gamma}{4} \cos \frac{\gamma - \alpha}{4} - 1\right)$.

G. Candido.

837. Risolvere il sistema:

$$\frac{1}{ax-by-1}-\frac{1}{by-ax-1}=\frac{1}{ax+by-1}; \quad bx+ay=m.$$

838. Risolvere il sistema:

$$xy(x+y)=ab(a+b);$$
$$(x-y)(x+2y)(y+2x)=(a-b)(a+2b)(2a+b).$$

A. Bassi.

839. Risolvere e, *principalmente*, discutere il seguente problema: " Due aste PA e P'A' si elevano verticalmente sopra uno stesso " piano orizzontale: trovare sulla retta PP' che passa per i loro " piedi un punto tale che l'angolo di elevazione di A' sia doppio di " quello di A, conoscendo AP, A'P' e PP'.

840. Dimostrare che in un triangolo sferico qualunque, se a e b sono di specie uguale e α e β di specie contraria, c è acuto, se a e b sono di specie contraria e α e β di specie uguale, c è ottuso.

G. Pesci.

N. B. — Le risoluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 30 aprile 1907.

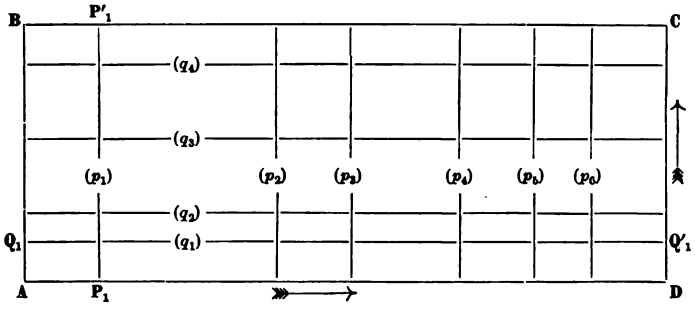
SU ALCUNI PROBLEMI DI CALCOLO COMBINATORIO (1)

1°. *Un rettangolo* ABCD *è diviso in* m *parti dai segmenti* $p_1, p_2, \ldots p_{m-1}$, *paralleli al lato* AB *ed in* n *parti dai segmenti* $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$, *paralleli ad* AD.

In quanti modi, lungo le linee della figura, e nei sensi indicati dalle freccie, si può andare da A *a* C? (2)

Indichiamo con $S_{m,n}$ il numero cercato; con P_i e P'_i rispettivamente i punti d'incontro di p_i coi lati AD e BC; coi Q_i e Q'_i rispettivamente i punti d'incontro di q_i coi lati AB e DC.

Fig. 1ª.



(N.B. — *La figura si riferisce al caso in cui sia* m = 7, n = 5).

Per andare da A a C, nel modo indicato dal problema, si può passare o per P_1 o per Q_1 e quindi il numero delle vie diverse che si possono tenere per andare da A a C equivarrà alla somma

(1) Gli enunciati di questi problemi si trovano in Heis, *Raccolta di esempi e quesiti di Aritmetica e d'Algebra*, trad. da A. Budinich, Torino, Loescher, 1889 (nella 2ª ed. a pag. 327).

(2) Si può osservare che qualunque sia la via scelta la spezzata percorsa è sempre equivalente al semi-perimetro del rettangolo dato.

dei due numeri che indicano rispettivamente quante vie si possono scegliere per andare da P_1 a C e da Q_1 a C; si ha quindi

$$S_{m,n} = S_{m-1,n} + S_{m,n-1}. \tag{1}$$

Evidentemente è $S_{r,1} = S_{1,r}$, come in generale, $S_{m,n} = S_{n,m}$; dimostriamo che qualunque sia r, è

$$S_{r,1} = S_{1,r} = r + 1. \tag{2}$$

Indicando con $k_1, k_2, \ldots k_r$ i successivi segmenti nei quali è diviso AD, con $k'_1, k'_2, \ldots k'_r$ quelli nei quali è diviso BC e con $h_1, h_2, \ldots h_{r+1}$ i successivi segmenti perpendicolari ai precedenti (v. fig. 2ª), condotti dai punti di divisione del lato AD (o BC), compresi i lati AB e DC del rettangolo, si vede con facilità che le sole vie possibili per andare, nel modo voluto dal problema, da A a C, sono le seguenti:

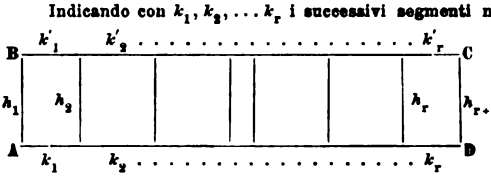


Fig. 2ª.

$$h_1 k'_1 k'_2 k'_3 \ldots k'_{r-1} k'_r;\ k_1 h_2 k'_2 k'_3 \ldots k'_{r-1} k'_r;\ k_1 k_2 h_3 k'_3 \ldots k'_{r-1} k'_r;\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots k_1 k_2 k_3 \ldots k_{r-1} h_r k'_r;\ k_1 k_2 k_3 \ldots k_r h_{r+1},$$

che evidentemente sono $r + 1$, e quindi resulta dimostrata la (2), che si può porre anche sotto la forma seguente:

$$S_{r,1} = S_{1,r} = \binom{r+1}{r} = \binom{r+1}{1} \tag{2'}$$

Ciò posto, dimostriamo che è

$$S_{m,n} = S_{n,m} = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}. \tag{3}$$

Per il caso di $n = 1$ la (3) è già dimostrata (2'); consideriamo il prospetto

$$\begin{array}{ccccccc} & & & S_{1,1} & & & \\ & & S_{1,2} & & S_{2,1} & & \\ & S_{1,3} & & S_{2,2} & & S_{3,1} & \\ S_{14} & & S_{23} & & S_{32} & & S_{41} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

nel quale in ciascuna linea ogni elemento, eccettuato il 1° e l'ultimo si possono ottenere dai due più prossimi della linea precedente mediante la formula (1).

Siccome inoltre tutti i primi e gli ultimi termini di ciascuna linea sono dati dalla (2), potremo dire che conosciuti tutti gli elementi di una linea, con le (1) (2), potremo conoscere tutti quelli delle linee seguenti e, siccome per gli elementi della 2ª linea, per la (2), si ha

$$S_{12} = S_{21} = 3 = \binom{2+1}{2} = \binom{2+1}{1},$$

basterà dimostrare che se è verificata la (3) per gli elementi di una linea, è verificata anche per quelli della linea successiva.

Ma per la (1) si ha:

$$S_{m,n} = S_{m-1,n} + S_{m,n-1} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}$$

e, poichè, per una nota formula di calcolo combinatorio, è

$$\binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n}{m},$$

si ha:

$$S_{m,n} = \binom{m+n}{m}.$$

È chiaro poi, per la nota proprietà delle combinazioni, espressa dall'eguaglianza $\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}$ che è anche

$$S_{m,n} = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$$

come volevamo dimostrare.

Per il caso in cui sia $m = 7$, $n = 5$ (v. fig. 1ª), si ha:

$$S_{7,5} = \binom{12}{7} = \binom{12}{5} = 792,$$

si può andare da A a C, con le condizioni poste dal problema, in 792 modi.

Applicazione. — *La fig. 3ª rappresenta una parte della pianta di una città. In quanti modi diversi, seguendo la via più breve, un tale che abita in* A *può recarsi al suo ufficio che è in* C?

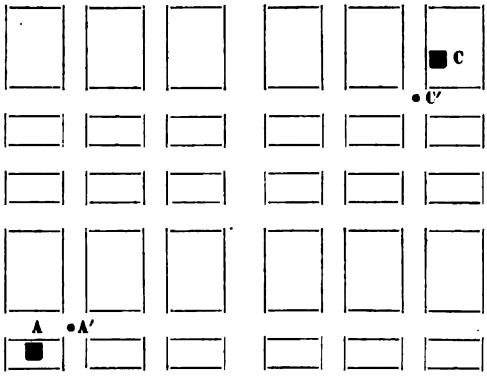


Fig. 3ª.

Si ha, considerando A′ e C′ in luogo di A e C, ciò che per la natura del problema è lecito fare,

$$S_{4,3} = \binom{7}{3} = 35,$$

cioè *quel tale può recarsi dalla casa all'ufficio, senza allungare il cammino, in* 35 *modi diversi.*

***

2°. *In quanti modi si può leggere la parola* Abracadabra [1] *della fig. 4ª, partendosi da una qualunque delle* A *maiuscole e, seguendo linee parallele a* QR *e* PR, *nei sensi indicati dalle freccie, giungere all'a posta presso al vertice* R?

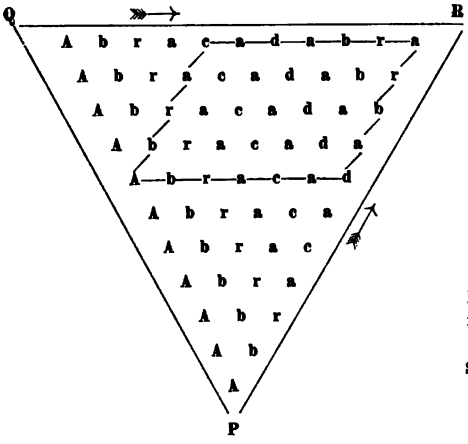


Fig. 4ª.

Per recarsi dall'A dell'i^a linea — cominciando dal basso — all'a che è presso al vertice R, per la formula (1) del problema precedente, si potrà prendere

$$S_{i-1,11-i} = \binom{10}{i-1} = \binom{10}{11-i}$$

vie diverse; per es., partendoci dall'A della 7ª linea si avrebbe

$$S_{6,4} = \binom{10}{6} = \binom{10}{4}.$$

Perciò il numero richiesto S sarà dato dalla formula:

$$S = \sum_{i=1}^{i=11} S_{i-1,\,11-i} = \sum_{i=1}^{i=11} \binom{10}{i-1} =$$
$$= \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{10}$$

e per la nota relazione:

$$\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

si ha:

$$S = 2^{10} = 1024,$$

cioè la misteriosa parola si può leggere in 1024 modi.

---

(1) *Abracadabra* è una parola magica cui gli antichi pretendevano attribuire il potere di fare guarire alcune malattie, quando, scritta su una piastrella nel modo indicato dalla fig. 4ª, fosse attaccata tale piastrella al collo dell'infermo.

*
* *

3°. *In Oviedo, città delle Asturie, si trova la chiesa di S. Salvatore, fabbricata a spese dell'antico principe Silone. La lapide sepolcrale del principe porta l'iscrizione seguente:*

t	i	c	e	f	s	p	e	c	n	c	e	p	s	f	e	c	i	t
i	c	e	f	s	p	e	c	n	i	n	c	e	p	s	f	e	c	i
c	e	f	s	p	e	c	n	i	r	i	n	c	e	p	s	f	e	c
e	f	s	p	e	c	n	i	r	p	r	i	n	c	e	p	s	f	e
f	s	p	e	c	n	i	r	p	o	p	r	i	n	c	e	p	s	f
s	p	e	c	n	i	r	p	o	l	o	p	r	i	n	c	e	p	s
p	e	c	n	i	r	p	o	l	i	l	o	p	r	i	n	c	e	p
e	c	n	i	r	p	o	l	i	S	i	l	o	p	r	i	n	c	e
p	e	c	n	i	r	p	o	l	i	l	o	p	r	i	n	c	e	p
s	p	e	c	n	i	r	p	o	l	o	p	r	i	n	c	e	p	s
f	s	p	e	c	n	i	r	p	o	p	r	i	n	c	e	p	s	f
e	f	s	p	e	c	n	i	r	p	r	i	n	c	e	p	s	f	e
c	e	f	s	p	e	c	n	i	r	i	n	c	e	p	s	f	e	c
i	c	e	f	s	p	e	c	n	i	n	c	e	p	s	f	e	c	i
t	i	c	e	f	s	p	e	c	n	c	e	p	s	f	e	c	i	t

In quanti modi, partendo dalla S *del centro e procedendo verso i* t *posti presso i vertici del rettangolo, si può leggere l'iscrizione:* SILO PRINCEPS FECIT? (1)

Per avere il numero N richiesto basta evidentemente moltiplicare per 4 il numero N′ che indica in quanti modi, e per le vie più brevi, si può andare dalla S centrale ad uno dei t posti presso i vertici e quindi per la (1) del n. 1, avremo:

$$N = 4N' = 4S_{9,7} = 4\binom{16}{7} = 45760.$$

GENERALIZZAZIONE ED OSSERVAZIONI. — In generale, se invece di avere 19 lettere in ciascuna linea e 15 in ciascuna colonna, si avessero $2m+1$ lettera in ciascuna linea e $2n+1$ in ciascuna colonna, N sarebbe dato dalla formula

$$N = 4 \cdot \binom{m+n}{n}.$$

È chiaro poi che volendo usare una parola (o frase) di p lettere, bisogna scegliere m ed n in modo che soddisfino all'equazione

$$m + n = p - 1$$

e quindi la parola (o frase) si potrà leggere in $4\binom{p-1}{n}$ modi.

Le disposizioni possibili saranno tante quante sono le soluzioni intere e positive della (4).

Per la parola *Roma*, per scegliere un esempio semplice, essendo $p-1=2$ e poichè l'equazione $m+n=3$ ammette le sole soluzioni intere e positive (1, 2) e (2, 1), si ha $N = 4\binom{3}{1} = 12$ e le figure corrisponenti sono

a	m	o	m	a
m	o	R	o	m
a	m	o	m	a

e

a	m	a
m	o	m
o	R	o
m	o	m
a	m	a

Per un altro esempio, nel quale era usata la parola *Matematica*, si veda il *Fasc.* IV dell'*anno* IV

In tale esempio si ha $N = 4\binom{9}{3} = 336$.

G. CARDOSO-LAYNES.

(1) Questo giuoco fu proposto nel Fasc. VI dell'anno IX con il n. 264. Ci pervennero soltanto tre risoluzioni errate.

ERRATA-CORRIGE.

Fra i risolutori della quist. 798 deve aggiungersi il sig. Garbelotto, R. I. T. di *Venezia* e fra quelli della quist. 799 il sig. Guerrini, R. L. di *Pesaro*.

PICCOLA POSTA

Z. F. *Ploesti* (Rumenia). — Accetteremo le risoluzioni anche in lingua francese ma preferiamo che ci siano inviate in italiano.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 5 aprile 1907

284. *Trovare un numero di due cifre che aumentato della somma delle sue cifre sia eguale alla somma dei quadrati delle cifre stesse.*

I. Cellini.

Risoluzione.

Indicando rispettivamente con x ed y i valori assoluti delle cifre del numero cercato, si dovrà avere

$$(10x + y) + (x + y) = x^2 + y^2$$

cioè

$$x(11 - x) = y^2 - 2y.$$

Il primo membro della precedente eguaglianza, evidentemente può assumere soltanto i valori

$$18\ ,\ 24\ ,\ 28\ ,\ 30 \qquad (1)$$

che corrispondono rispettivamente ai valori per x

$$(2\ o\ 9)\ ,\ (3\ o\ 8)\ ,\ (4\ o\ 7)\ ,\ (5\ o\ 6). \qquad (2)$$

Indicando con k uno dei valori (1), dovremo avere $y^2 - 2y = k$ e poichè l'equazione $y^2 - 2y - k = 0$ dà per y

$$y = 1 \pm \sqrt{1 + k},$$

dovrà essere $1 + k$ un quadrato perfetto.

Fra i valori (1) dunque l'unico accettabile è 24 e quindi è $y = 6$ (trascurando la soluzione negativa).

Dai valori (2) si ha per x

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = 8$$

e quindi i due numeri che soddisfano alle condizioni poste sono **36** e **86**.

Infatti è $36 + 3 + 6 = 3^2 + 6^2 = 45$ e $86 + 8 + 6 = 8^2 + 6^2 = 100$.

Inviarono risoluzioni complete i predetti sigg. **Bongini**, **Bottari**, **Costa**, **Ferrari F.**, **Ferrari V.**, **Genta**, **Jogna**, **Lombardi**, **Salonia** e **Semenza** e la predetta sig.^{na} **Viliani** ed i sigg. **Di Stefano**, R. I. T. di *Messina*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Magi**, R. I. R. di *Ancona*; **Morelli**, R. I. T. di *Bari*; **Plancich**, Coll. S. Giuseppe di *Porto-Re* (Croazia) e **Ruspoli**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*.

Inviarono risoluzioni incomplete il predetto sig. **Borino** ed il sig. **Bozzo**, R. I. T. di *Messina*.

(G. C.-L.)

285. *Fabbricami una corona di sessanta mine — disse un antico re ad un tale — mescolandovi opportunamente oro, rame, stagno e ferro; l'oro e il rame formino $\frac{2}{3}$ della corona, l'oro e lo stagno i $\frac{3}{4}$, l'oro e il ferro i $\frac{4}{5}$; orbene, dimmi esattamente la quantità d'oro, di rame, di stagno e di ferro che devi prendere.*

Risoluzione.

Indicando rispettivamente con o, r, s ed f il numero di mine di oro, di rame, di stagno e ferro di cui doveva essere composta la corona, avremo:

$$o + r + s + f = 60 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} o + r = \frac{2}{3}\ 60 = 40 \\ o + s = \frac{3}{4}\ 60 = 45 \\ o + f = \frac{4}{5}\ 60 = 48 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Dalle (1) (2) seguono le altre:

$$\left.\begin{array}{l} s + f = 20 \\ f + r = 15 \\ r + s = 12 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Sommando le (3) membro a membro e dividendo poi i due membri per 2, si ha

$$r + s + f = \frac{47}{2} \qquad (4)$$

Sottraendo dalla (1) la (4), si ha

$$o = 36 + \tfrac{1}{2}$$

e sottraendo dalla (4) ciascuna delle (3), si ha:

$$r = 3 + \tfrac{1}{2}, \quad s = 8 + \tfrac{1}{2}, \quad f = 11 + \tfrac{1}{2}.$$

Dunque la corona doveva essere composta nel seguente modo:

oro	mine	$36 + \frac{1}{2}$
rame	„	$3 + \frac{1}{2}$
stagno	„	$8 + \frac{1}{2}$
ferro	„	$11 + \frac{1}{2}$
	mine	60

Inviarono risoluzioni quasi tutte simili a quella pubblicata i predetti sigg. **Bongini**, **Borino**, **Bitossi Carissimo**, **Castiglioni**, **Cecere**, **Cellini**, **Costa**, **Ferrari F.**, **Ferrari V.**, **Garbelotto**, **Gavotti**, **Genta**, **Gerrini**, **Jogna**, **Lombardi**, **Magi**, **Maugeri**, **Micheletti**, **Salonia**, **Semenza**, la predetta sig.^{na} **Viliani** ed i sigg. **Anau** e **Sonaglia**, R. I. T. **Ricci** e **Zimmermann**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Bandini**, R. L. di *Arezzo*; **Baratta**, **Denti**, **F.** e **Denti L.**, R. I. T. di *Messina*; **Barberino** e **Salvo**, R. I. T. di *Catania*; **Drosescu**, **Florian** e **Potopeanu**, R. L. di *Ploesti* (Rumenia); **Guglielmi**, R. I. T. di *Bari*; **Lattuada**, Scuola Cavalli e Conti e **Lorenz**, R. I. T. di *Milano*; **Malvano de-Bonedetti**, R. I. T. di *Torino* e **Zurlini**, R. I. T. di *Bologna*.

(G. C.-L.)

Avviso ai lettori. — In questo fasc. non proponiamo nuovi giuochi; fino a tutto il 30 Aprile p. v. accettiamo le risoluzioni dei giuochi **286** e seguenti fino al **300**.

Errata-Corrige. — Nell'enunciato del giuoco **297** invece di *distribuzioni* deve leggersi *disposizioni*.

***

Il sig. **Lombardi**, nominato fra i risolutori del giuoco **288**, non appartiene al R. L. Tasso di *Roma*, ma al R. L. di *Salerno*.

Fra pochi giorni sarà pubblicato:

LAZZERI E PESCI

COMPLEMENTI D'ALGEBRA

per l'ammissione alla R. Accademia Navale

Seconda edizione riveduta e corretta — LIRE **3,80.** (*)

Gli ultimi programmi di matematica per il concorso alla R. Accademia navale di Livorno, che differiscono poco da quelli degli anni precedenti, comprendono alcuni argomenti di Algebra e Geometria che fanno parte dell'insegnamento secondario, e che perciò i candidati possono studiare sui libri di testo delle rispettive scuole, ed alcuni argomenti di algebra complementare, che non si trovano altro che in grandi trattati di Algebra superiore.

Il libro annunciato contiene precisamente una trattazione di questi argomenti speciali, ed alcune altre nozioni che possono giovare a coloro che intendono prepararsi all'esame di concorso sopra indicato.

Nella 2ª edizione, che sta per comparire, sono stati introdotti tutti i miglioramenti che sono stati suggeriti dall'esperienza degli anni precedenti.

(*) Il volume sarà spedito, raccomandato, a chi farà rimessa di L. 3,80 alla Libreria RAFFAELLO GIUSTI in Livorno.

È stato pubblicato:

GIULIO LAZZERI

TEORIA ELEMENTARE DELLE SEZIONI CONICHE

Prezzo L. **1,50** (1)

Questo volumetto, del formato del *Periodico di matematica* e del *Supplemento al Periodico di matematica* contiene la materia che di solito si svolge nel II biennio dei nostri istituti tecnici. In esso non si trovano le lacune che esistono in quasi tutti i trattati più in uso, e sono svolte interamente e colla massima generalità tutte le proprietà fondamentali delle sezioni coniche, che permettano di risolvere su queste importantissime curve innumerevoli quistioni e problemi, che di solito vengono risolute soltanto dopo lo studio della geometria analitica o della geometria proiettiva.

(1) Verrà spedito franco a chi invierà l'importo alla Libreria RAFFAELLO GIUSTI, Livorno.

ANNO X

MAGGIO 1907

FASC. VII

SUPPLEMENTO AL PERIODICO DI MATEMATICA

DIRETTORE. — G. LAZZERI *prof. nella R. Accademia Navale di Livorno e nella R. Università di Pisa.*

REDATTORI. — P. AUSSANT-CARÀ. - C. ALASIA. - A. BASSI. - G. CANDIDO. - G. CARDOSO-LAYNES - C. CIAMBERLINI. - A. FANTI. - E. NANNEI. - R. VERCELLIN.

CONDIZIONI D'ABBONAMENTO

Periodico di Matematica

(Esce ogni due mesi in fascicoli di 16 pag. almeno).

Il prezzo dell'abbonamento al *Per. di Mat.* è di L. 8 per l'Italia, L. 9 per l'estero, da inviarsi all'editore Giusti. — Gli abbonamenti sono annui e decorrono dal 1° luglio.

I soci dell'*Associazione Mathesis*, possono avere anche il *Periodico*, pagando complessivamente, per quota annua di associazione e pel abbonamento al giornale, L. 12, che devono essere inviate al Segretario-economo Prof. GAETANO RIBONI, Via Vittoria, 53, Milano.

Supplemento al Periodico di Matematica

(9 fasc. mensili stampate di 16 pag. almeno durante l'anno scolastico).

Abbonamento separato al *Supplemento*: per l'Italia L. 2, per l'estero L. 2,50.

Per gli abbonati al *Periodico*: per l'Italia L. 1,50, per l'estero L. 2.

Gli abbonamenti decorrono dal 1° novembre al 31 luglio successivo: devono esser pagati anticipatamente per mezzo di vaglia o cartolina-vaglia all'editore Giusti.

Le lettere non affrancate o insufficientemente affrancate verranno respinte.

Chi procurerà 10 abbonati al *Supplemento* avrà l'abbonamento al *Periodico* per L. 4. Chi ne procurerà 20 avrà l'abbonamento gratis al *Periodico*.

SOMMARIO

DEL PRESENTE FASCICOLO

Di alcune notevoli curve piane. (E. NANNEI.) *(continua.)*

Sul punto mediano di un sistema di punti appartenenti ad una medesima sfera. (CESARE BIANCA.)

77ª quistione a concorso. (S. CATANIA.)

Risoluzione della 74ª quistione a concorso.

Risoluzioni delle quistioni 813, 815, 816, 817, 819, 820, 828, 829 e 830.

Quistioni da risolvere 841-850.

Errata-corrige.

Copertina:

18° giuoco a concorso.

Spiegazione dei giuochi 265 e 281.

Giuochi proposti 301-303.

Errata-corrige.

LIVORNO

RAFFAELLO GIUSTI, EDITORE

LIBRAIO-TIPOGRAFO

1907

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes, a Savona,** *Via Luigi Corsi, Villa Garroni.*

13° GIUOCO A CONCORSO.

Due amici, Tizio e Cajo, camminavano insieme lungo la strada che da A va a B; a un certo punto vengono raggiunti dal tram che fa servizio fra i due paesi: Tizio torna indietro, Cajo prosegue verso B. Il tram, giunto in B, dopo una sosta di n minuti riprende il cammino verso A; quando Cajo lo incontra, lo fa fermare e vi sale, e così giunge in A contemporaneamente al suo amico.

Indicando con v la velocità dei pedoni (num. dei metri al minuto), con V quella del tram (id.), con d la distanza (in metri) dei due paesi, determinare il punto della strada nel quale i due amici si separarono e quello nel quale Cajo salì in tram.

Discussione **(G. C.-L.)**

Le risoluzioni si accettano fino al 31 maggio p. v.

La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore, il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

Nel prossimo fascicolo sarà pubblicata la spiegazione del 12° giuoco a concorso.

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 265 e 281.

265. ***Trovare un numero di tre cifre tale che la somma dei quadrati delle cifre stesse sia eguale al numero formato dalla prima e dall'ultima.***

S. Catania.

Risoluzione (del proponente).

Si deve avere

$$a^2 + b^2 + c^2 = 10a + c.$$

Resulta subito che a e b sono ad un tempo pari o dispari; poi che $c(c-1)$ è multiplo di 4.

Avendosi inoltre

$$a = 5 \pm \sqrt{25 + c - (b^2 + c^2)}$$

resulta $c < 6$.

Dunque:

$$c = 5 \quad \text{o} \quad c = 4 \quad \text{o} \quad c = 1 \quad \text{o} \quad c = 0.$$

Per $c = 5$ si ha:

$$a = 5 \pm \sqrt{5 - b^2},$$

da cui $b = 1$ o $b = 2$ e, in corrispondenza: $a = 7, 3, 6, 4$ e si hanno i numeri **315, 715, 625, 425.**

Per $c = 4$ si hanno i numeri **824, 224, 734, 334.**

Per $c = 1$ " " " **931, 131, 841, 241, 551.**

Per $c = 0$ " " " **930, 130, 840, 240, 550.**

Inviarono risoluzioni i sigg. **Belvedere** e **Perez**, R. I. T. di *Messina*; **Bongini, Cerauschi** e **Costa** R. I. T. di *Torino*; **Cellini** di *Forlì*; **Lombardi**, R. L. di *Salerno* e **Maracci**, R. I. T. di *Ancona.*

281. ***Una contadina portò a vendere al mercato un certo numero d'uova; dapprima ne vendette la metà più ½ uovo (senza romperne alcuno); indi la metà del residuo più ½ uovo,... e così fece cinque volte di seguito; dopo di ciò rimase con un uovo solo. Quante uova essa aveva portato al mercato?***

***

1ª Risoluzione.

Dire che la contadina ha venduto la metà del residuo più mezzo uovo è lo stesso che dire che le è rimasto la metà del residuo meno mezzo uovo, e siccome dopo la 5ª vendita alla contadina rimase un uovo solo, la metà del residuo della 4ª vendita sarà 1 uovo e mezzo; cioè l'intiero residuo è uova $2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$. Con ragionamento analogo si trova che prima della 4ª, della 3ª e della 2ª vendita il numero delle uova che ha la contadina è rispettivamente:

$$2\left(3 + \frac{1}{2}\right) = 7, \qquad 2\left(7 + \frac{1}{2}\right) = 15, \qquad 2\left(15 + \frac{1}{2}\right) = 31$$

e finalmente che la contadina portò al mercato uova $2\left(31 + \frac{1}{2}\right) =$ uova **63.**

2ª Risoluzione.

Indicando con x il numero delle uova che la contadina portò al mercato, il numero delle uova vendute la 1ª volta è $\frac{1}{2}(x+1)$; quello delle uova vendute la 2ª volta è

$$\frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}(x+1)\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x+1)$$

ed analogamente si trova che la 3ª volta ha venduto uova $\frac{1}{8}(x+1)$, la 4ª volta ne ha venduto $\frac{1}{16}(x+1)$ e la 5ª volta $\frac{1}{32}(x+1)$; cosicchè si ha l'equazione

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1) + \frac{1}{16}(x+1) + \frac{1}{32}(x+1) = x - 1$$

(v. continuazione in 3ª pag.)

HARVARD COLLEGE
JUN 8 1907
CAMBRIDGE, MASS.

DI ALCUNE NOTEVOLI CURVE PIANE

(Continuazione — v. fasc. prec.)

3. Atriftaloide. — Questa curva fu trovata da Haughton nei suoi studi sulla forma della superficie dei mari che coprono una sfera attrattiva; e le principali proprietà ne furono date da Townsend e Longchamps.

Per costruirla si tracci un circolo avente per centro l'origine e raggio arbitrario ρ: poi si conducano le quattro rette parallele all'asse delle y, date dalle equazioni: $x = \pm k\sqrt{\frac{k}{h+\rho}}$, $x = \pm k\sqrt{\frac{k}{k-\rho}}$, dove h e k sono numeri arbitrari. Gli otto punti d'incontro delle rette col circolo sono otto punti dell'atriftaloide. Variando il raggio del circolo, si possono avere quanti punti si vogliono, ed è possibile, perciò tracciare la curva.

Quando sia $h^2 > \frac{27}{4}k^2$, la curva risulta composta di due rami infiniti, di aspetto simile all'agnesiana e simmetrici rispetto all'asse delle y che è loro asintoto comune: e di due rami chiusi a forma di ovali, posti uno da una parte e uno dall'altra rispetto ai rami precedenti. In questo caso l'asse delle x taglia la curva in sei punti.

Se è $h^2 = \frac{27}{4}k^2$ la curva è formata dei due rami infiniti; e i rami chiusi si riducono a due punti isolati sull'asse delle x.

Se è $h^2 < \frac{27}{4}k^2$ la curva si riduce ai due soli rami infiniti.

Siccome i punti della curva sono i punti comuni ai circoli $x^2+y^2=\rho^2$ e alle rette $x = \pm k\sqrt{\frac{k}{h\pm\rho}}$, l'equazione dell'atriftaloide si otterrà, eliminando ρ fra le due equazioni precedenti: e ciò facendo, si ottiene l'equazione di sesto grado:

$$x^4(x^2+y^2) = (hx^2-k^2)^2.$$

4. Bicorno. — La seguente costruzione fu data dalla sig.ª Carlotta Scott.

Si traccino due circoli c e c' tangenti esternamente, di egual raggio a: uno dei centri C sia l'origine e la retta dei centri sia l'asse delle ordinate.

Da un qualsiasi punto M del circolo c' si conducano le tangenti al circolo c. Il l. g. dei punti d'incontro P tra la corda AB dei punti di contatto di queste tangenti e l'ordinata del punto M è una curva,

che per la sua forma fu, per suggerimento di Brocard, detta *bicorno*. Gl'inglesi la chiamano *cocked hat* (fig. 3).

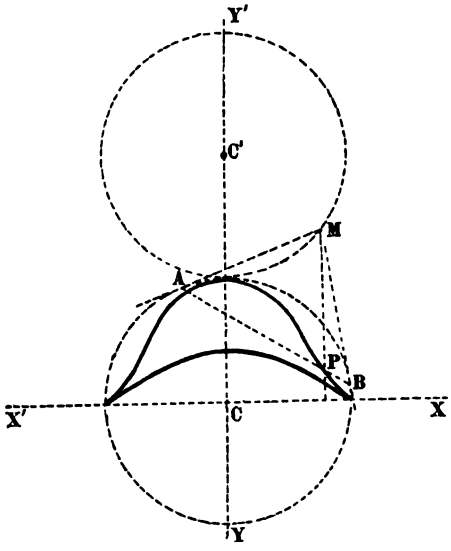


Fig. 3.

L'equazione della curva si può dedurre dalla costruzione precedente. Le equazioni dei due circoli c e c' sono rispettivamente $x^2+y^2=a^2$ e $x^2+(y-a)^2=a^2$.

Se x' e y' son le coordinate del punto M, l'equazione della retta AB è $xx'+yy'=a^2$, e perciò le coordinate del punto P sono le soluzioni del sistema $x=x'$ e $xx'+yy'=a^2$. E siccome x' e y' debbon soddisfare all'equazione del circolo c', l'equazione del luogo si otterrà eliminando x' e y' fra le tre equazioni

$$x=x'; \quad xx'+yy'=a^2;$$
$$x'^2+(y'-2a)^2=a^2,$$

con che si ottiene

$$y=\frac{a^2-x^2}{2a\pm\sqrt{a^2-x^2}}$$

che è l'equazione richiesta.

È facile vedere che ad ogni valore di x, ne corrispondono due di y: che non si hanno punti reali altro che per $-a\leqslant x\leqslant a$. Per $x=a$ e per $x=-a$ la curva ha due punti di regresso. Le tangenti, comuni di due rami, in questi punti, formano angoli di 45° coll'asse delle ascisse. Il ramo superiore della curva ha due punti d'inflessione, le cui coordinate sono $x=\pm\frac{a}{3}\sqrt{5}$, $y=\frac{a}{3}$.

(Continua). E. Nannei.

SUL PUNTO MEDIANO DI UN SISTEMA DI PUNTI

appartenenti ad una medesima sfera

1. Sieno A e B due punti di una sfera e sia M il punto medio dell'arco di circonferenza massima determinato da essi. (1)

Diremo M *punto mediano del sistema di punti* A *e* B.

(1) Supporremo che i punti di cui si parlerà appartengano tutti ad una medesima semisfera, e che l'arco di circonferenza massima (c. m.) che unisce due di tali punti sia quello minore di π, cioè giaccia nella semisfera che si considera.

Parlandosi di archi si intenderà parlare di archi di c. m.

2. Dimostreremo adesso che *dati tre punti* A, B, P_1 *di una sfera, non giacenti su un medesimo arco di circonferenza massima, gli archi che uniscono ciascuno di questi punti col punto mediano dei rimanenti passano per un medesimo punto* M_1 *e sarà:*

$$\frac{\text{sen } P_1M_1}{\text{sen } M_1M} = \frac{\text{sen } AB}{\text{sen } AM}. \tag{1}$$

Infatti sia C il punto mediano del sistema P_1A e M_1 il punto comune agli archi P_1M e BC; dai triangoli sferici P_1MA, BCA si ha:

$$\text{sen } P_1M = \frac{\text{sen } P_1AM}{\text{sen } AP_1M} \text{ sen } AM, \qquad \text{sen } BC = \frac{\text{sen } BAC}{\text{sen } ABC} \text{ sen } AC;$$

dalle quali, dividendo membro a membro ed osservando che

$$P_1\widehat{A}M = B\widehat{A}C,$$

si trae:

$$\frac{\text{sen } P_1M}{\text{sen } BC} = \frac{\text{sen } ABC}{\text{sen } AP_1M} \cdot \frac{\text{sen } AM}{\text{sen } AC}. \tag{2}$$

Dai triangoli sferici BM_1M, P_1M_1C si ha:

$$\text{sen } ABC = \text{sen } M_1BM = \frac{\text{sen } M_1M}{\text{sen } BM} \text{ sen } BM_1M,$$

$$\text{sen } AP_1M = \text{sen } M_1P_1C = \frac{\text{sen } M_1C}{\text{sen } P_1C} \text{ sen } P_1M_1C.$$

Quindi la (2) diviene: (¹)

$$\frac{\text{sen } P_1M}{\text{sen } BC} = \frac{\text{sen } M_1M}{\text{sen } M_1C} \cdot \frac{\text{sen } P_1C}{\text{sen } AC} \cdot \frac{\text{sen } AM}{\text{sen } BM}, \tag{3}$$

e quindi:

$$\frac{\text{sen } P_1M}{\text{sen } M_1M} = \frac{\text{sen } BC}{\text{sen } M_1C}.$$

Se indichiamo con N il punto comune agli archi AD e BC (essendo D il punto mediano dei punti P_1B), e con L il punto comune agli archi AD e P_1M si ha con procedimento identico al precedente:

$$\frac{\text{sen } BC}{\text{sen } NC} = \frac{\text{sen } AD}{\text{sen } ND}, \qquad \frac{\text{sen } AD}{\text{sen } LD} = \frac{\text{sen } P_1M}{\text{sen } LM}.$$

Moltiplicando le tre ultime eguaglianze si trae:

$$\text{sen } M_1M \,.\, \text{sen } NC \,.\, \text{sen } LD = \text{sen } M_1C \,.\, \text{sen } ND \,.\, \text{sen } LM.$$

Se i punti M, N ed L fossero distinti formerebbero un triangolo sferico nei prolungamenti dei lati del quale starebbero i punti C, M, D, i quali perciò dovrebbero essere su un medesimo arco di c. m. (²) ciò che è assurdo.

(¹) Si noti che la (3) e la (4) si ottengono senza tener conto che M e C sono punti mediani.
(²) V. la mia Nota: *Su alcune proprietà del triangolo sferico.* [Il " Bollettino di Matematica " anno V, n. 10, 11 e 12.]

Quindi possiamo concludere che *gli archi che uniscono ciascuno dei tre punti dati con il punto mediano dei rimanenti passano per un medesimo punto* M_1 *che diremo* **punto mediano** *del sistema dei tre punti* A, B, P_1.

Per dimostrare la (1) consideriamo i triangoli sferici P_1M_1C, M_1MB, dai quali si ha:

$$\operatorname{sen} P_1M_1 = \frac{\operatorname{sen} P_1CM_1}{\operatorname{sen} P_1M_1C} \cdot \operatorname{sen} P_1C, \qquad \operatorname{sen} M_1M = \frac{\operatorname{sen} M_1BM}{\operatorname{sen} MM_1B} \cdot \operatorname{sen} MB,$$

dalle quali, dividendo membro a membro ed osservando che:

$$P_1\widehat{M_1}M = M\widehat{M_1}B,$$

$$\frac{\operatorname{sen} P_1M_1}{\operatorname{sen} M_1M} = \frac{\operatorname{sen} P_1CM_1}{\operatorname{sen} M_1BM} \cdot \frac{\operatorname{sen} P_1C}{\operatorname{sen} MB}.$$

Poichè dal triangolo sferico ACB si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} P_1CM}{\operatorname{sen} M_1BM} = \frac{\operatorname{sen} ACB}{\operatorname{sen} CBA} = \frac{\operatorname{sen} AB}{\operatorname{sen} AC},$$

così la precedente relazione diviene:

$$\frac{\operatorname{sen} P_1M_1}{\operatorname{sen} M_1M} = \frac{\operatorname{sen} AB}{\operatorname{sen} MB} \cdot \frac{\operatorname{sen} P_1C}{\operatorname{sen} AC}. \tag{4}$$

Od anche: [1]

$$\frac{\operatorname{sen} P_1M_1}{\operatorname{sen} M_1M} = \frac{\operatorname{sen} AB}{\operatorname{sen} MB}.$$

c. d. d.

3. Supponiamo adesso di avere quattro punti A, B, P_1, P_2 vogliamo dimostrare anche qui che *gli archi di c. m. che uniscono ciascuno dei punti dati con il punto mediano dei rimanenti passano per un medesimo punto* M_2, *nel qual punto sarà*:

$$\frac{\operatorname{sen} P_2M_2}{\operatorname{sen} M_2M_1} = \frac{\operatorname{sen} AB}{\operatorname{sen} AM} \cdot \frac{\operatorname{sen} P_1M}{\operatorname{sen} P_1M_1}. \tag{1'}$$

Infatti, detto M_2 il punto d'incontro degli archi P_2M_1 e P_1D (essendo D il punto mediano della terna ABP_2) ed osservando che gli archi P_1M_1 e P_2D s'incontrano nel punto M dalla figura $P_1M_1MDP_2M_2$ si può scrivere una formola analoga alla (3); basta, per questo, sostituire nella (3) alle lettere P_1, C, A, M, B, M_1 rispettivamente P_1, M_1, M, D, P_2, M_2 e si avrà: [2]

$$\frac{\operatorname{sen} P_1D}{\operatorname{sen} P_2M_1} = \frac{\operatorname{sen} M_2D}{\operatorname{sen} M_2M_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} P_1M_1}{\operatorname{sen} MM_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} MD}{\operatorname{sen} P_2D}. \tag{3'}$$

---

(1) Questa proprietà relativa al triangolo sferico è proposta come esercizio nella Trigonometria di G. Pesci. Si è creduto conveniente dimostrarla perchè il metodo seguito in questa dimostrazione è applicabile mediante semplice scambio di lettere, ai teoremi che si dimostreranno in seguito.

(2) Vedi nota (2) della pagina precedente.

Ma dalla (2) si ha:

$$\frac{\text{sen } P_1M_1}{\text{sen } MM_1} = \frac{\text{sen } AB}{\text{sen } AM}, \qquad \frac{\text{sen } P_2D}{\text{sen } MD} = \frac{\text{sen } AB}{\text{sen } AM},$$

quindi la (3)′ diviene:

$$\frac{\text{sen } P_1D}{\text{sen } P_2M_1} = \frac{\text{sen } M_2D}{\text{sen } M_2M_1};$$

o ciò che è lo stesso:

$$\frac{\text{sen } P_1D}{\text{sen } M_2D} = \frac{\text{sen } P_2M_1}{\text{sen } M_2M_1}.$$

Dall'ultima formola e dalle analoghe si prova con procedimento identico a quello seguito nel § 2 che gli archi di c. m. che uniscono il punto mediano di tre punti con il rimanente s'incontrano a tre a tre in un punto e quindi tutti e quattro avranno un medesimo punto a comune M_2 che *diremo punto mediano del sistema* ABP_1P_2.

Per dimostrare la (1)′ osserviamo che la (4), con lo scambio di lettere detto precedentemente, ci dà:

$$\frac{\text{sen } P_1M_2}{\text{sen } M_2D} = \frac{\text{sen } MP_2}{\text{sen } DP_2} \cdot \frac{\text{sen } P_1M_1}{\text{sen } MM_1}, \tag{4)'}$$

e quindi sussiste l'analoga alla precedente, cioè:

$$\frac{\text{sen } P_2M_2}{\text{sen } M_2M_1} = \frac{\text{sen } MP_1}{\text{sen } M_1P_1} \cdot \frac{\text{sen } P_2D}{\text{sen } MD}. \tag{4)''}$$

E poichè per la (1)

$$\frac{\text{sen } P_2D}{\text{sen } MD} = \frac{\text{sen } AB}{\text{sen } AM},$$

così la (4)″ diviene:

$$\frac{\text{sen } P_2M_2}{\text{sen } M_2M_1} = \frac{\text{sen } AB}{\text{sen } AM} \cdot \frac{\text{sen } P_1M}{\text{sen } P_1M_1}.$$

4. Ammettiamo ora di aver definito, con lo stesso metodo, il punto mediano di un sistema di $n-1$ punti $ABP_1 \ldots . P_{n-3}$, situati in una medesima semisfera come punto di concorso degli $n-1$ archi di c. m. che uniscono ciascuno dei punti dati con il punto mediano dei rimanenti e di aver quindi provato che se M_{n-3}, $M_{n-4}, \ldots ., M$ sono i punti mediani dei sistemi:

$$ABP_1 \ldots \ldots P_{n-3},\ ABP_1, \ldots ., P_{n-4}, \ldots ., AB,$$

si ha:

$$\frac{\text{sen } P_{n-3}M_{n-3}}{\text{sen } M_{n-3}M_{n-4}} = \frac{\text{sen } AB}{\text{sen } AM} \cdot \frac{\text{sen } P_1M}{\text{sen } P_1M_1} \cdot \frac{\text{sen } P_2M_1}{\text{sen } P_2M_2} \cdot \ldots . \cdot \frac{\text{sen } P_{n-4}M_{n-5}}{\text{sen } P_{n-4}M_{n-4}};$$

allora, con metodo identico a quello seguito per passare dal sistema dei punti ABP_1 al sistema ABP_1P_2, si prova che esiste ancora, secondo il medesimo concetto, il punto mediano di n punti situati su

una medesima semisfera, e che detti M_{n-2}, M_{n-3}, ..., M i punti mediani dei sistemi:

$$ABP_1 \ldots . P_{n-3} P_{n-2},\ ABP_1 \ldots . P_{n-3}, \ldots ., AB$$

si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} P_{n-2} M_{n-2}}{\operatorname{sen} M_{n-2} M_{n-3}} = \frac{\operatorname{sen} AB}{\operatorname{sen} AM} \cdot \frac{\operatorname{sen} P_1 M}{\operatorname{sen} P_1 M_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} P_2 M_1}{\operatorname{sen} P_2 M_2} \cdot \ldots . \cdot \frac{\operatorname{sen} P_{n-3} M_{n-4}}{\operatorname{sen} P_{n-3} M_{n-3}}.$$

Cerignola, gennaio 1907.

CESARE BIANCA.

77ª QUISTIONE A CONCORSO

In un piano sono dati una circonferenza c di centro O e un punto A, oppure due circonferenze c, c' di centri O, O'. Dimostrare che:

1°. Esistono, in generale, quattro triangoli isosceli ABC, di data forma (simili a un triangolo dato), con la base AB, e aventi un vertice in A, un altro vertice, B, in c e il lato BC tangente a c. I quattro vertici C sono in una retta perpendicolare ad AO.

2°. Esistono, in generale, quattro triangoli di data forma soddisfacenti alle condizioni precedenti. I quattro vertici C sono su d'una circonferenza avente il suo centro nella retta AO.

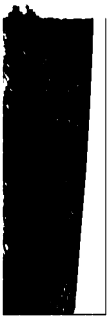
3°. Esistono, in generale, otto triangoli isosceli ABC, di data forma, con la base AB, e aventi un vertice, A, sulla circonferenza c, un vertice, B, sulla circonferenza c', il lato AC tangente a c e il lato BC tangente a c'. Gli otto vertici C sono in una retta perpendicolare alla retta OO'.

4°. Esistono, in generale, otto triangoli ABC, di data forma, soddisfacenti alle condizioni della quistione terza. Gli otto vertici C sono su d'una circonferenza avente il centro nella retta OO'.

N. B. — Le quistioni si devono risolvere nell'ordine indicato, e poi si deve provare che la prima è caso particolare della seconda, e le prime tre sono casi particolari dell'ultima.

S. CATANIA.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 31 maggio 1907.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.



Infine, in questa ipotesi, l'angolo $A_1\widehat{A_{hl}}A_h$ è retto, quindi è $A_1A_{hl} \parallel M_1A_{ih}$, quindi i triangoli $A_1A_{ih}M_1$, $A_{ih}A_{hl}M_1$ sono equivalenti, e perciò sono anche equivalenti i triangoli $A_1A_1M_1$, $A_{ih}A_{hl}A_1$; ma $A_1A_1M_1$ è la metà di $A_1A_hA_1$, onde *il segmento* $A_{ih}A_{hl}$ *divide per metà il triangolo.*

Il sig. Ceruti, osserva che, qualunque sia A_1, si ha:

$$\frac{\Delta\, A_1A_hA_1}{\Delta\, A_{ih}A_{hl}A_1} = 4\cos^2 A_1.$$

R. Vercellin.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

813, 815, 816, 817, 819, 820, 828, 829 E 830

813. ***Risolvere le equazioni***

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+a+b} = 0;$$

$$a(a+x)(a+2x)(a+3x) = b(b+x)(b+2x)(b+3x);$$

$$x(x+a)(x+b)(x+a+b) + h = 0;$$

$$x^n - x^{-n} = 3(1 + x^{-n}).$$

A. Bassi.

Risoluzione del sig. **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*.

1°. La prima delle date equazioni è equivalente alla seguente:

$$(2x + a + b)[(x+a)(x+b) + x(x+a+b)] = 0,$$

la quale si scinde nelle due

$$2x + a + b = 0; \qquad (x+a)(x+b) + x(x+a+b) = 0,$$

e quindi

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}(a+b); \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}(a+b+\sqrt{a^2+b^2}); \quad x_3 = -\tfrac{1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2})$$

2°. La seconda delle equazioni proposte è equivalente alla seguente:

$$\{a(a+3x) - b(b+3x)\}\{2x^2 + a(a+3x) + b(b+3x)\} = 0,$$

la quale si scinde nelle due

$$a(a+3x) - b(b+3x) = 0; \quad 2x^2 + a(a+3x) + b(b+3x) = 0,$$

e perciò

$$x_1 = -\tfrac{1}{4}(a+b);$$

$$x_2 = \tfrac{1}{4}\left(-3(a+b) + \sqrt{a^2+b^2+18ab}\right);$$

$$x_3 = \tfrac{1}{4}\left(-3(a+b) - \sqrt{a^2+b^2+18ab}\right).$$

3°. La terza equazione si trasforma facilmente in questa:

$$x^2(x+a+b)^2+abx(x+a+b)+h=0,$$

e posto

$$x(x+a+b)=z,$$

si ha la risolvente in z

$$z^2+abz+h=0;$$

da cui

$$z_1=\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2-4h}}{2};\qquad z_2=\frac{-ab-\sqrt{a^2b^2-4h}}{2};$$

e perciò le radici della data equazione saranno quelle delle due:

$$x(x+a+b)=z_1;\qquad x(x+a+b)=z_2$$

dalle quali:

$$x_1=\frac{-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+4z_1}}{2},\quad x_3=\frac{-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+4z_2}}{2},$$

$$x_2=\frac{-(a+b)-\sqrt{(a+b)^2+4z_1}}{2},\quad x_4=\frac{-(a+b)-\sqrt{(a+b)^2+4z_2}}{2}.$$

4°. Per la quarta equazione osservando che $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, si ha l'equivalente

$$x^n-\frac{1}{x^n}=3+\frac{3}{x^n}$$

ossia:

$$x^{2n}-3x^n-4=0$$

da cui (*Repertorio*, G. L., pag. 28):

$$x=\sqrt[n]{\frac{3\pm5}{2}}.$$

Risolvettero *tutte* le equazioni proposte i sigg. **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Bellomo, Ferrari, Lanternani** e **Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Napolitano**, R. I. T. e **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Gerbino**, R. I. R. di *Torino*; **Mancia**, I. T. P. di *Spoleto*; **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*.

Risolvettero *parte* delle equazioni proposte i sigg. **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Turola**, R. I. T. di *Mantova*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Fresia**, R. I. T. di *Mondovì*; **Ferrari** e **Villani**, R. I. T. di *Pavia*; **Levi**, R. L. Marco Polo di *Venezia*; **Cassani**, R. L. E. Q. Visconti di *Roma*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*; **Marangio**, R. L. di *Aquila*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Guglielmi**, R. I. T. di *Bari*.

A. Bassi.

815. *Dimostrare che nell'equazione*

$$x^3+bx^2+cx+\frac{4bc-b^3}{8}=0$$

una radice è uguale alla somma delle altre due.

S. Catania.

1ª **Risoluzione** dei sig. **Bongini** e **G. Costa**, R. I. T. di *Torino*.

L'equazione data può scriversi anche:

$$((2x+b)(4x^2+2bx-b^2+4c)=0,$$

e questa si scinde nelle seguenti

$$2x + b = 0, \quad , \quad 4x^2 + 2bx - b^2 + 4c = 0;$$

chiamando x_1 la radice della prima e x_2, x_3 quelle della seconda, si ha

$$x_1 = -\frac{b}{2}, \quad x_2 + x_3 = -\frac{2b}{4} = -\frac{b}{2},$$

e quindi

$$x_1 = x_2 + x_3. \qquad \text{c. d. d.}$$

Risolvettero analogamente la questione proposta i sigg. **Bellomo, Gramaccini, Lanternani, Magi** e **Ferrari**, R. I. T. di *Ancona*; **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*; **Barberino, Maugeri, Cutore** e **Salvo**, R. I. T. di *Catania*; **Napolitano**, R. I. T. e **Salonia**, L. di *Caserta*.

2ª **Risoluzione** del *Redattore*.

Si consideri l'equazione

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

se x_1, x_2, x_3 ne sono le radici si dovrà avere, come è ben noto,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c \tag{2}$$

$$-x_1x_2x_3 = d. \tag{3}$$

Qualora sia

$$x_1 = x_2 + x_3 \tag{4}$$

eliminando x_1, x_2, x_3, dalle relazioni scritte si ricava agevolmente

$$d = \frac{4bc - b^3}{8}.$$

Viceversa dalle (1), (2), (3), tenendo conto della $d = \frac{4bc - b^3}{8}$ si ottiene $x_1 = x_2 + x_3$.

Risolvettero in modo analogo la questione proposta i sigg. **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Mancia**, I. T. di *Spoleto*; **Florian**, L. di *Ploesti* (Romania); **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*; **Plancich**, Liceo Privato di *Portorè*; **Longo** di *Napoli*.

A. Bassi.

816. *Risolvere l'equazione*

$$(x^2 + 2\alpha x + \beta)(x^2 + \beta)^3 = 3\alpha^4x^4 + (x^2 + 3\alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \beta)^3. \tag{1}$$

Candido.

Risoluzione.

La equazione proposta si può scrivere

$$(x^2 + 2\alpha x + \beta)(x^2 + \beta)^3 - 3\alpha^4x^4 - (x^2 + 3\alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \beta)^3 = 0. \tag{2}$$

Ponendo

$$f_1 = x^2 + \alpha x + \beta, \quad f_2 = \alpha x, \quad f_3 = 2\alpha x,$$

la (1) si può scrivere

$$(f_1 + f_2)(f_1 - f_2)^3 + (f_2 + f_3)(f_2 - f_3)^3 + (f_1 + f_3)(f_3 - f_1)^3 = 0.$$

e poichè questa si può scrivere ancora

$$2(f_1+f_2+f_3)(f_1-f_2)(f_2-f_3)(f_3-f_1)=0,$$

così la (1) equivale l'altra

$$2\alpha x(x^2+4\alpha x+\beta)(x^2-\alpha x+\beta)(x^2+\beta)=0.$$

Le radici della equazione proposta sono dunque le radici delle equazioni:

$$\alpha x=0,\quad x^2+4\alpha x+\beta=0,\quad x^2-\alpha x+\beta=0,\quad x^2+\beta=0,$$

ossia

$$x=0,\quad \begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\left\{-2\alpha\pm\sqrt{4\alpha^2-\beta}\right.,\quad \begin{matrix}x_4\\x_5\end{matrix}\left\{\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}\right.,\quad \begin{matrix}x_6\\x_7\end{matrix}\left\{\pm\sqrt{-\beta}\right..$$

La discussione alla cura dello studioso.

Osservazione. — L'esercizio fu stampato con l'errore seguente: era stampato $(x^2-2x+\beta)^2$ in cambio di $(x^2-\alpha x+\beta)^2$.

Candido.

817. *Dimostrare che la equazione*

$$x^2=y^2+z^n \tag{1}$$

ammette una infinità di soluzioni in numeri interi, sapendo che $x+y$ *è una potenza* n^{ma}.

G. Candido.

Risoluzione dei sigg. **Florian** e **Bugeanu** del L. *Ploesti* (Romania); **Bongini** e **Costa**, I. T. di *Torino*; **Semenza**, I. T. di *Milano*; **Longo** di *Napoli*.

Poniamo $x+y=p^n$, allora la (1) diviene

$$p^n(x-y)=z^n,$$

e ponendo

$$\frac{z^n}{p^n}=q^n,$$

si ha

$$x-y=q^n;$$

dimodochè

$$x=\tfrac{1}{2}(p^n+q^n),\qquad y=\tfrac{1}{2}(p^n-q^n),\qquad z=pq,$$

dove p e q sono numeri arbitrari pari od impari nello stesso tempo, e ciò dimostra la cosa.

Hanno dimostrato il precedente teorema pure i sigg. **Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*; **Cellini** di *Forlì*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Manna**, R. I. T. di *Spoleto*.

Candido.

819. *In ogni triangolo, le congiungenti, i vertici coi punti medii delle semicirconferenze costruite sui lati opposti come diametri, e situate tutte esternamente o tutte internamente rispetto al triangolo, concorrono in un punto.*

Vercellin.

1ª **Risoluzione** del sig. **Longo** di *Napoli*.

Sia ABC il triangolo dato, e si dinotino con $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ i suoi angoli con a, b, c i lati ordinatamente opposti e con A′, B′, C′ i punti medi delle semicirconferenze descritte sui lati come diametri. Si ha facilmente dal triangolo A′B′C

$$\overline{A'B'}^2=\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4}b^2\pm ab\cos(B+\tfrac{1}{2}\pi)=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2\pm 4S).$$

Similmente

$$\overline{A'C'}^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 \pm 4S),$$

quindi

$$\overline{A'B'}^2 - \overline{A'C'}^2 = \tfrac{1}{4}(b^2 - c^2) = \overline{AB'}^2 - \overline{AC'}^2,$$

Ciò dimostra che la retta AA' è perpendicolare alla B'C', e nello stesso modo si può dimostrare che BB' è perpendicolare alla A'C' e CC' è perpendicolare alla A'B'. Ne segue che le rette AA', BB', CC' s'incontrano nell'ortocentro del triangolo A'B'C'.

2ª **Risoluzione** generale del sig. **Potopeanu**, R. L. di *Ploesti* (Rumenia).

Consideriamo il caso più generale, quando sui lati del triangolo ABC, come basi, si costruiscono i triangoli isosceli simili AB_1C, BC_1A, CA_1B. Dimostriamo che le rette AA_1, BB_1, CC_1 sono concorrenti.

Essendo

$$\widehat{BAB_1} = \widehat{CAC_1},$$

risulta

$$ABB_1 : ACC_1 = AB \times AB_1 : AC \times AC_1;$$

e siccome $\frac{AB}{AC} = \frac{AC_1}{AB_1}$, ne viene

$$ABB_1 = ACC_1. \qquad (1)$$

Parimenti

$$BAA_1 = BCC_1; \qquad (2) \qquad\qquad CBB_1 = CAA_1. \qquad (3)$$

Ritenuta positiva la direzione $\overrightarrow{ABC}$, si ha facilmente indicando con A', B', C' i punti d'incontro delle coppie di rette AA_1, BC; BB_1, CA; CC_1, AB,

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{AA_1B}{AA_1C}; \quad \frac{B'C}{B'A} = -\frac{BB_1C}{BB_1A}; \quad \frac{C'A}{C'B} = -\frac{CC_1A}{CC_1B}.$$

Moltiplicando membro a membro queste eguaglianze e ricordando le (1), (2), (3) si ha

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1,$$

e quindi per l'inverso del teorema di Ceva si ricava che le rette AA', BB', CC' concorrono in un punto P.

c. v. d.

Risoluzione analoga a quest'ultima fu inviata dal sig. **Teodorescu**, R. L. S.ti Pietro e Paolo di *Ploesti* (Romania). Il sig. **Bueseneanu**, R. L. S.ti Pietro e Paolo di *Ploesti*, si limita ad osservare che la dimostrazione generale può leggersi nel *Trattato di Geometria* di E. Rouché et Comberousse, 7ª edizione, parte 2ª, pag. 617.

Altre risoluzioni dei sigg. **Barberino**, **Cutore** e **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Bugeanu**, R. L. S.ti Pietro e Paolo di *Ploesti* (Romenia); **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*. Un'altra risoluzione è errata

R. Vercellin.

820. *Le perpendicolari condotte ai lati d'un triangolo nei punti in cui essi lati (non prolungati) toccano i circoli exinscritti, concorrono in un punto. Determinare la distanza di esso punto dal circoncentro.*

R. Vercellin.

Risoluzione.

Siano rispettivamente D, E, F; D_1, E_1, F_1 i punti di contatto del cerchio inscritto e dei tre cerchi exinscritti coi lati (non prolungati) BC, CA, AB d'un triangolo ABC. M_a, M_b, M_c i punti medi dei lati, O, I il circoncentro e l'incentro.

È noto che D_1 è simmetrico di D rispetto al punto M_a, onde la perpendicolare al lato BC in D_1, essendo parallela alla ID, passa pel punto P, simmetrico di I rispetto ad O; per la stessa ragione anche le perpendicolari condotte per E_1, F_1 a CA, AB, passano per P.

$$OP = OI = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

Buone risoluzioni inviarono i sigg. **Barberino**, **Cutore** e **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Florian**, **Potopeanu**, **Teodorescu**, R. L S.ti Pietro e Paolo, *Ploesti* (Romania); **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Longo** di *Napoli*; **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*, i quali tutti osservano che I è l'ortocentro del triangolo $I_aI_bI_c$, ABC è il suo triangolo ortico ed O e P sono rispettivamente il centro di Feuerbach e il circoncentro del triangolo stesso; **Bellomo**, **Ferrari**, **Gramaccini**, **Lanternari** e **Magi**, R. I. T. di *Ancona* che deducono la concorrenza delle tre perpendicolari in questione, osservando che è

$$\overline{CD_1}^2 + \overline{BF_1}^2 + \overline{AE_1}^2 = \overline{BD_1}^2 + \overline{AF_1}^2 + \overline{CE_1}^2.$$

Bongini e **Costa**, R. I. T. di *Torino*, hanno inviato una risoluzione che non è, in sostanza, molto dissimile a quella suesposta; **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*, una, nella quale fa uso della conoscenza di coordinate.

R. Vercellin.

828. *Il triangolo* T_4 *che ha per vertici i baricentri dei triangoli* T_1, T_2, T_3, *che si ottengono congiungendo il baricentro di un triangolo dato* T *coi vertici è omotetico a quest'ultimo, e la sua area ne è* $\frac{1}{9}$.

L'area dell'esagono convesso che ha per vertici i punti medi dei lati dei triangoli T, T_1, T_2, T_3, *è la metà dell'area di* T.

L'area dell'esagono che ha per vertici i baricentri dei triangoli T_1, T_2, T_3 *e i punti medi dei loro lati comuni è il triplo di quella del triangolo* T_4.

M. Scalabrini.

Risoluzione.

Sia ABC il triangolo T dato, $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$, $\overline{CM_c}$ le sue mediane, G il suo baricentro, G_1, G_2, G_3 i baricentri dei triangoli T_1, T_2, T_3 ossia i vertici del triangolo T_4. I vertici di T e T_4 si posson far corrispondere in modo che le rette dei vertici corrispondenti passino pel punto G. Di più, essendo $\overline{GC} = 2\,\overline{GM_c}$ e $\overline{GG_3} = \frac{2}{3}\,\overline{GM_c}$, si deduce $\overline{GG_3} = \frac{1}{3}\,\overline{GC}$; e così è $\overline{GG_2} = \frac{1}{3}\,\overline{GB}$; $\overline{GG_1} = \frac{1}{3}\,\overline{GA}$; il che prova che i due triangoli sono omotetici, il centro d'omotetia è G, e il rapporto dei segmenti omologhi è 1 : 3, e perciò quelle delle superficie è 1 : 9.

Se N_a, N_b, N_c sono i punti medi dei segmenti GA, GB, GC, l'esagono $\varepsilon = M_aN_cM_bN_aM_cN_b$ è la somma di sei triangoli aventi il vertice comune G; ed equivalenti rispettivamente agli altri sei triangoli ad essi adiacenti, e che insieme coi primi costituiscono il triangolo T. Evidentemente, quindi l'esagono è la metà del triangolo T.

Analogamente l'esagono $\varepsilon' = N_aG_2N_bG_1N_cG_2$ è la somma di sei triangoli, aventi il vertice comune G, e per basi i lati dell'esagono: ognuno di questi triangoli è evidentemente i $\frac{2}{3}$ di uno dei triangoli sopra considerati, componenti l'esagono ε. Si ha perciò $\varepsilon' = \frac{2}{3}\,\varepsilon = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\,T = \frac{1}{3}\,T = \frac{1}{3}\,9T_4 = 3T_4$.

Mandarono analoghe risoluzioni i sigg. **Ferrari**, R. I. T. di *Ancona*; **Barberino**, **Cutore** e **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Manzi**, L. C. di *Domodossola*; **Castiglioni**, R. I. T., **Ruspoli** e **Zimmermann**, Badia Fiesolana di *Firenze*; **Longo** di *Napoli*; **Semenza** e **Lorenz**, R. I. T. e **Bassi**, R. L. Beccaria di *Milano*; **Bujoreanu**, **Florian**, **Drosescu**, **Petrescu**, **Potopeanu** e **Teodorescu**, L. R. di *Ploesti* (Romania); **Cherubini**, R. I. T. di *Perugia*; **Plaucich**, Seminario di *Portorè*; **Mancia**, I. T. P. di *Spoleto*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Garbelotto** e **De Conz**, R. I. T di *Venezia*.

E. Nannei.

829. *Detta α una radice dell'equazione*

$$z^3 - 2qz + (pr + q^2 - 4s)\,z + p^2s + r^2 - pqr = 0,$$

l'equazione

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

si scinde nelle due seguenti

$$x^2 + \tfrac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 4\alpha}\right)x + \tfrac{1}{2}\left[q - \alpha + \sqrt{(q-\alpha)^2 - 4s}\right] = 0,$$

$$x^2 + \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4\alpha}\right)x + \tfrac{1}{2}\left[q - \alpha - \sqrt{(q-\alpha)^2 - 4s}\right] = 0.$$

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*.

Eseguendo il prodotto dei due polinomi

$$\left\{x^2 + \tfrac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 4\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\left[q - \alpha + \sqrt{(q-\alpha)^2 - 4s}\right]\right\},$$

$$\left\{x^2 + \tfrac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\left[q - \alpha - \sqrt{(q-\alpha)^2 - 4s}\right]\right\}, \qquad (1)$$

si trova

$$f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + \tfrac{1}{2}\left\{p(q-\alpha) + \sqrt{(p^2 - 4\alpha)\left[(q-\alpha)^2 - 4s\right]}\right\}x + s.$$

Affinchè questo sia eguale a

$$x^4 + px^3 + qx^2 + r + s$$

è necessario e sufficiente che sia

$$r = \tfrac{1}{2}\left\{p(q-\alpha) + \sqrt{(p^2 - 4\alpha)\left[(q-\alpha)^2 - 4s\right]}\right\},$$

ossia

$$2r - p(q-\alpha) = \sqrt{(p^2 - 4\alpha)\left[(q-\alpha)^2 - 4s\right]};$$

e, quadrando e ordinando secondo le potenze decrescenti di α, si ha l'equazione

$$\alpha^3 - 2q\alpha^2 + (pr + q^2 - 4s)\,\alpha + p^2s + r^2 - pqr = 0.$$

Dunque, affinchè la (1) sia verificata, dev'essere α radice dell'equazione

$$z^3 - 2qz^2 + (pr + q^2 - 4s)\,\alpha + p^2s + r^2 - pqr = 0.$$

c. v. d.

Inviarono soluzioni, in massima parte analoghe, i sigg. **Barberino**, **Cutore** e **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Bellomo**, **Ferrari** e **Lanternari**, R. I. T. di *Ancona*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Bugeanu** e **Floria**, L. di *Ploesti* (Romania); **Plancich**, L. Priv. di *Portorè* (presso Fiume); **Semenza**, R. I. T. di *Milano*.

R. Vercellin.

830. *Costruire un triangolo, conoscendo il raggio del cerchio circoscritto, la differenza di due angoli e la distanza fra l'incentro e il vertice dell'altro.*

R. Vercellin.

Risoluzione del sig. **Longo** di Napoli.

Siano R, d, α i dati, cioè il raggio del circumcerchio, la distanza dell'incentro dal vertice A e l'angolo eguale alla differenza di B e C.

Costruzione. — In un circolo di centro O e raggio R si disegni un diametro DE e il raggio OA che faccia l'angolo $\widehat{AOD} = \alpha$. Sulla corda AE si tagli $AI = d$, e col centro E e raggio EI si tagli il circolo O nei punti B, C. Il triangolo ABC è quello richiesto.

Dimostrazione. — Poichè EIC è un triangolo isoscele, è $\widehat{EIC} = \widehat{ICE}$; quindi, prolungando CI fino all'incontro M col semicerchio, si ha $\widehat{EC} + \widehat{AM} = \widehat{MBE}$; da cui $AM = MB$. Da ciò segue che CM è bisettrice dell'angolo ACB, quindi I è l'incentro del triangolo ABC.

Finalmente, la differenza $\widehat{ACB} - \widehat{CBA}$ ha per misura $\frac{1}{2}(\widehat{BMA} - \widehat{AC})$, ovvero $\frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{DA} - \widehat{AC}) = \frac{1}{2}(\widehat{DC} + \widehat{DA} - \widehat{AC}) = \widehat{DA}$; dunque la differenza dei due angoli è eguale all'angolo al centro $\widehat{AOD} = \alpha$.

Affinchè il problema sia possibile dev'esser la distanza d minore della corda AE cioè $d < 2R \cos \frac{1}{2} \alpha$.

Risoluzioni sostanzialmente analoghe dei sigg. **Bellomo, Ferrari, Lanternari** e **Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Bugeanu** e **Florian**, L. di *Ploesti* (Romania); **Moreau** e **Ruspoli**, Collegio della Badia Fiesolana di *Firenze*.

Risoluzioni trigonometriche dei sigg. **Cutore, Maugeri** e **Barberino**, R. I. T. di *Catania*: **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*.

Infine due risolutori credono che nell'enunciato sia incorso un errore.

R. Vercellin.

QUISTIONI DA RISOLVERE

841. Dimostrare che il polinomio

$$y^6 + x^2y^4 \Sigma a^2 + x^4y^2 \Sigma a^2b^2 + x^6 a^2b^2c^2$$

è la somma di due quadrati.

842. Dimostrare geometricamente che

$$m_a < m_b + m_c.$$

843. Sommare

$$\cos \omega + 2 \cos 2\omega + 3 \cos 3\omega + \ldots + n \cos n\omega.$$

844. Stabilire la condizione affinchè l'equazione

$$(ax^2 + bx + c) + \lambda (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0$$

abbia le sue radici razionali, qualunque sia λ.

Candido.

845. Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione di 3° grado $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, c razionali, ammetta le radici in progressione aritmetica, oppure in progressione armonica.

G. La Marca.

846. Costruire " geometricamente " il triangolo, conoscendo i raggi dei cerchi, inscritto e circoscritto, e sapendo che i lati sono in progressione aritmetica.

847. Risolvere l'equazione:

$$x^2 - 12\sqrt[3]{x} + 20 = 0.$$

848. Risolvere l'equazione:

$$x^4 - 3x\sqrt[3]{x} + \frac{257}{16} = 0.$$

849. Costruire " geometricamente " il triangolo conoscendo il perimetro, la bisettrice u_a relativa al lato BC e l'angolo BAC.

DE BEI.

850. Semplificare l'espressione:

$$N = (2+\sqrt{3}) + \sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$$

GEORGE T. POTOPEANU.

N. B. — Le risoluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. LAZZERI, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 31 maggio 1907.

ERRATA-CORRIGE.

Fra i risolutori della quist. **806** deve aggiungersi il sig. **Costa**, R. I. T. di *Torino*.

È stato pubblicato:

LAZZERI E PESCI

COMPLEMENTI D'ALGEBRA

per l'ammissione alla R. Accademia Navale

Seconda edizione riveduta e corretta — LIRE **3,80.** (*)

(*) Il volume sarà immediatamente spedito, raccomandato, a chi farà rimessa di L. 3,80 alla Libreria RAFFAELLO GIUSTI in Livorno.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 30 aprile 1907

ossia successivamente

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)=$$

da cui

$$31(x+1)=32(x-1)$$

$$x=63.$$

3ª Risoluzione.

Indicando con x, come nella risoluzione precedente, il numero d[illegible] aveva portato al mercato, si può costruire il seguente prospetto:

Numero d'ordine delle vendite	Numero delle uova	
	venduto	rima[illegible]
1ª	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+1)$	$x-\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1}{2}(x$
2ª	$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x-1)\right]+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x+1)$	$\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)=$
3ª	$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(x-3)\right]+\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(x+1)$	$\frac{1}{4}(x-3)-\frac{1}{8}(x+1)=$
4ª	$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}(x-7)\right]+\frac{1}{2}=\frac{1}{16}(x+1)$	$\frac{1}{8}(x-7)-\frac{1}{16}(x+1)=\frac{1}{1}$
5ª	$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{16}(x-15)\right]+\frac{1}{2}=\frac{1}{32}(x+1)$	$\frac{1}{16}(x-15)-\frac{1}{32}(x+1)=$

Per i dati del problema dovremo avere

$$\frac{1}{32}(x-31=1$$

$$x=63.$$

da cui si ha:

(*Verifica*).

Numero d'ordine delle vendite	Numero delle uova	
	venduto	
1ª	$\frac{1}{2}\cdot 63+\frac{1}{2}=32$	
2ª	$\frac{1}{2}\cdot 31+\frac{1}{2}=16$	
3ª	$\frac{1}{2}\cdot 15+\frac{1}{2}=8$	
4ª	$\frac{1}{1}\cdot 7+\frac{1}{2}=4$	
5ª	$\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}=2$	

Generalizzazione. — Supponiamo che il num[illegible] vece di un uovo rimangano r uova alla contadin[illegible]

Dimostriamo innanzi tutto che se x è il n[illegible] mercato, il numero delle uova che rimangono

$$\frac{1}{2^m}[x$$

Poichè per $1 \leqq m \leqq 5$ la (1) si è già [illegible] dimostrare che, ammessa verificata per n [illegible]

Supponiamo dunque che dopo l'$(m-$ [illegible]

è chiaro allora che il numero delle

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2^{m-1}}\right.$$

e quindi, per la (2), il numero

$$\frac{1}{2^{m-1}}[x-$$

come volevamo dimostrar[illegible]

Ciò posto, per i dati

da cui si ricava

$$x = 2^m \cdot (r + 1) - 1. \qquad (3)$$

In particolare se è $r = 1$, come supponevamo nella quist. 281, si ha

$$x = 2^{m+1} - 1$$

e, supponendo $m = 5$, come nella suddetta questione, si ritrova

$$x = 2^6 - 1 = 63.$$

Se invece supponiamo $r = 0$, cioè se supponiamo che alla contadina non rimanga alcun uovo, allora si ha dalla (3)

$$x = 2^m - 1.$$

Per es., supponendo $m = 3$ ed $r = 0$, si ha

$$x = 2^3 - 1 = 7.$$

Ulteriore generalizzazione. — Se si generalizzasse ancor più la quistione sostituendo $\frac{1}{n}$ a $\frac{1}{2}$, si troverebbe che dopo l'm^a vendita il numero delle uova rimaste è dato da

$$\frac{1}{n^m}\left\{x(n-1)^m - \left[n^m - (n-1)^m\right]\right\}$$

e quindi si avrebbe l'equazione

$$\frac{1}{n^m}\left\{x(n-1)^m - \left[n^m - (n-1)^m\right]\right\} = r$$

che dà

$$x = (r+1) \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^m - 1.$$

Poichè x deve essere intero, evidentemente r deve esser tale che $r + 1$ sia multiplo di $(n-1)^m$, cioè deve essere $r = k(n-1)^m - 1$, essendo k intero.

Per es.: se supponiamo $n = 3$, $m = 4$ ed $r = 31$, avremo

$$x = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1 = 161.$$

Inviarono risoluzioni analoghe alla 1ª pubblicata — puramente aritmetica — i sigg. **Collini** di *Forlì*; **Ferrari F.** di *Pavia* e **Lattanzio**, Scuola Cavalli e Conti di *Milano*.

Inviarono risoluzioni analoghe alla 2ª il predetto sig. **Ferrari F.** ed i sigg. **Berino** di *Palermo*; **Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*; **Garbelotto** e **Jogna**, R. I. T. di *Venezia*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Lepre** (?); **Lombardi**, R. L. di *Salerno*; **Plancich**, Coll. S. Giuseppe di *Porto Re* (Croazia), e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*.

Inviarono risoluzioni analoghe alla 3ª i sigg. **Anau**, R. I. T. di *Firenze*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Bottari** di *Vasto* e **Gatti**, R. I. T. di *Alessandria*.

Inviarono risoluzioni diverse da quelle pubblicate i sigg. **Bitossi** di *Forlì*; **Botto**, R. I. T. **Moreau** e **Zimmermann**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Lorenz**, R. I. T. di *Milano*; **Morelli**, R. I. T. di *Bari*; **Salonia**, L. P. di *Caserta* e sig.ra **Villani**, R. I. T. di *Pavia*.

I sigg. **F. Ferrari** o **Moreau** che hanno anche risoluto la questione generalizzata, e assai elegantemente, meritano una lode speciale.

Ci pervennero anche *due* risoluzioni errate (da *Ancona*). (G. C.-L.)

GIUOCHI PROPOSTI.

301. Una lepre, inseguita da un cane, trovasi di 90 salti in avanti, e fa 5 salti nel tempo in cui il cane ne fa 4; ma 7 salti di quella equivalgono a 5 salti di questo. Quanti salti deve fare il cane per raggiungere la lepre? — (Generalizzare la quistione).

302. Due corpi distano d metri uno dall'altro. Se si muovono con costante velocità uno verso l'altro, s'incontrano dopo m secondi; se si muovono uno dietro l'altro, con le medesime velocità, si raggiungono dopo n secondi. Qual'è la velocità di ciascun corpo in un secondo?

303. Un tale avendo messo a frutto un capitale k al p % d'interesse composto preleva alla fine di ogni anno una somma u necessaria al suo mantenimento. A quanto salirà il suo capitale dopo n anni?

Quale soluzione offre il quesito precedente, se il capitale alla fine di ogni anno viene aumentato, non diminuito, di u?

(*dalla raccolta dell'*Heis.)

ERRATA-CORRIGE.

L'enunciato del giuoco 231, proposto nel Fasc. III, deve correggersi nel seguente modo:

Tre grandi italiani, un poeta, un artista ed uno scienziato vissero rispettivamente 56, 89 e 78 anni; nello stesso anno in cui nacque lo scienziato l'artista morì e mancava allora soltanto un anno a festeggiare il 3º centenario della nascita del poeta. Dire quali sieno questi tre grandi, sapendo anche che dal principio dell'E. V. alla nascita del poeta passarono 1000 anni più che dalla morte dello scienziato ai nostri giorni.

Per un errore — forse di stampa — che trovasi nella *Enciclopedia moderna illustrata* edita dal Vallardi, era stata anticipata di un anno la morte del *grande artista*.

∴

Ai risolutori del giuoco 280 debbonsi aggiungere i sigg. **Bongini** e **Costa** del R. I. T. di *Torino*.

SUPPLEMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes**, a **Savona**, *Via Luigi Corsi, Villa Garroni.*

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 287, 288, 292 e 294.

287. *Dato un triangolo isoscele, costruirne un altro che abbia lo stesso perimetro e la stessa area.*

Risoluzione.

Se indichiamo con a la misura di ciascuno dei lati eguali del triangolo dato e con $2b$ quella della base, il semi-perimetro p è dato da

$$p = a + b$$

e l'area s^2 da

$$s^2 = b\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Se un altro triangolo isoscele che abbia per base $2y$ e ciascuno degli altri due lati eguali ad x ha lo stesso perimetro e la stessa area di quello dato, si dovrà avere

$$x + y = a + b; \qquad y\sqrt{x^2 - y^2} = b\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Eliminando x, dopo avere ridotta a forma razionale la 2ª equazione ed aver soppresso un fattore comune $(a + b)$, avremo per resultante:

$$2y^3 - y^2(a + b) + b^2(a - b) = 0. \qquad (1)$$

Indicando con y_1, y_2, y_3 le radici di quest'ultima equazione, si dovrà avere, per note proprietà:

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{a + b}{2}; \qquad y_1 y_2 y_4 = \frac{b^2(a - b)}{2}$$

e siccome evidentemente una delle radici della (1), per es. y_1, deve essere eguale a b, avremo

$$y_2 + y_3 = \frac{a + b}{2} - b = \frac{a - b}{2} \quad \text{e} \quad y_2 y_3 = \frac{b(b - a)}{2}$$

e quindi potremo ricavare i valori di y_2, y_3 dall'equazione

$$W^2 - \frac{a - b}{2} W - \frac{b(a - b)}{2} = 0.$$

Poichè deve essere

$$0 < W < a + b$$

ed è

$$f(0) = -\frac{b(a - b)}{2} < 0 \qquad \text{perchè è } a > b$$

e

$$f(a + b) - \frac{a^2 + 3ab + 4b^2}{2} > 0$$

avremo sempre una sola soluzione e precisamente la soluzione:

$$y_2 = \frac{a - b + \sqrt{(a - b)(a + 7b)}}{4}.$$

Parimente, se x_1, x_2, x_3 sono i tre valori corrispondenti della x, sarà $x_1 = a$ e

$$x_2 = a + b - \frac{\sqrt{(a - b)(a + 7b)}}{4}$$

$$x_2 = \frac{3a + 5b - \sqrt{(a - b)(a + 7b)}}{4}.$$

Dunque: se è dato un triangolo isoscele che abbia per base $2b$ e gli altri due lati eguali ad a, anche il triangolo isoscele che ha per base $2b'$ e gli altri due lati eguali ad a' essendo

$$b' = \frac{a - b + \sqrt{(a - b)(a + 7b)}}{4}$$

$$a' = \frac{3a + 5b - \sqrt{(a - b)(a + 7b)}}{4}$$

la stessa area e lo stesso perimetro di quello dato.

Esempi particolari:

per $a = 7$, $b = 6$ si ha $a' = 11$, $b' = 2$ $(p = 13,\ s^2 = 6\sqrt{13})$

" $a = 16$, $b = 15$ " $a' = 28$, $b' = 3$ $(p = 31,\ s^2 = 15\sqrt{31})$.

Hanno risoluto assai bene la quistione i sigg. **Cerrano**, **Delle Piane** e **Varese**, I. T. di *Casalmonferrato*; **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia* e **Salvo**, R. I. T. di *Catania*. Discreta anche la risoluzione del sig. **Salonia**, L. P. di *Caserta*, quantunque incompleta. Hanno inviato risoluzioni incomplete o inesatte i sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Cellini** di *Forlì*; **Denti L.** e **F.**, R. I. T. di *Messina*; e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*. Un'altra risoluzione, proveniente da Milano, della quale naturalmente non possiamo tener conto, contiene la costruzione geometrica per trovare infinite soluzioni del problema, che non sono altro che infiniti triangoli isosceli *eguali* al dato (!?)

(G. C.-L.)

(v. continuazione in 3ª pag.)

HARVARD COLLEGE LIBRARY
OCT 28 1907
CAMBRIDGE, MASS.

SU ALCUNI PROBLEMI DI CALCOLO COMBINATORIO

Con questo titolo il prof. G. Cardoso Laynes nel fascicolo precedente del *Supplemento*, pubblicò un interessante articolo, in cui era risoluto il problema che qui sotto riporteremo ed altri che da quello si possono dedurre.

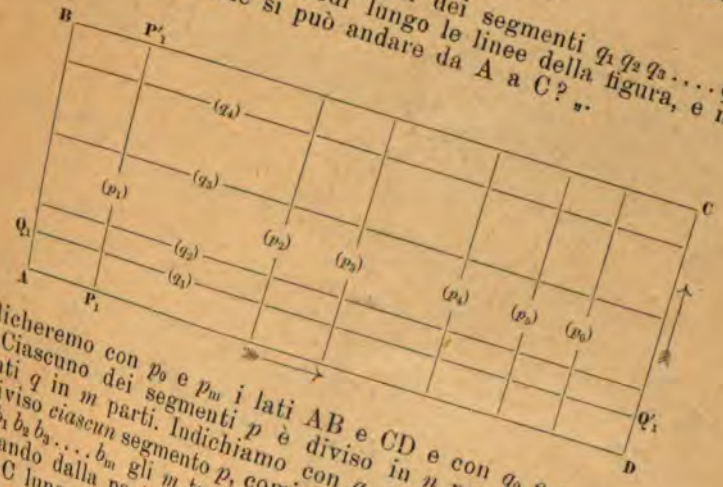
Credo utile far conoscere un'altra risoluzione dello stesso problema, che mi fu, qualche anno fa, comunicata dal compianto professore O. Porcelli, preside del R. Istituto tecnico di Bari.

Il problema era il seguente:

« Un rettangolo ABCD è diviso in m parti dai segmenti

$$p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_{m-1}$$

paralleli al lato AB e in n parti dei segmenti $q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_n$ paralleli ad AD. In quanti modi lungo le linee della figura, e nei sensi indicati dalle freccie si può andare da A a C? ».



Indicheremo con p_0 e p_m i lati AB e CD e con q_0 e q_m i lati AD e BC. Ciascuno dei segmenti p è diviso in n parti e ciascuno dei segmenti q in m parti. Indichiamo con $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$ gli n tratti in cui è diviso *ciascun* segmento p, cominciando dalla parte del lato AD, e con $b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_m$ gli m tratti in cui è diviso *ciascun* segmento q, cominciando dalla parte del lato AB. Allora il cammino per andare da A a C lungo il contorno del rettangolo passando per B, può simbolicamente indicarsi con

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \quad b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_m$$

e il cammino, lungo il contorno, passando per D può indicarsi con

$$b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_m \quad a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n,$$

e un qualsiasi percorso da A e C, che soddisfi alle condizioni del problema, potrà indicarsi con un gruppo formato in un modo qual-

siasi di n lettere a e di m lettere b, colla sola avvertenza che due indici qualsiansi di due lettere a, come pure due indici qualunque di due lettere b, consecutive o no, debbono esser crescenti.

Ora di questi gruppi è facile determinare il numero. Sia x questo numero. Se in ciascuno di questi x gruppi facciamo le permutazioni degli n indici di a e degli m indici di b avremo un numero totale di gruppi dato da

$$x \,.\, m!\; n!$$

Ma, così facendo, si formano tutte le permutazioni degli $m+n$ elementi, le quali sono in numero di $(m+n)!$ e quindi deve aversi:

$$x \,.\, m!\; n! = (m+n)!$$

da cui:

$$x = \frac{(m+n)!}{m!\; n!} = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$$

c. d. d.

***

Si può anche generalizzare questo problema nel seguente modo:

" Stabilito l'*ordine diretto* di un gruppo di m elementi, quello di " un altro gruppo di n elementi, quello di altri p elementi ecc. deter- " minare il numero dei gruppi di tutti gli $m+n+p+\ldots$ elementi, " nei quali gli elementi di ciascun gruppo parziale si succedono in " ordine diretto.

Risposta: $x = \dfrac{(m+n+p+\ldots)!}{m!\; n!\; p!}$.

E. Nannei.

Catania, aprile 1907.

INTORNO ALLA DEFINIZIONE DI EQUAZIONE

I trattati d'Algebra elementare, che di solito vanno per le mani degli scolari, non sono d'accordo circa la definizione di equazione. Alcuni ne dànno la definizione soltanto in senso stretto; altri, soltanto in senso lato. I primi dicono, sostanzialmente, che l'equazione è un'eguaglianza vera condizionatamente; i secondi, che è un'eguaglianza da risolvere.

Questo disaccordo nuoce all'unità dell'insegnamento. Inoltre, a parer mio, non è in tal guisa che devesi trattare la cosa. Secondo me, dopo data la definizione di eguaglianza in generale, ossia d'una relazione della forma A = B, si deve dire:

Le eguaglianze algebriche, ossia quelle contenenti lettere rappresentanti numeri indeterminati, possono essere di due specie: *identità* ed *equazioni propriamente dette*; secondochè sono o no vere incondizionatamente, rispetto ai valori particolari che si possono assegnare alle lettere in esse contenute. Perciò, data un'eguaglianza algebrica, si può proporre la questione di stabilirne la specie, determinando, se esistono, quali particolari valori (finiti od infiniti) debbono essere assegnati alle *incognite*, ossia alle lettere in essa contenute, non rappresentanti numeri arbitrari, affinchè sia verificata. Si dice, allora, che si ha da *risolvere un'equazione*, chiamandosi con tal nome generale, l'eguaglianza proposta; e si dicono *soluzioni* o *radici* dell'equazione i suddetti valori particolari delle incognite.

Così esponendo la cosa, lo scolaro non può fare confusione; e non si meraviglierà, se gli verrà detto che una data equazione è un'identità; come appunto è il caso di dire per un'equazione di primo grado ad un'incognita, quando si trovi la soluzione $x=\frac{0}{0}$ (indeterminazione reale).

Treviso, 30 Aprile 1907.

R. Grilli.

PICCOLE NOTE

Bisezione dell'arco per la tangente.

Nei migliori trattati di Trigonometria, (1) si risolve l'equazione quadratica avente per radici i valori di $\tan\frac{1}{2}\alpha$, dato $\tan\alpha$, senza tener conto dei valori eccezionali: $\tan\alpha=0$, e $\tan\alpha=\infty$.

Non mi sembra inutile pei giovani lettori di questo Periodico, esaminare brevemente questi due casi particolari.

1°. Sia $\tan\alpha=0$. L'equazione:

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{1}{2}\alpha}{1-\tan^2\frac{1}{2}\alpha},$$

diviene:

$$0=\frac{2\tan\frac{1}{2}\alpha}{1-\tan^2\frac{1}{2}\alpha}. \qquad (1)$$

Il secondo membro di essa si riduce a zero per $\tan\frac{1}{2}\alpha=0$ ed anche per $\tan\frac{1}{2}\alpha=\infty$. Al primo di questi valori corrispondono gli archi:

$$\frac{1}{2}\alpha=k\pi=2k\frac{\pi}{2},$$

(1) Vedi ad es. *Trattato elementare di Trigonometria* di G. Pesci, 2ª edizione, pag. 53. — Livorno, Giusti.

e all'altro gli archi:

$$\frac{1}{2}\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Queste soluzioni trigonometriche dell'equazione quadratica considerata si possono esprimere colla formola $h\frac{\pi}{2}$, la quale si ottiene direttamente risolvendo l'equazione:

$$\tan\alpha = 0,$$

giacchè gli archi che soddisfano a quest'ultima sono espressi da:

$$\alpha = h\pi,$$

da cui:

$$\frac{1}{2}\alpha = h\frac{\pi}{2},$$

dove h rappresenta un numero intero qualunque

2°. Sia $\tan\alpha = \infty$.

L'equazione (1) è verificata quando è:

$$1 - \tan^2\tfrac{1}{2}\alpha = 0,$$

cioè:

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \pm 1.$$

Gli archi che hanno per tangente $+1$ sono espressi da:

$$\frac{1}{2}\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} = 2k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

e quelli che hanno per tangente -1 sono espressi da:

$$\frac{1}{2}\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

In questo caso le soluzioni trigonometriche dell'equazione (1) si possono comprendere nell'unica formola

$$h\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

che si ottiene pure dalla relativa interpretazione geometrica della duplicità di valori dell'equazione quadratica considerata, perchè gli archi α aventi per tangente l'infinito sono espressi da:

$$\alpha = h\pi + \frac{\pi}{2},$$

da cui:

$$\frac{1}{2}\alpha = h\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

A. Neppi Modona.

Alessandria, aprile 1907.

78ª QUISTIONE A CONCORSO

Siano A'B'C' e H il triangolo ortico e l'ortocentro del triangolo ABC; H_1, H_2, H_3 gli ortocentri dei triangoli AB'C', BC'A', CA'B'.

Dimostrare che:

1°. Le rette H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 incontrano rispettivamente i lati AB, BC, CA in punti allineati.

2°. Le perpendicolari condotte dai punti H_1, H_2, H_3 alle rette BC, CA, AB, e che le incontrano nei punti I_a, I_b, I_c, concorrono nel punto I.

3°. Le rette AI_a, BI_b, CI_c, concorrono in un punto T.

4°. Se A_1, B_1, C_1, sono le intersezioni delle rette I_bI_c con B'C', I_cI_a con C'A', I_aI_b con A'B', le rette AA_1, BB_1, CC_1 sono concorrenti.

5°. Le rette I_bC', I_cB', B_1C_1 concorrono in A_2; I_cA', I_aC', C_1A_1, in B_2; I_aB', I_bB', A_1B_1 in C_2.

6°. I punti H, T, A_2, B_2, C_2 sono allineati.

7°. La retta che unisce gli ortocentri dei triangoli $H_1H_2H_3$ ed A'B'C' è l'asse radicale dei circoli di Apollonio del triangolo ABC.

I. S. Teodorf

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 30 giu
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig.
fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientific

RISOLUZIONE DELLA 75ª QUI

Determinare la relazione che

x^4 .

con la somma di due del
Dedurre un metod

Presero
geri, R.
De Cor
di M

Parecchie di queste risoluzioni non sono cattive, ma in quasi tutte si nota una esposizione non sufficientemente ponderata, quindi molte difettano in qualche punto. Molti risolutori si riferiscono alla quistione 829. La risoluzione del Longo è buona, ma troppo affrettata è la conclusione. Le migliori ci paiono quelle dei sigg. **Bugeanu** e **Florian** e specialmente quella di quest'ultimo. Quindi il premio sarà assegnato al sig.

Z. FLORIAN, L. di *Ploesti* (Romanìa).

R. VERCELLIN.

Risoluzione del sig. Florian (leggermente modificata).

Dette x_1, x_2, x_3, x_4 le radici dell'equazione

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0, \tag{1}$$

si ha

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p & (2) \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = q & (3) \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -r & (4) \\ x_1x_2x_3x_4 = s. & (5) \end{cases}$$

Posto

$$x_1 + x_2 = z, \qquad \text{onde} \qquad x_3 + x_4 = -(p + z), \tag{6}$$

le (3), (4) dànno rispettivamente

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_3x_4 = z^2 + zp + q, & (7) \\ -x_1x_2(z + p) + x_3x_4 \,.\, z = -r, & (8) \end{cases}$$

da cui

$$x_1x_2 = \frac{z^3 + pz^2 + qz + r}{2z + p}, \tag{9}$$

$$x_3x_4 = \frac{z^3 + 2pz^2 + (p^2 + q)z + pq - r}{2z + p}. \tag{10}$$

Ed ora le (9), (10), e (5) dànno la relazione.

$$(z^3 + pz^2 + qz + r)[z^3 + 2pz^2 + (p^2 + q)z + pq - r] = s(2z + p)^2, \tag{11}$$

la quale diviene

$$z^6 + 3pz^5 + (3p^2 + 2q)z^4 + (4pq + p^3)z^3 + (2p^2q + pr + q^2 - 4s)z^2 + \\ + p(q^2 + pr - 4s)z + pqr - p^2s - r^2 = 0. \tag{A}$$

Se $p = 0$, la relazione (A) diviene

$$z^6 + 2qz^4 + (q^2 - 4s)z^2 - r^2 = 0,$$

la quale si può risolvere.

Siano $\pm\sqrt{\alpha}$, $\pm\sqrt{\beta}$, $\pm\sqrt{\gamma}$ le sue radici; siccome, quando è $p = 0$, si ha $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, avremo (p. es.)

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{\alpha} \\ x_1 + x_3 = \sqrt{\beta} \\ x_1 + x_4 = \sqrt{\gamma} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{e} \\ \text{,,} \\ \text{,,} \end{matrix} \quad \begin{cases} x_3 + x_4 = -\sqrt{\alpha}, \\ x_2 + x_4 = -\sqrt{\beta}, \\ x_2 + x_3 = -\sqrt{\gamma}. \end{cases} \quad (2)$$

Sommando le (1) abbiamo

$$3x_1 = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} - (x_2 + x_3 + x_4);$$

ma dalle (2) si deduce:

$$x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{2},$$

cosicchè sarà

$$x_1 = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}{2},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{2},$$

$$x_3 = \frac{-\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{2},$$

$$x_4 = \frac{-\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}{2}.$$

Se l'equazione è data sotto la forma generale

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

posto $x = y - \frac{a_1}{4}$, essa prende la forma

$$y^4 + qy^2 + ry + s = 0,$$

onde potranno applicarsi le formole precedenti.

Nota del Redattore. — La (11), dopo facili trasformazioni può scriversi:

$$(z^2 + pz + q)\,[(z^2 + pz)(z^2 + pz + q) + pr] - r^2 = s\,(2z + p)^2, \qquad (11')$$

sicchè, posto

$$z^2 + pz + q = y,$$

essa diviene

$$y\,[(y - q)\,y + pr] - r^2 = s\,[4\,(y - q) + p^2], \qquad (12)$$

ossia

$$y^3 - qy^2 + (pr - 4s)\,y + (4q - p^2)\,s - r^2 = 0.$$

La (12 dà)

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q + y}, \qquad (B)$$

e le (7), (5) e (12) ci dicono che x_1x_2 e x_3x_4 sono radici dell'equazione quadratica

$$X^2 - y \cdot X + s = 0, \qquad (13)$$

sicchè

$$x_1x_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4s}}{2},$$

$$x_3x_4 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4s}}{2}.$$

Da queste due, dalle (6) e dalla (12) è facile vedere quanto se-

Detta α una radice dell'equazione

$$y^3 - qy^2 + (pr - 4s)\,y + (4q - p^2)\,s - r^2$$

l'equazione

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s =$$

si scinde nelle due seguenti:

$$x^2 + \left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q + \alpha}\right) x + \left(\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - s}\right) = 0,$$

$$x^2 + \left(\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q + \alpha}\right) x + \left(\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - s}\right) = 0.$$

R. Vercellin.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 804, 810, 812, 826, 827, 833 E 838

804. *Dati i tre raggi* OA, OB, OC, *formanti gli angoli* $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \alpha$, *e dato* A; *determinare* B *e* C *in modo che* OA, OB, OC *siano in progressione aritmetica e il triangolo* ABC *abbia un'area data.*

S. Catania.

Risoluzione. — Distingueremo tre casi, secondo che è $\alpha < 90°$, $\alpha = 90°$, $\alpha > 90°$. Indichiamo con $k^2 \operatorname{sen} \alpha$ l'area data dal triangolo ABC, e con a la lunghezza del segmento dato OA: con x la ragione ignota della progressione aritmetica.

1° Caso. — Sia $\alpha < 90°$. Allora il quadrilatero AOCB è convesso e si ha:

$$\text{area ABC} = \text{area AOB} + \text{area BOC} - \text{area AOC},$$

ossia

$$k^2 \operatorname{sen} \alpha = \tfrac{1}{2} a (a + x) \operatorname{sen} \alpha + \tfrac{1}{2} (a + x)(a + 2x) \operatorname{sen} \alpha - \tfrac{1}{2} a (a + 2x) \operatorname{sen} 2\alpha$$

da cui:

$$x^2 + 2ax(1 - \cos\alpha) + a^2(1 - \cos\alpha) - k^2 = 0.$$

La ragione x può essere anche negativa: ma dev'essere $a + 2x > 0$, ossia $x > -\frac{a}{2}$: sicchè il sistema risolutivo del problema è

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2ax(1 - \cos\alpha) + a^2(1 - \cos\alpha) - k^2 = 0 \\ x > -\dfrac{a}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Si ha subito

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - k^2;$$

$$\Delta = k^2 - a^2(1 - \cos\alpha)\cos\alpha$$

cosicchè i valori notevoli di k^2 sono

$$a^2(1 - \cos\alpha)\cos\alpha \qquad \frac{a^2}{4}.$$

È facile vedere che è $a^2(1 - \cos\alpha)\cos\alpha \leqslant \frac{a^2}{4}$. Difatti il massimo valore del prodotto $(1 - \cos\alpha)\cos\alpha$, i cui fattori positivi danno somma costante, si ha quando

2°. Se è $k^2 = \frac{a^2}{4}$, essendo allora $f\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$, una radice dell'equazione è $x = -\frac{a}{2}$ che dà una soluzione limite del problema. L'altra radice dell'equazione cioè $-a\left(\frac{3}{2} - 2\cos\alpha\right)$ sarebbe soluzione del problema, se fosse soddisfatta la condizione $-a\left(\frac{3}{2} - 2\cos\alpha\right) > -\frac{a}{2}$, ossia $\cos\alpha > \frac{1}{2}$. Ma questa non è soddisfatta, perchè $\cos\alpha$ è negativo e perciò l'altra radice dell'equazione non è soluzione del problema.

3°. Se è $k^2 > \frac{a^2}{4}$, si ha $f\left(-\frac{a}{2}\right) < 0$, e perciò le radici di $f(x)$ sono reali e disuguali e $-\frac{a}{2}$ è compreso fra le radici: sicchè una di queste (la maggiore) soddisfa il problema.

Hanno mandato risoluzioni del problema i sigg. **Cutore** e **Maugeri**, R. I. T. *Catania*; **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana, *Firenze*; **Salutari**, R. L. *Macerata*; **Semenza**, R. I. T. *Milano*; **Mancia**, I. T. P. *Spoleto*; **Costa** e **Bongini**, R. I. T. *Torino*; **Garbelotto** e **De Conz**, R. I. T. **Levi**, R. L. *Venezia*. Nessuna però di queste risoluzioni era ben condotta, specialmente per ciò che riguarda la discussione.

E. Nannei.

810. *È dato un cilindro circolare retto di raggio* r *ed altezza* h; *si conduca un piano parallelo alle basi di esso in modo che la sezione ottenuta sia base comune di due coni che abbiano rispettivamente i vertici nei centri delle basi del cilindro ed abbiano una superficie laterale complessiva eguale alla superficie laterale del cilindro.*

Dimostrare che se è $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *il piano condotto per il punto medio dell'altezza risolve il problema.* G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione. — Indicando con x la distanza del piano secante da una base del cilindro avremo, l'equazione

$$\pi r\left[\sqrt{x^2 + r^2} + \sqrt{(h-x)^2 + r^2}\right] = 2\pi r h$$

cioè

$$\sqrt{(h-x)^2 + r^2} = 2h - \sqrt{x^2 + r^2}.$$

Quadrando e riducendo, si ha:

$$2x + 3h = 4\sqrt{x^2 + r^2},$$

e, quadrando di nuovo, si ha finalmente

$$12x^2 - 12hx + 16r^2 - 9h^2 = 0,$$

da cui:

$$x = \tfrac{1}{6}\left[3h \pm 2\sqrt{3(3h^2 - 4r^2)}\right].$$

Discussione. — Il sistema risolvente è

$$\begin{cases} f(x) = 12x^2 - 12hx + 16r^2 - 9h^2 = 0 \\ 0 < x < h. \end{cases}$$

Si ha:

$$f(0) = 16r^2 - 9h^2; \quad f(h) = 16r^2 - 9h^2; \quad \Delta = 12(3h^2 - 4r^2); \quad \Sigma = \frac{h}{2}.$$

Poichè è $f(0) = f(h)$, non sarà mai $f(0) \cdot f(h) < 0$, e quindi non avremo mai una sola soluzione ordinaria. Per averne due, essendo sempre soddisfatta la condizione $0 < \Sigma = \frac{h}{2} < h$, basterà che sieno soddisfatte le altre due

$$16r^2 - 9h^2 > 0, \quad 3h^2 - 4r^2 \geqslant 0,$$

le quali, risolute rispetto ad h, dànno rispettivamente:

$$h < \frac{4}{3}r, \quad h \geqslant \frac{2r}{\sqrt{3}},$$

cioè

$$\frac{2}{\sqrt{3}}r \leqslant h < \frac{4}{3}r.$$

Se è $h = \frac{2}{\sqrt{3}}r$, cioè $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, si ha una soluzione doppia ed il piano secante è il piano β, bisettore dello strato determinato dai due piani ai quali appartengono le basi del cilindro.

In tutti gli altri casi i due piani secanti, che corrispondono alle due soluzioni, sono simmetrici rispetto al piano β, com'è chiaro geometricamente, e com'è confermato dal fatto che è $\Sigma = \frac{h}{2}$.

Per $f(0) = f(h) = 0$, cioè per $h = \frac{4}{3}r$, si hanno due soluzioni limiti ($x_1 = 0$; $x_2 = h$); i piani secanti corrispondenti coincidono rispettivamente coi piani delle basi del cilindro e uno dei coni si riduce alla base.

Riassumendo:

$$\begin{cases} 0 < h < \frac{2}{\sqrt{3}}r & 0 \text{ soluzioni} \\ h = \frac{2}{\sqrt{3}}r & 1 \text{ soluzione doppia} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}r < h < \frac{4}{3}r & 2 \text{ soluzioni ordinarie} \\ h = \frac{4}{3}r & 2 \text{ soluzioni limiti} \\ \frac{4}{3}r < h < \infty & 0 \text{ soluzioni.} \end{cases}$$

Hanno inviato risoluzioni i sigg. **Bassi**, R. L. Beccaria; **Lattuada** e **Orlandi**, Scuola Cavalli e Conti, e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Becchi** e **Rosso**, R. I. T. di *Savona*; **Bellomo**, **D'Amico**, **Ferrari**, **Gramaccini**, **Lanternari**, **Magi** e **Papini** R. I. T. di *Ancona*; **Belvedere**, R. I. T. di *Messina*; **Bilossi** e **Cellini** di *Forlì*; **Bongini**, **Costa** e **Féraud de Villy**, R. I. T. di *Torino*; **Castiglioni**, R. I. T. e **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Cassani**, R. L. Eunio Q. Visconti, e **Perelli** di *Roma*; **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Corrado**, R. L. Minghetti di *Bologna*; **De Conz** e **Garbelotto**, R. I. T. e **Levi**, R. L. Marco Polo di *Venezia*; **Delle Piane** e **Varese**, I. T. P. di *Casalmonferrato*; **Ferri B.**, R. L. di *Arezzo*; **Gatti**, R. I. T. di *Alessandria*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Gozzi** e **Turola**, R. I. T. di *Mantova*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Mancia**, I. T. P. di *Spoleto*; **Procacci**, R. L. di *Massa*; **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Salutari**, R. L. di *Macerata*.

G. C.-L.

812. *Sopra una circonferenza di diametro* AB $= 2r$ *determinare un punto* P *in modo che le distanze di* P *da* AB, *da* A *e da* B *abbiano una data somma* k.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione. — Indicando rispettivamente con x, y, e z le distanze di P da A, da B e da AB, avremo il sistema:

$$xy = 2rz, \quad x^2 + y^2 = 4r^2, \quad x + y + z = k.$$

Dall'identità

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

si ha, per le tre equazioni del sistema (1):

$$(k-z)^2 = 4r^2 + 4rz, \qquad (1)$$

cioè

$$z^2 - 2z(k + 2r) + k^2 - 4r^2 = 0, \tag{2}$$

da cui

$$z_1 = k + 2r - 2\sqrt{r(2r + k)}, \qquad z_2 = k + 2r + 2\sqrt{r(2r + k)}. \tag{3}$$

Determinato il valore di z, il problema può considerarsi risoluto; evidentemente ad ogni valore accettabile di z che soddisfi alla relazione $0 < z < r$ corrisponderanno quattro posizioni del punto P (vertici del rettangolo iscritto che ha la base parallela ad AB e l'altezza data dal valore di z).

Discussione. — Il sistema risolvente è dato dalla (2) insieme alla diseguaglianza

$$0 < z \leqslant r.$$

Si ha:

$$\begin{cases} f(0) = k^2 - 4r^2 = (k + 2r)(k - 2r) \\ f(r) = k^2 - 2rk - 7r^2 = [k + r(2\sqrt{2} - 1)][k - r(2\sqrt{2} - 1)] = (k - k_1)(k - k_2) \\ \Delta > 0 \\ \Sigma = k + 2r. \end{cases}$$

Non si avranno mai due soluzioni ordinarie, perchè è $\Sigma > r$; per averne una, dovendo essere $f(0) \,.\, f(r) < 0$, cioè

$$(k - 2r)(k - k_1)(k - k_2) < 0;$$

e perchè è

$$k_1 < 2r < k_2,$$

occorrerà che sia

$$2r < k < k_2, \qquad \text{cioè} \qquad 2r < k < r(2\sqrt{2} + 1)$$

(che sia $k < k_1$ si esclude, supponendo $k > 0$).

In tal caso, essendo $f(0) > 0$ e $f(r) < 0$, la soluzione accettabile è $z = z_1$; del resto è evidente per le (3) che z_2 non è accettabile, essendo $z_2 > r$.

Anche per $k = k_2$, cioè per $k = r(2\sqrt{2} + 1)$ avremo una soluzione ordinaria, alla quale corrisponde per z il valore massimo $z = r$ e il punto P è in tal caso uno degli estremi del diametro perpendicolare ad AB.

Per avere soluzioni limiti deve essere $f(0) = 0$, quindi avremo una soluzione limite per $k = 2r$, alla quale corrisponde per z il valore $z = 0$, e quindi per P i due punti A e B. Per $k = 2r$ non si ha, oltre alla soluzione limite, una soluzione ordinaria perchè è $f(r) < 0$.

Negli altri casi non si hanno soluzioni.

Riepilogando, dunque si ha il seguente prospetto:

$k < 2r$	nessuna soluzione.	
$k = 2r$	1 soluz. limite	(due posizioni del punto P, estremi del diametro AB).
$2r < k < r(1 + 2\sqrt{2})$	1 soluz. ordinaria	(quattro posizioni del punto P).
$k = r(1 + 2\sqrt{2})$	» »	(due posizioni del punto P, estremi del diametro perpend. ad AB).
$r(1 + 2\sqrt{2}) < k$	nessuna soluzione.	

Le migliori risoluzioni furono inviate dai sigg. **Cerrano, Delle Piane** e **Varese**, I. T. P. di *Casalmonferrato*; **Longo**, di *Napoli*; **Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Maugeri** e **Salvo**, R. I. T. di *Catania*.

Inviarono risoluzioni anche i sigg. **Anau**, R. I. T. e **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Barberino** e **Cutore**, R. I. T. di *Catania*; **Becchi** e **Rosso**, R. I. T. di *Savona*; **Bellomo, Ferrari V.**, e **Gramaccini**, R. I. T. di *Ancona*; **Bongini Colombino, Costa, Ferand de Villy** e **Gerbino**, R. I. T. di *Torino*: **Bugeanu**, L. di *Ploesti* (Romania); **Cecchieri**, R. L. di *Massa*; **De Conz** e **Garbelotto**, R. I. T. e **Levi**, R. L. Marco Polo di *Venezia*; **Fresia**, R. I. T. di *Mondovì*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Guglielmi**, R. I. T. di *Bari*; **Mancia**, I. T. P. di *Spoleto*; **Lorenz** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Scala**, di *Cirò* (Catanzaro); **Turola**, R. I. T. di *Mantova*. G. C.-L.

826. *Risolvere l'equazione*

$$(cx^2 - a)\frac{b}{x^2} = \frac{4}{27}\left(\frac{b}{x^2} - (cx^2 - a)\right).$$

E. De Conz.

Risoluzione.

Posto: $cx^2 - a = \frac{b}{x^2}y$, essendo y un'incognita ausiliaria, si ha:

$$\frac{b^2}{x^4}y = \frac{4}{27}\left(\frac{b}{x^2} - \frac{b}{x^2}y\right)^2; \qquad \frac{b^2}{x^4}y = \frac{4}{27}\frac{b^2}{x^4}(1-y)^2,$$

ossia:

$$y = \frac{4}{27}(1-y)^2$$

e quindi l'equazione in y:

$$4y^2 - 35y + 4 = 0,$$

dalla quale

$$y_1 = \frac{35 + \sqrt{1161}}{8}, \quad y_2 = \frac{35 - \sqrt{1161}}{8}.$$

Le radici dell'equazione proposta saranno dunque quelle delle due equazioni:

$$cx^2 - a = \frac{b}{x^2}y_1; \qquad cx^2 - a = \frac{b}{x^2}y_2$$

ossia:

$$\alpha)\quad cx^4 - ax^2 - by_1 = 0, \qquad \beta)\quad cx^4 - ax^2 - by_2 = 0,$$

dalle quali si ha:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4cby_1}}{2c}} \quad x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4cby_2}}{2c}}.$$

Si hanno dunque *otto* soluzioni: il loro esame, se si osserva che y_1 e y_2 sono positivi, dipende dalle due biquadratiche α) e β) e non presenta alcuna difficoltà.

Risolvettero in modo analogo l'equazione proposta i sigg. **Garbelotto**, R. I. T. *Venezia*; **Turola**, R. I. T. *Mantova*; **Mancia**, I. T. *Spoleto*; **Bassi**, R. L. Beccaria e **Semenza** R. I. T. *Milano*; **De Stefano**, R. L. Garibaldi, *Napoli*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. *Torino*; **Maugeri**, **Barberino**, **Salvo** e **Cutore**, R. I. T. *Catania*; **Ruspoli**, Coll. della Badia Fiesolana e **Castiglioni**, R. I. T. *Firenze*; **G. Potopeanu**, **N. Bujoreanu** e **Z. Florian**, L. *Ploesti* (Romania). A. Bassi.

827. *Un pezzo di metallo il cui coefficiente di dilatazione lineare è* k, *immerso nel mercurio subisce la spinta* s_0 *alla temperatura di* 0^0, *e la spinta* s_t *alla temperatura di* t^0. *Dedurre da questi dati, il coefficiente di dilatazione assoluta del mercurio.*

Risoluzione del sig. **E. Cutore**, R. I. T. di *Catania*.

Essendo v_0 e v_t i volumi del pezzo di metallo a 0^0 e a t^0, p_0 e p_t i pesi specifici del mercurio a 0^0 e a t^0, si ha (principio d'Archimede):

$$s_0 = v_0 p_0, \tag{1}$$

e

$$s_t = v_t p_t, \tag{2}$$

ma

$$v_t = v_0(1 + 3kt)$$

e

$$p_t = \frac{p_0}{1 + xt},$$

ove x è il coefficiente di dilatazione assoluta del mercurio; sostituendo nella (2), si ottiene:

$$s_t = v_0 (1 + 3kt) \frac{p^0}{1 + xt}. \tag{3}$$

Ma dalla (1) si ha

$$v_0 = \frac{s_0}{p_0},$$

quindi la (3) si può scrivere

$$s_t = \frac{s_0 (1 + 3kt)}{1 + xt},$$

da cui, risolvendo rispetto ad x, si ricava:

$$x = \frac{s_0 (1 + 3kt) - s_t}{t s_t}.$$

Analogamente risolvettero la questione proposta i sigg.: **Cherubini**, R. I. T. di *Perugia*; **Maugeri, Salvo** e **Barberino**, R. I. T. di *Catania*; **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*; **Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*; **De Stefani**, R. I. Garibaldi di *Napoli*; **Ferri**, R. L. di *Arezzo*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*.

I giovani **Mancia**, I. T. di *Spoleto* e **De Conz**, R. I. T. di *Venezia* commisero una svista nel calcolo.

Altre due risoluzioni pervenute sono inesatte. A. Bassi.

833. *Gli ortocentri dei quattro triangoli, che hanno per vertici quattro punti dati sopra un circolo, presi tre a tre, sono sopra un circolo uguale al circolo dato.* C. F. Jodi.

Risoluzione dei sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*.

Chiamiamo A, B, C, D i quattro punti dati, A′, B′, C′, D′ i baricentri dei triangoli BCD, CAD, ABD, ABC, ed O il centro del circolo.

Dalla considerazione dei due triangoli ABD, CBD, indicando con M il punto medio del lato comune BD, abbiamo

$$AC' = 2OM = CA',$$

e siccome AC′ e CA′ sono segmenti di perpendicolari allo stesso lato BD, sono pure paralleli. La figura AC′A′C è dunque un parallelogrammo e perciò è AC=A′C′.

Analogamente dimostreremo che B′D′ è uguale e parallelo a BD. I lati del quadrilatero A′B′C′D′ sono quindi rispettivamente eguali e paralleli a quelli del quadrilatero ABCD ed il circolo che passa per i quattro vertici dell'uno è uguale a quello che passa pei quattro vertici dell'altro.

Pressochè analoghe a questa sono le risoluzioni dei sigg. **Bellomo, Ferrari, Lanternari** e **Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Moreau**, Collegio della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Bucseneanu, Drosescu-Giondro, Florian, Potopeanu** e **Teodorescu**, L. di *Ploesti* (Romania); **Salvo**, R. I. T. di *Catania*; **Mancia**, I. T. di *Spoleto*; **Longo** di *Napoli*.

Il sig. **Teodorescu** osserva inoltre che i centri dei circoli di Eulero dei triangoli formati da due lati adiacenti e la corrispondente diagonale in ciascun quadrilatero costituiscono un nuovo quadrilatero simile a quello dato, ed il sig. **Longo** aggiunge l'osservazione che essendo i due quadrilateri ABCD e A′B′C′D′ simmetrici rispetto al punto medio di AA′, il centro del circolo circoscritto al quadrilatero degli ortocentri è simmetrico al centro O rispetto a quello stesso punto.

La risoluzione del sig. **De Conz**, basata sulla considerazione delle coordinate dei punti dati e degli ortocentri dei quattro possibili triangoli non è adatta al *Supplemento*. C. Alasia.

838. *Risolvere il sistema*

$$xy (x + y) = ab (a + b);$$
$$(x - y)(x + 2y)(y + 2x) = (a - b)(a + 2b) 2a + b).$$

A. Bassi.

Risoluzione del sig, **O. Bugeanu**, Liceo di *Ploesti* (Romania).

Posto $y = xz, b = ac$, il sistema diviene

$$x^3(1+z)z = a^3(1+c)c \qquad (1)$$
$$x^3(1-z)(1+2z)(2+z) = a^3(1-c)(1+2c)(2+c). \qquad (2)$$

Dividendo (1) per la (2), troviamo

$$\frac{z(1+z)}{(1-z)(1+2z)(2+z)} = \frac{c(1+c)}{(1-c)(1+2c)(2+c)},$$

donde

$$c(1+c)(1-z)(1+2z)(2+z) = (1-c)(1+2c)(2+c)z(1+z)$$

ossia

$$c(1+c)z^3 + (1+3c-c^3)z^2 + (1-3c^2-c^3)z - c(1+c) = 0 \qquad (3)$$
$$(z-c)[c(1+c)z^2 + (1+3c+c^2)z + (1+c)] = 0.$$

Le radici dell'equazione (3) sono

$$z_1 = c = \frac{b}{a} \qquad z_2 = -\frac{1+c}{c} = -\frac{a+b}{b} \qquad z_3 = -\frac{1}{1+c} = -\frac{a}{a+b}.$$

Sostituendo successivamente z_1, z_2, z_3 nella (1) otteniamo:

$$x^3 - a^3 = 0, \qquad x^3 - b^3 = 0, \qquad x^3 + (a+b)^3 = 0$$

che danno

$$x_1 = a;\ \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \frac{a}{2}(-1 \pm i\sqrt{3});\qquad x_4 = b;\ \left.\begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix}\right\} = \frac{b}{2}(-1 \pm i\sqrt{3});$$
$$x_7 = -(a+b);\quad \left.\begin{matrix} x_8 \\ x_9 \end{matrix}\right\} = \frac{a+b}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$$

e dalla $y = zx$ si ottengono i valori corrispondenti di y,

$$y_1 = b;\ \left.\begin{matrix} y_2 \\ y_3 \end{matrix}\right\} = \frac{b}{2}(-1 \pm i\sqrt{3});\quad y_4 = -(a+b);\ \left.\begin{matrix} y_5 \\ y_6 \end{matrix}\right\} = -\frac{a+b}{2}(1 \pm i\sqrt{3});$$
$$y_7 = a;\ \left.\begin{matrix} y_8 \\ y_9 \end{matrix}\right\} = \frac{a}{2}(1 \pm i\sqrt{3}).$$

Pervennero *otto* risoluzioni: **Cutore**, **Maugeri** e **Barberino** R. I. T. di *Catania* si avvicinano al procedimento qui seguito ma commettono errori di calcolo; **De Conz**, R. I. T. di *Venezia* e **Semenza**, R. I. T. di *Milano* ritengono che il testo della seconda equazione contenga un errore di stampa e sostituiscono al primo fattore nei due membri, rispettivamente $x + y$, e $a + b$; **Genta**, R. L. di *Cuneo*, presenta una risoluzione incompleta e quella di **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*, contiene inesattezze piuttosto gravi. A. Bassi.

QUISTIONI DA RISOLVERE

851. Sia BC un diametro mobile di un circolo, H un punto del suo piano, B′ e C′ i punti in cui le rette BH e CH tagliano il circolo. Trovare il luogo del punto medio di B′C′.

O. Bugeanu.

852. BB' e CC' si incontrano in un punto A. Il cerchio O, descritto su AH come diametro e che passa per B' e C', interseca ortogonalmente il cerchio O (785, pag. 43, *Supplemento*, Fasc. III). Quindi:

$$\overline{OB'}^2 = \overline{ON'}^2 - OH \,.\, OI.$$

O. Bugeanu.

853. Risolvere le equazioni

$$x(x+a)(x+b) - 2abx - ab(a+b) = 0;$$
$$(x-a-b)^2[x(a+b)-(a-b)^2] - 2ab[x^2-(a-b)^2] = 0;$$
$$x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0.$$

E.-N. Barisien.

854. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} (x+y)(1+xy+x^2y+xy^2+x^2y^2)+xy = a \\ xy(x+y)x+y+xy)(x+y+xy+x^2y+xy^2) = b. \end{cases}$$

E. De Conz.

855. Costruire un triangolo conoscendo un angolo, il rapporto fra la mediana e la simediana relative ed il prodotto dei lati adiacenti.

S. Bongini e G. Costa.

856. Dimostrare che il quadrato dell'espressione $2(x^4+12)$ è scomponibile nella somma di 5 quadrati. C. F. Jodi.

857. Siano E_a, E_b, E_c, i punti di tangenza dei circoli ex inscritti con i lati non prolungati di un triangolo; I_a, I_b, I_c i punti di tangenza della circonferenza inscritta coi lati stessi, e P_a, P_b, P_c i punti d'intersezione di questi con le congiungenti l'incentro a ciascun centro dei circoli ex inscritti. Si ha per il triangolo in questione

$$s = p^2 \sqrt{\frac{\overline{P_aI_a} \,.\, \overline{P_bI_b} \,.\, \overline{P_cI_c}}{\overline{E_aP_a} \,.\, \overline{E_bP_b} \,.\, \overline{E_cP_c}}}.$$

A. Mancia.

858. Dimostrare geometricamente che l'area della corona circolare compresa fra i cerchi circoscritto ed inscritto ad un poligono regolare, è funzione costante del lato del poligono, qualunque sia il numero dei lati del poligono, e determinare il rapporto costante tra essa e il quadrato del lato del poligono.

859. Costruire un triangolo dati i piedi delle bisettrici.

F. Ferrari.

860. Le circonferenze che hanno per diametri i segmenti che uniscono il fuoco di una parabola con i punti della curva stessa sono tangenti alla tangente al vertice.

Dedurre da questo teorema una costruzione della tangente in un punto di una parabola. G. Cardoso-Laynes.

N. B. — Le risoluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 30 giugno 1907.

ERRATA-CORRIGE. — Il nome del sig. **Landernani** che figura fra i risolutori della quist. **806** deve essere corretto in: **Lanternari**, R. I. T. di *Ancona*.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 maggio 1907

288. *Determinare un triangolo rettangolo i cui lati sieno misurati da numeri intieri e inoltre l'area ed il perimetro sieno espressi dallo stesso numero intiero.*

Risoluzione.

Indicando rispettivamente con x ed y le misure dei cateti e con z quella dell'ipotenusa, dovremo avere

$$x^2 + y^2 = z^2; \qquad \tfrac{1}{2}xy = x + y + z. \tag{1}$$

Eliminando z, si ha

$$4(x+y) - xy = 8.$$

Risolvendo questa equazione in $x+y$ e xy in numeri interi, poichè evidentemente una soluzione è $(x+y=2,\ xy=0)$, avremo

$$x + y = 2 + \theta, \qquad xy = 4\theta \tag{2}$$

e quindi per la (1), si ha

$$z = \tfrac{1}{2}xy - (x+y) = \theta - 2. \tag{3}$$

Dalle (2) si ha che x e y sono radici della equazione

$$W^2 - (2+\theta)W + 4\theta = 0$$

e quindi

$$W = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left[2 + \theta \pm \sqrt{\theta^2 - 12\theta + 4}\right]. \tag{4}$$

Affinchè W sia razionale, deve essere

$$\theta^2 - 12\theta + 4 = k^2$$

da cui

$$\theta = 6 \pm \sqrt{k^2 + 32};$$

ma dovendo per la (4) essere razionale anche θ, occorrerà che sia un quadrato perfetto $k^2 + 32$. Poniamo

$$k^2 + 32 = h^2 \quad \text{e quindi} \quad \theta = 6 \pm h. \tag{6}$$

La 1ª delle (6) può scriversi $(h+k)(h-k) = 32$, e poichè 32 è scomponibile in due fattori intieri soltanto nei tre modi 32.1; 16.2 e 8.4 e non può evidentemente essere $h+k=32$, $h-k=1$, perchè in tal caso h e k non sarebbero interi, sarà

$$h + k = 16; \quad h - k = 2 \quad \text{oppure} \quad h + k = 8; \quad h - k = 8$$

da cui

$$h = 9, \quad k = 7$$

e per la 2ª delle (6)

$$\theta_1 = 15, \qquad \theta_2 = -3$$

e quindi, per le (3) (4):

$$\begin{matrix} y_1 \\ y_1 \end{matrix}\Big\} = \begin{cases} 12 \\ 5\ ; \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\Big\} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$z_1 = 13 \qquad z_2 = -5$$

da cui

$$h = 6, \qquad k = 2$$

e per la 2ª delle (6)

$$\theta_3 = 12, \qquad \theta_4 = 0$$

e quindi, per le (3) (4):

$$\begin{matrix} x_3 \\ y_3 \end{matrix}\Big\} = \begin{cases} 8 \\ 6; \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_4 \\ y_4 \end{matrix}\Big\} = \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}$$

$$z_3 = 10 \qquad z = -2$$

Evidentemente sono accettabili soltanto la 1ª e la 3ª soluzione e cioè le misure dei lati del triangolo richiesto possono essere o

(5, 12 e 13) o **(6, 8 e 10)**

Inviarono risoluzioni complete i sigg. **Borino** di *Palermo*; **Becchi** e **Rosso**, R. I. T. di *Savona*; **Cellini** di *Forlì*; **Cerrano**, **Delle Piane** e **Varese**, I. T. P. di *Casalmonferrato*; **Ferrari** di *Pavia*; **Garbelotto**, R. I. T. di *Venezia*; **Malvano de Benedetti**, R. I. T. di *Torino*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*;

Inviarono risoluzioni incomplete i sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Castiglioni**, R. I. T. e **Zimmermann**, Collegio della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Piaucich**, Coll. di S. Giuseppe di *Portorè*; **Salvo**, R. I. T. di *Catania*; sig.ne **Villani**, R. I. T. di *Pavia*; **Zurlini**, R. I. T. di *Bologna*.

Sette risoluzioni erano completamente errate.

292. *In un collegio i convittori generalmente pagano 82 lire di retta mensile ciascuno; ma due fratelli pagano complessivamente L. 155. Se in quest'anno ogni mese il collegio riscuote L. 4073, quanti convittori ha?*

G. C.-L.

Risoluzione.

Indicando con x il numero dei convittori, escluse le y coppie di fratelli, deve essere

$$82x + 155y = 4073. \tag{1}$$

Risolvendo questa equazione in numeri interi, secondo il metodo esposto nel Fasc. II di quest'anno, si ha

	1	1	8	9
155	82	73	9	1
73	9	1	0	
	49	0	6	1
4073	55	55	1	

ed una soluzione intera della (1) è

$$y = 82\left(\frac{55}{82\,.\,73} - \frac{55}{73\,.\,9} + \frac{1}{9\,.\,1}\right) = 3; \qquad x = \frac{4073 - 155\,.\,3}{82} = 44$$

e quindi tutto sono date dalle formule

$$x = 44 - 155\theta; \qquad y = 3 + 82\theta.$$

Il solo valore di θ che dia soluzioni positive è evidentemente $\theta = 0$ e quindi l'unica soluzione intera positiva delle (1) è

$$x = 44; \qquad y = 3$$

e perciò il numero dei convittori è $44 + (3 \times 2) = 50$.

Inviarono risoluzioni analoghe a quella pubblicata i sigg. **Borino** di *Palermo*; **Cellini** di *Forlì*; **Denti F.** e **L.**, R. I. T. di *Messina*; **Florian**, L. di *Ploesti* (Romania); **Garbellotto**, R. I. T. di *Venezia* e **Piancich**, Coll. S. Giuseppe di *Portorè* (Croazia).

Inviarono altre risoluzioni i sigg. **Barberino** e **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Bitossi** di *Forlì*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Carissimo**, L. del Coll. Nazareno di *Roma*; **Castiglioni** e **Sonaglia**, R. I. T. e **Zimmermann**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Delle Piane** e **Cerrano**, R. I. P. di *Casalmonferrato*; **Drossescu**, L. di *Ploesti* (Romania); **Ferrari V.** e **Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Fresia**, R. I. T. di *Mondovì*; **Gavotti** di *Cremona*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Jogna**, R. I. T. di *Venezia*; **Lombardi** R. L. di *Salerno*; **Rosso**, R. I. T. di *Savona*; **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Salvo**, R. I. T. di *Catania*; **Scarponi**, R. I. T. di *Perugia*; sig.na **Villani**, R. I. T. e **Ferrari F.** di *Pavia*.

(Due risoluzioni errate, una proveniente da Milano, l'altra da Verona). (G. C.-L.)

294. *Trovare un quadrato perfetto di 4 cifre tale che aumentando di un'unità ciascuna cifra si ottenga un altro quadrato perfetto.*

Risoluzione.

Indicando risp. con a, b, c, d i valori assoluti delle cifre, si deve avere:

$$1000a + 100b + 10c + d = x^2 \qquad 1000(a+1) + 100(b+1) + 10(c+1) + (d+1) = y^2.$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene

$$1111 = x^2 - y^2$$

cioè

$$11 \,.\, 101 = (x+y)(x-y).$$

Non potendo essere $x + y = 11 \,.\, 101$, $x - y = 1$, perchè è $x < 100$, $y < 100$, l'unica ipotesi possibile è

$$x + y = 101, \qquad x - y = 11$$

da cui

$$x = 56, \qquad y = 45.$$

Infatti e $45^2 = 2025$ e $56^2 = 3136$ ed è chiaro che questi due numeri soddisfano alle condizioni poste.

Inviarono risoluzioni i sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Borino** di *Palermo*; **Castiglioni**, R. I. T. e **Moreau**, Coll. della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Cellini** di *Forlì*; **Cherubini**, R. I. T. di *Perugia*; **Ferrari V.**, R. I. T. di *Ancona*; sig.na **Fritzsche** di *Aquila*; **Genta**, R. L. di *Cuneo*; **Jogna**, R. I. T. di *Venezia*; **Lombardi**, R. L. di *Salerno*; **Longo** di *Napoli*; **Salonia**, L. P. di *Caserta*; **Salvo**, R. I. T. di *Catania*; **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; sig.na **Villani**, R. I. T. e **Ferrari F.** di *Pavia*.

Varî risolutori hanno notato giustamente l'affinità di questo giuoco col n. 272. (G. C.-L.)

GIUOCHI PROPOSTI

304. Trovare un numero di tre cifre tale che il numero formato dalle prime due sia eguale alla somma dei quadrati delle cifre stesse.

305. Trovare un numero di due cifre, che moltiplicato per la somma delle sue cifre, sia eguale alla somma dei cubi delle cifre stesse.

I. Cellini.

Le risoluzioni si accettano fino al 30 giugno p. v.

È stato pubblicato:

LAZZERI E PESCI

COMPLEMENTI D'ALGEBRA

per l'ammissione alla R. Accademia Navale

Seconda edizione riveduta e corretta — Lire **3,80.** (*)

(*) Il volume sarà immediatamente spedito, raccomandato, a chi farà rimessa di L. 3,80 alla Libreria RAFFAELLO GIUSTI in Livorno.

MATEMATICA RICREATIVA.

Per tutto ciò che riguarda questa rubrica, rivolgersi al redattore

Dott. prof. **Giulio Cardoso-Laynes**, a **Savona**, *Via Luigi Corsi, Villa Garroni.*

SPIEGAZIONE DEI GIUOCHI 282 e 291.

282. *Due pedoni* A *e* B *partono con eguale velocità da un luogo* M *verso un luogo* R. *Il primo parte prima del secondo. Giunto a 3 leghe distante da* R, A *raggiunge una schiera di oche, la quale cammina davanti a lui e fa* $\frac{1}{2}$ *di lega all'ora; mezz'ora dopo s'imbatte in una greggia di pecore che fa* $\frac{1}{4}$ *di lega all'ora.* B *trova le oche* $2\frac{1}{2}$ *leghe distante da* R *e le pecore 10 minuti prima di trovarsi a due leghe da* R. *Si domanda con quale velocità i due pedoni fanno il viaggio.* ***

Risoluzione.

Siano rispettivamente O_a, O_b, P_a e P_b i punti nei quali A e B incontrano le oche e le pecore; usiamo la lega come unità di misura lineare e l'ora come unità di misura di tempo e poniamo $\overline{MR} = d$.

Quando A arriva in O_a ha percorso uno spazio $d-3$; quando B giunge in O_b ha percorso uno spazio $d-\frac{5}{2}$ e quindi O_aO_b, spazio percorso dalle oche da quando furono raggiunte da A a quando furono raggiunte da B è $O_aO_b = (d-\frac{5}{2}) - (d-3) = \frac{1}{2}$. Poichè le oche hanno una velocità di $\frac{1}{2}$ di lega all'ora, il tempo da esse impiegato per andare da O_a a O_b è ore $(\frac{1}{2} : \frac{1}{2}) =$ ore 3.

Quando B raggiunge in O_b le oche, queste hanno camminato 3 ore da quando furono sorpassate da A, e perciò A avrà percorso in egual tempo $3x$ leghe, se x è la velocità con la quale si muove, cioè sarà distante da M di uno spazio $d-3+3x$, mentre B è distante da M di uno spazio $d-\frac{5}{2}$.

La distanza dei due pedoni è quindi

$$(d-3+3x)-(d-\tfrac{5}{2}) = \tfrac{1}{2}(6x-1). \qquad (1)$$

Analogamente quando A arriva in P_a ha camminato per un tempo $\dfrac{d-3}{x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2d-6+x}{2x}$ e quindi ha percorso uno spazio $\frac{1}{2}(2d-6+x)$; B, arrivando in P_b ha percorso uno spazio $d-2-\frac{1}{4}x$ e quindi $P_aP_b = (d-2-\frac{1}{4}x)-\frac{1}{2}(2d-6-x) = \frac{1}{4}(3-2x)$ e perciò il tempo impiegato dalle pecore per andare da P_a a P_b; è $\frac{1}{4}(3-2x):\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(15-10x)$.

Quando B raggiunge le pecore, queste hanno camminato per un tempo $\frac{1}{4}(15-10x)$ da quando furono raggiunte in P_a da A e quindi A sarà distante da M di uno spazio $\frac{1}{2}(2d-6+x)+\frac{1}{4}(15-10x)x$, mentre B è distante da M di $d-2-\frac{1}{4}x$ e quindi la distanza reciproca dei due pedoni è

$$(d-2-\tfrac{1}{4}x)-[\tfrac{1}{2}(2d-6+x)+\tfrac{1}{4}(15-10x)x] = \tfrac{1}{4}(17x-10x^2-3). \qquad (2)$$

Poichè i due pedoni si mantengono sempre ad eguale distanza, dovranno essere eguali le (1) (2), cioè dovrà essere

$$\tfrac{1}{2}(6x-1) = \tfrac{1}{4}(7x-10x^2-3)$$

ossia

$$20x^2-16x+3=0$$

da cui si ha

$$x_1=\frac{1}{2} \quad , \quad x_2=\frac{3}{10},$$

ossia i due pedoni possono avere la velocità di $\frac{1}{2}$ lega all'ora o quella di $\frac{3}{10}$ di lega all'ora.

Hanno inviato risoluzioni esatte, tenendo procedimenti molto diversi da quello della risoluzione pubblicata, i sigg. **Cellini** di *Forlì*; **Garbelotto** e **Jogna**, R. I. T. di *Venezia*; le altre *sette* risoluzioni inviateci erano errate (G. C.-L.)

291. *Tre grandi italiani, un poeta, un artista ed uno scienziato vissero rispettivamente 56, 89 e 78 anni; nello stesso anno in cui nacque lo scienziato, l'artista morì e mancava allora soltanto un anno a festeggiare il 3° centenario della nascita del poeta. Dire quali sieno questi tre grandi, sapendo anche che dal principio dell'E. V. alla nascita del poeta passarono 1000 anni più che dalla morte dello scienziato ai nostri giorni.* ***

Risoluzione.

Indicando con n ed m, con n' ed m' e con n'' ed m'' gli anni di nascita e di morte rispettivamente del poeta, dell'artista e dello scienziato, dovremo avere:

$$m-n=56 \qquad (1)$$
$$m'-n'=89 \qquad (2)$$
$$m''-n''=78 \qquad (3)$$
$$n''=m' \qquad (4)$$
$$n''=n+300-1 \quad \text{cioè} \quad n''-n=299 \qquad (5)$$
$$1907-m''=n-100 \quad \text{"} \quad m''+n=2907. \qquad (6)$$

Dalle (2) (6), sottraendo membro a membro, si ha

$$n+n''=2829 \qquad (7)$$

Dalle (5) (7), sommando e sottraendo, si ha

$$n''=1564 \quad , \quad n=1265.$$

Per le (1) (4) (2) (3) si ha

$$m=1321, \quad m'=1564, \quad n'=1475, \quad m''=1645.$$

I tre grandi italiani sono dunque: Dante (1265-1321), Michelangiolo (1475-1564) e Galileo (1564-1642).

(v. continuazione in 3ª pag.)

HARVARD COLLEGE LIBRARY
OCT 28 1907
CAMBRIDGE, MASS.

DI ALCUNE NOTEVOLI CURVE PIANE

(Continuazione — v. fasc. V-VI e VII)

Bisaccia. — Si consideri il circolo che passa per l'origine O delle coordinate ed ha per centro il punto C $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b)$. Dal punto O si costruisca una corda variabile OK, e per K si conduca la parallela all'asse delle ascisse e si prenda $\overline{PM} = \overline{OK}$. Il luogo geometrico del punto M, quando varia OK, è una curva che dal suo inventore G. Saint-Vincent (1647) fu detta *parabola virtualis* e che poi Cramer, cui si deve la costruzione precedente chiamò *bisaccia* (bis-saccus) (fig. 4).

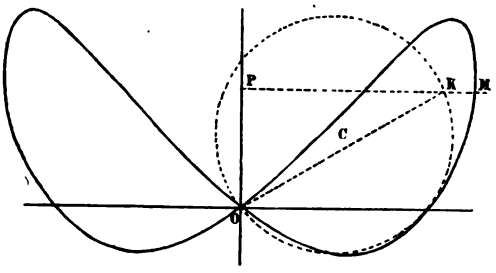


Fig. 4.

Indicando con x e y le coordinate del punto M e con x' e y' quella del punto K, si ha, osservando che è $x = \overline{PM} = \overline{OK}$,

$$x = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \qquad y = y';$$

e poichè x' e y' debbono soddisfare all'equazione del circolo dato, si ha pure:

$$x'^2 + y'^2 - ax' - by' = 0.$$

Fra queste ultime tre equazioni, eliminando x' e y', si ha:

$$(x^2 - by)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

che è l'equazione della bisaccia.

Se fosse $b = 0$, cioè se il centro del circolo fosse sull'asse della x, l'equazione diventerebbe

$$a^2y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$

e la curva in questo caso fu chiamata *lemniscata di Gerono* da Marie; e *otto*, per la sua forma, da Aubry.

Dell'*otto* possiamo dare un'altra costruzione per punti.

Sia $OA = a$ un diametro di un circolo, OC una sua corda variabile; si prenda su OA un segmento eguale in valore assoluto od AC e sia M il punto d'incontro della parallela ad OA per C colla perpendicolare ad OA per P. Il luogo di M è un *otto*. Infatti, se si prende OA per asse delle x e la perpendicolare in O per asse delle y, esprimendo in due modi l'area del triangolo rettangolo OCA si trova $ay = \pm x\sqrt{a^2 - x^2}$ ossia $a^2y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$.

L'area compresa da un ramo della bisaccia è data $A = \frac{1}{3} a \sqrt{a^2 + b^2}$, e nel caso dell'*otto* si ha: $A = \frac{1}{3} a^2$.

Bifoglio (*bifolium, folium duplex*). — Dato un angolo retto AOB (fig. 5), e i punti A e B sui suoi lati, alle distanze date $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ dal vertice, si costruisca per A una retta arbitraria AM e per B la perpendicolare BM. Quindi per M si conduca la retta MH perpendicolare ad AO, e per H la HK perpendicolare ad AM. Il luogo geometrico del punto comune a queste due rette K, quando varia la retta AM, è una curva trovata da Longchamps nel 1869, e che egli chiamò *bifoglio obliquo*.

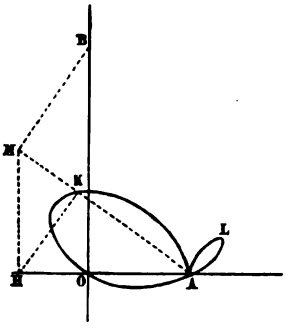


Fig. 5.

L'equazione di questa curva in coordinate polari si trova subito, considerando il punto A come origine, la retta AO come asse. Dal triangolo rettangolo AKH si ha: $\overline{AK} = \rho = \overline{AH} \cos \omega$. Ma dal triangolo AHM, si ha pure $\overline{AH} = \overline{AM} \cos \omega$; quindi è $\rho = \overline{AM} \cos^2 \omega$. Osservando poi che $\overline{AM}$ è la proiezione della spezzata AOBM sulla retta AM, si ha pure: $\overline{AM} = a \cos \omega + b \operatorname{sen} \omega$, e perciò si ha l'equazione

$$\rho = \cos^2 \omega \, (a \cos \omega + b \operatorname{sen} \omega).$$

L'equazione in coordinate cartesiane, prendendo A come origine e AO come asse delle ascisse, si può dedurre dalla precedente, colla nota sostituzione $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}$, $\rho \cos\omega = x$, $\rho \operatorname{sen}\omega = y$; si ha:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 (ax + by)$$

dunque, anche il bifoglio è una quartica, che ha un punto triplo nell'origine, che è anche un punto di regresso pei due rami KA, LA, tangenti ambedue in A all'asse delle ordinate.

Col nome di *bifolium* si indicano anche le curve definite, in generale, dell'equazione

$$y = \pm \left[\sqrt{p - ax} \pm \sqrt{r - bx}\right]$$

dove a, b, p, r sono costanti date. Fra esse è compresa, come caso particolare la curva che ha per equazione

$$y = \sqrt{px} \pm \sqrt{2px - x^2}$$

che si ottiene, ponendo nella precedente $a = 0$, $r = 2p$, $b = 1$.

Questa curva fu studiata da *Cramer* e vien chiamata *bifoglio retto*. Eccone una semplice costruzione suggerita da *Brocard*.

Si prenda un circolo, e $\overline{AO} = p$ sia un diametro. La retta OA sia l'asse delle ascisse e la tangente in O quello delle ordinate. Da un punto qualunque B del circolo si costruisca la perpendicolare BP al diametro e su di essa, da ambo le parti a partire da B, si prendano due segmenti BM, BM', in modo che sia $\overline{BM} = \overline{BM'} = \overline{OB}$. Il luogo geometrico dei punti M, M' è il bifoglio retto. Difatti si ha, ponendo $\widehat{AOB} = \varphi$,

$$x = \overline{OP} = \overline{OB} \cos \varphi: \quad \text{ma è} \quad \overline{OB} = \overline{OA} \cos \varphi = p \cos \varphi;$$

si ha perciò

$$x = p \cos^2 \varphi$$

$$y = \overline{PM} = \overline{PB} \pm \overline{BM} = p \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \pm p \cos \varphi.$$

Tra le espressioni di x e y eliminando φ, si ottiene subito

$$y = \sqrt{px} \pm \sqrt{2px - x^2}.$$

Cappa. — Costruita una retta CD parallela all'asse delle ascisse e alla distanza data $\overline{OC} = a$ da quest'asse, si prenda su CD un segmento CN arbitrario, e su ON il segmento $OM = CN$. Il luogo geometrico dei punti M è una curva, studiata da Barrow nel 1669 e chiamata *cappa* da Aubry, per una sua certa rassomiglianza alla lettera K.

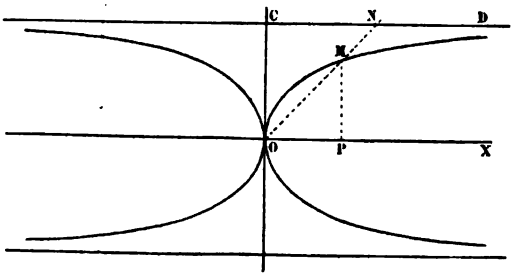


Fig. 6.

È facile vedere che la retta CD e la sua simmetrica rispetto all'asse delle y sono assintoti della curva: che questa passa per l'origine ed è simmetrica rispetto all'asse delle y.

È notevole la seguente costruzione dovuta a J. Bernouilli.

Da un estremo O del diametro OA d'un circolo dato, si conduce una corda arbitraria OB. Dal punto medio K dell'arco OB si conduca una retta parallela al diametro OA. Il luogo geometrico del punto d'incontro di questa parallela colla corda OB è un ramo di cappa.

L'equazione di questa curva in coordinate polari si trova subito. Difatti si ha (fig. 6): $\rho = \overline{OM} = \overline{CN} = a \operatorname{tg} \theta$.

L'equazione in coordinate cartesiane si ha considerando i triangoli OMP, ONC, dei quali si deduce $\overline{OP} : \overline{NC} :: \overline{MP} : \overline{OC}$ da cui

$$y^2 (x^2 + y^2) = a^2 x^2.$$

Si vede perciò che il *cappa* è una quartica, cioè una curva di quarto grado.

Si ha inoltre:

La superficie compresa fra la curva, l'asse delle ordinate e un asintoto è un quarto del circolo che ha per raggio la distanza fra l'asse delle ascisse e un asintoto. Si ha cioè: $A = \frac{1}{4} \pi a^2$.

E. Nannei.

(Continua).

SULLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} = 0. \qquad (1)$$

Le A, B, C si suppongono funzioni razionali intere rispetto all'incognita x. Si può supporre inoltre che non contengano nessun fattore comune in x; perchè se contengono un fattore comune M, l'equazione si scinde in $\sqrt[3]{M} = 0$, e in un'equazione della forma data.

Isolando il terzo radicale e poi innalzando al cubo si ottiene:

$$A + B + 3\sqrt[3]{AB}\,(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = -C. \qquad (2)$$

Ogni soluzione della (1) è soluzione della (2), e ogni soluzione *reale* della (2) è soluzione della (1).

La (2) è della stessa forma della (1), e non si riesce in nessuna guisa, con ulteriori innalzamenti a potenza, a renderla razionale. Ci si contenta di approfittare di nuovo della (1), sostituendo $-\sqrt[3]{C}$ invece di $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, e si ha:

$$A + B - 3\sqrt[3]{ABC} = -C. \qquad (a)$$

Ed infine:

$$(A + B + C)^3 - 27ABC = 0. \qquad (3)$$

Ogni soluzione della (1) è certo una soluzione della (3); ma *non si può ora dire che ogni soluzione reale della* (3) *è soluzione della* (1).

Se, p. es., si risolve l'equazione [1]

$$\sqrt[3]{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1+4x} = 0,$$

applicando la (3), si ottengono le due soluzioni reali $x = 0$, $x = -\frac{1}{4}$, delle quali la *sola* seconda soddisfa la (1).

Questo esempio intanto mostra, che, pur limitandoci alle soluzioni reali, la (3) è più generale della (1), contrariamente a quanto si afferma in alcuni libri, compreso il mio testo d'Algebra.

Indipendentemente dall'esempio riportato, si può dare una spiegazione di questo fatto, cioè che una soluzione reale della (3) può non essere soluzione della (1), che pare, ma non è, in contradizione con il teorema fondamentale che dice che le due equazioni $A = B$, $A^m = B^m$ per m dispari ammettono le stesse soluzioni reali. [2] Infatti; $x = \alpha$ non sia soluzione della (1). Allora, per $x = \alpha$ i valori numerici di $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ e $-\sqrt[3]{C}$ risulteranno differenti, e così i due membri della (2), come cubi di numeri differenti. Ma quando dalla (2) si passa alla (a) [e quindi alla (3)] ponendo $-\sqrt[3]{C}$ in luogo di $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, può darsi che i due suoi membri, per $x = \alpha$, diventino eguali; cioè $x = \alpha$, che non è soluzione della (1), può essere soluzione della (3), la quale quindi può avere soluzioni reali che non appartengono alla (1).

Una verifica dunque è necessaria.

Questa verifica certe volte non riesce facile, o è addirittura impossibile; e ciò avviene quando i valori numerici di A, B, C sono espressioni numeriche complicate, ovvero espressioni algebriche, se l'equazione è letterale.

Giova allora il seguente teorema che rende tale verifica assai semplice, e che, forse, è nuovo:

" La condizione necessaria e sufficiente affinchè una soluzione reale $x = \alpha$ della (3) sia soluzione della (1) è, che per $x = \alpha$, delle tre funzioni A, B, C due acquistino valori aventi un certo segno, e la rimanente un valore avente segno opposto ".

---

(1) Cfr. MARTINI-ZUCCAGNI, *Guida pratica per la risoluzione delle equazioni di 1° e 2° grado*. Livorno, Giusti, *Biblioteca degli studenti*, N. 90-91. L. 1.

(2) Cfr. il notevole articolo del prof. G. CANDIDO, sulle equazioni irrazionali.

La condizione è necessaria. Infatti, per $x=\alpha$ le A, B, C non possono contemporaneamente annullarsi, non contenendo nessun fattore comune in x. Nè possono acquistare tutte valori dello stesso segno, non essendo nulla la somma di tre numeri d'egual segno, eccetto nel caso in cui siano separatamente nulli. Dunque, due devono avere un segno e la rimanente l'opposto.

La condizione è sufficiente. Infatti; per $x=\alpha$ risultino positivi i valori di A e B, e negativo quello di C, e per semplicità di notazione, in ciò che segue A, B, C rappresentino i valori numerici delle funzioni A, B, C. Se dalla (3) si ricava che $\sqrt[3]{C}=-\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$, il teorema è dimostrato, perchè allora $x=\alpha$ è soluzione della (1).

Si ponga $C=-C'$. La (a), che è la stessa della (3), diviene:

$$C'-3\sqrt[3]{AB}\,.\,\sqrt[3]{C'}-(A+B)=0.$$

Posto $\sqrt[3]{C'}=u$, si ha:

$$u^3-3\sqrt[3]{AB}\,.\,u-(A+B)=0.$$

Applicando la formola di Tartaglia si ha:

$$u=\sqrt[3]{\frac{A+B}{2}+\sqrt{\frac{(A+B)^2}{4}-AB}}+\sqrt[3]{\frac{A+B}{2}-\sqrt{\frac{(A+B)^2}{4}-AB}}.$$

Cioè:

$$u=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}.$$

Ed essendo $u=\sqrt[3]{C'}=-\sqrt[3]{C}$, si ha, infine, come volevasi dimostrare: $-\sqrt[3]{C}=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$.

L'equazione precedente poi non ha altre radici reali.

Nota. — È manifesto poi che alla (1) può ridursi ogni equazione contenente tre radicali cubici senza altri termini, o due radicali cubici e termini razionali.

Esempio. — Risolvere.

$$\sqrt[3]{x+\frac{10}{9}\sqrt{3}}+\sqrt[3]{x-\frac{10}{9}\sqrt{3}}=2.$$

Risolvendo col metodo indicato si trova la sola soluzione reale $x=1$.

La verifica con la sostituzione diretta, riesce disagevole.

Col teorema dimostrato essendo per $x=2$, A e B positivi e C negativo, si concluderà, senz'altro, che $x=2$ è soluzione della proposta, anzi è l'unica soluzione reale della proposta.

S. Catania.

SULLA DISCUSSIONE DEI PROBLEMI DI 2° GRADO

Semplificazione del metodo di Tartinville.

Il presente articolo è specialmente rivolto agli insegnanti di Matematica che hanno avuta occasione nelle loro scuole di esperimentare il metodo di Tartinville

per la discussione dei problemi di 2° grado. [1] Questo metodo, pur tanto utile, richiede nel caso generale, che qui si considera, un cumulo non indifferente di nozioni, che i giovani studenti non devono mai perdere di vista, ciò che rende alquanto penosa l'applicazione del metodo stesso. La semplificazione qui proposta, a mio avviso, diminuisce di molto questa fatica riducendo il procedimento in sostanza all'ordinaria discussione di un' equazione di 2° grado contenente un parametro. È inutile aggiungere che, nel campo pratico, basterà che lo studente ricordi le regole che stabiliremo, senza tener conto del procedimento che impiegheremo per ottenerle.

Supponiamo che la risoluzione di un certo problema sia ridotta a quella di un'equazione di 2° grado e che ad ogni radice di questa equazione corrisponda una soluzione del problema, quando e solo quando la radice stessa sia compresa fra due numeri reali finiti α, β ($\alpha < \beta$) limiti inclusi. Supponiamo anche che l'equazione contenga un parametro variabile m oltre ad altri eventuali parametri che riguardiamo come fissi nel corso della discussione.

Sia l'equazione risolvente:

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

il cui primo membro indicheremo con $f(x)$. Porremo $\Delta = b^2 - 4ac$.

Facciamo una sostituzione d'incognita, ponendo:

$$y = \frac{x - \alpha}{\beta - x}. \tag{2}$$

La relazione (2) che lega fra loro le variabili y ed x è *biunivoca*.

Ad $x = \alpha$ corrisponde $y = 0$ e ad $x = \beta$ $y = \infty$. Ai valori di x compresi nell'intervallo $\alpha \ldots \beta$ corrispondono valori positivi di y, e viceversa ai valori positivi di y corrispondono valori di x compresi nel detto intervallo. La prima di queste due cose è evidente. Quanto alla seconda osserviamo che la (2) ci dà:

$$x = \frac{\beta y + \alpha}{y + 1} \tag{3}$$

e che il secondo membro della (3) per y positivo è certamente compreso fra α e β, come si verifica facilmente sottraendolo da questi due numeri. Sostituisco nella (1) al posto di x l'espressione equivalente $\frac{\beta y + \alpha}{y + 1}$.

Si ottiene una nuova equazione di 2° grado:

$$a'y^2 + b'y^2 + c' = 0. \tag{4}$$

Si trova poi facilmente: $a' = f(\beta)$, $b' = 2a \,.\, \alpha\beta + b(\alpha + \beta) + 2c$, [2] $c' = f(\alpha)$. $\Delta' = b'^2 - 4a'c' = (\alpha - \beta)^2\Delta$. [3]

È evidente che, fissato m, le radici della (4) sono i valori di y corrispondenti alle radici della (1). Dunque, quando e solo quando una delle radici della (4) sarà compresa nell'intervallo $0 \ldots + \infty$, la corrispondente radice della (1) sarà compresa fra α e β e ci darà una soluzione ordinaria del problema. Così quando

---

(1) Veggasi l'esposizione di questo metodo fatta dal Prof. AUSSANT-CARÀ nel "Supplemento al Periodico di Matematica", anno I, fasc. 4°, 5°, 6°. Veggasi anche la trattazione di questo argomento contenuta nel *Corso d'algebra complementare*, del MARTINI-ZUCCAGNI, Livorno, Editore Giusti.

(2) La espressione di b' si ricorda facilmente osservando che a meno di un fattore 2 essa si ottiene ponendo in $ax^2 + bx + c$ al posto di x nel primo termine $\sqrt{\alpha\beta}$ e nel 2° $\frac{\alpha+\beta}{2}$, due espressioni di noto significato.

(3) Sono le ben note proprietà delle sostituzioni lineari.

la (4) sarà soddisfatta da $y = 0$, oppure da $y = \infty$ (e solo allora), la (1) sarà soddisfatta rispettivamente da $x = \alpha$, $x = \beta$ e si avrà una soluzione limite. [1]

Basterà dunque formare per l'equazione (4) l'ordinario quadro della discussione delle radici (v. MARTINI-ZUCCAGNI, *l. c.*, pag. 153-55) e scrivere a destra di ogni linea le conclusioni relative *al problema dato.*

Nel caso che si abbia una sola soluzione ordinaria (accompagnata o no da una soluzione limite) è spesso utile sapere se essa corrisponde alla radice $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oppure alla radice x_2 dell'equazione primitiva. È facile vedere che in ogni caso (cioè indipendentemente dal segno di a) la radice ordinaria sarà x_1 se $f(\alpha)$, ossia c', sarà positivo (o $f(\beta) = a'$ negativo) e sarà x_2 nel caso contrario. Lo stesso criterio serve nel caso di un'unica soluzione limite, nel qual caso uno dei due numeri a', c' non sarà nullo.

OSSERVAZIONE. — Se il limite β fosse ∞, basterebbe applicare all'equazione data la sostituzione $x = y + \alpha$.

Applichiamo le cose dette all'esempio che si trova nel citato libro del M.-Z., a pag. 163.

Si ha $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-2)x - (7m+1)$ $\quad \alpha = -1, \quad \beta = +1$
$a' = f(\beta) = -8m + 2$; $b' = -16m$; $c' = -4m - 6$; $\Delta' = 16(8m^2 - 10m + 3)$.

I capisaldi della discussione dell'equazione in y sono $-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

Il quadro della discussione è:

VALORI di m	Δ'	a'	b'	c'	y_1	y_2	CONCLUSIONI (Soluzioni del problema)
$-\infty \ldots -\frac{3}{2}$	+	+	+	+	—	—	nessuna soluzione
$m = -\frac{3}{2}$	+	+	+	0	—	0	1 soluz. limite x_2
$-\frac{3}{2} \ldots 0$	+	+	+	—	—	+	1 soluz. ord. x_2
$m = 0$	+	+	0	—	—	+	»
$0 \ldots \frac{1}{4}$	+	+	—	—	—	+	»
$m = \frac{1}{4}$	+	0	—	—	—	∞	1 soluz. limite x_2
$\frac{1}{4} \ldots \frac{1}{2}$	+	—	—	—	—	—	nessuna soluzione
$m = \frac{1}{2}$	0	—	—	—	—	—	»
$\frac{1}{2} \ldots \frac{3}{4}$	—	—	—	—			radici complesse - ness. soluzione
$m = \frac{3}{4}$	0	—	—	—	—	—	nessuna soluzione
$\frac{3}{4} \ldots +\infty$	+	—	—	—	—	—	»

N. B. Nel prospetto che si trova a pag. 164 del libro citato è scritto x_1 invece di x_2. La ragione è ovvia. L'autore nella parte che riguarda la discussione delle equazioni chiama x_1 la radice $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, come ho fatto io qui: invece nell'esposizione del metodo di Tartinville chiama x_1 la minore delle 2 radici. Le due indicazioni si equivalgono evidentemente solo quando a è positivo. Del resto basta tener conto del segno di a per passare da un'indicazione all'altra.

G. B. ZECCA.

---

[1] È bene avvertire che la considerazione del valore ∞ di y, può essere, quando si eliminata quando si osservi direttamente che l'equazione data avrà per radice β ogni nell'equazione in y il coefficiente a' sarà nullo.

79ª QUISTIONE A CONCORSO

Nel piano d'un dato triangolo, determinare un punto, tale che le congiungenti di esso coi vertici incontrino gli assi de' lati opposti in tre punti *allineati*, dai quali i lati rispettivi siano veduti sotto un medesimo angolo.

R. VERCELLIN.

Le risoluzioni devono essere inviate al prof. Giulio Lazzeri non più tardi del 30 settembre 1907.
La migliore risoluzione sarà pubblicata nei numeri successivi, e all'autore il sig. Giusti, scegliendo fra le proprie edizioni, manderà in premio due volumi di opere scolastiche scientifiche.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 822, 831, 832, 834, 839 E 840

822. *Dimostrare le formule che dànno* cos (nx) *e* sen (nx) *in funzione di* cos x *e* sen x, *senza fare uso delle formule che dànno* cos $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ *e* sen $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ *in funzione di* cos x_i *e* sen x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$.

G. CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione.

Le formule

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(n\alpha) = \binom{n}{1} \operatorname{sen}\alpha \cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} \operatorname{sen}^3\alpha \cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5} \operatorname{sen}^5\alpha \cos^{n-5}\alpha - \ldots \\ \cos(n\alpha) = \binom{n}{0} \cos^n\alpha - \binom{n}{2} \operatorname{sen}^2\alpha \cos^{n-2}\alpha + \binom{n}{4} \operatorname{sen}^4\alpha \cos^{n-4}\alpha - \ldots \end{cases} \quad (1)$$

per $n = 2$ si dimostrano direttamente per via geometrica senza difficoltà.

Ammettiamole verificate per sen$(n\alpha)$ e cos$(n\alpha)$ e dimostriamo che valgono anche per sen $(n+1)\alpha$ e cos $(n+1)\alpha$.

Si ha:

$$\operatorname{sen}[(n+1)\alpha] = \operatorname{sen}(n\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}(n\alpha)\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos(n\alpha) =$$

$$= \cos\alpha\left[\binom{n}{1}\operatorname{sen}\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{sen}^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \ldots\right] +$$

$$+ \operatorname{sen}\alpha\left[\binom{n}{0}\cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \ldots\right] =$$

$$= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]\operatorname{sen}\alpha\cos^n\alpha - \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right]\operatorname{sen}^3\alpha\cos^{n-2}\alpha + \ldots +$$

$$= \binom{n+1}{1}\operatorname{sen}\alpha\cos^n\alpha - \binom{n+1}{3}\operatorname{sen}^3\alpha\cos^{n-2}\alpha + \ldots$$

c. d. d.

$$\cos[(n+1)\alpha] = \cos(n\alpha + \alpha) = \cos(n\alpha)\cos\alpha - \operatorname{sen}(n\alpha)\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= \cos\alpha\left[\binom{n}{0}\cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\operatorname{sen}^2\alpha + \ldots\right] -$$

$$- \operatorname{sen}\alpha\left[\binom{n}{1}\operatorname{sen}\alpha\cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{sen}^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + \ldots\right] =$$

$$= \binom{n}{0}\cos^{n+1}\alpha - \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]\operatorname{sen}^2\alpha\cos^{n-1}\alpha + \ldots$$

$$= \binom{n+1}{0}\cos^{n+1}\alpha - \binom{n+1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha\cos^{n-1}\alpha + \ldots$$

c. d. d.

Inviarono risoluzioni di questa questione i sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Bujoreanu, Drosescu, Florian, Potopeanu** e **Teodorescu**, L. di *Ploesti* (Romanìa); **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*.

Tutti quanti deducono le (1) dalla nota formula di Moivre

$$\cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha) = (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n.$$

(G. C.-L.)

831. *Costruire un trapezio conoscendo di posizione e grandezza una delle basi e il punto d'incontro delle diagonali, e conoscendo la distanza del punto d'incontro dei lati non paralleli dalla base stessa.*

CUTORE.

Risoluzione.

Sia AB la base data; P il punto d'incontro delle diagonali, e d la distanza dei lati non paralleli dalla retta AB.

È noto che in ogni trapezio (*ordinario*, o *intrecciato*) i punti medi dei lati paralleli, il punto d'incontro delle diagonali e quello dei lati non paralleli sono in linea retta. Perciò se O è il punto medio di AB, e r una retta parallela ad AB avente da AB distanza eguale a d, il punto comune M alle due rette OP ed r sarà il punto d'incontro dei lati non paralleli. Se poi dal punto d'incontro C di AP e BM si conduce la parallela ad AB che incontri AM nel punto D, si ha nel quadrangolo ABCD il trapezio richiesto.

Poichè son due le parallele ad AB che hanno da AB distanza eguale a d, il problema ha due soluzioni; e com'è facile verificare, dei due trapezi che si ottengono, l'uno ha AB per base maggiore (quello pel quale il punto P e la retta r si trovano da una stessa parte della retta AB); l'altro ha AB per base minore.

I due trapezi sono entrambi ordinari, o entrambi intrecciati secondo che il segmento d è maggiore o minore della distanza del punto P dalla retta AB.

In particolare, se d è eguale alla distanza del punto P dalla retta AB, in uno dei trapezi la base CD si riduce ad un punto (il trapezio degenera in un triangolo); nell'altro la base CD è a distanza infinita.

Inviarono buone risoluzioni i sigg. **Andri**, S. I. di *Vicenza*; **Baratta**, R. I. T. di *Messina*; **Barberino, Cutore, Maugeri** e **Salvo**, R. I. T. di *Catania*; **Bellomo, Ferrari, Lanternari** e **Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Bucseneanu, Drosescu-Giondro, Florian, Cara-Thasse, Potopeanu** e **Teodorescu**, L. S.[i] Pietro e Paolo di *Ploesti* (Romanìa); **Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*; **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*; **Longo** di *Napoli*; **Mancia**, I. T. P. di *Spoleto*; **Martinetti** e **Semenza**, R. I. T. di *Milano*; **Moreau**, Collegio della Badia Fiesolana di *Firenze*; **Turola**, R. I. T. di *Mantova*.

Alcune di queste risoluzioni si basano sulle proposizioni più comuni della geometria elementare; altre (quelle del **Barberino**, **Cutere**, **Maugeri**, **Bucseneanu**, **Cara-Thasse**, **Drosescu-Giondro**, **Florian**, **Potopeanu**, **Teodorescu**, **Bongini** e **Costa**) sulle proprietà armoniche del quadrilatero completo, o sul teorema di Desargues o su quello di Ceva.

Il sig. **De Conz**, ricava la costruzione del trapezio da una risoluzione analitica.

Nessuno dei risolutori fa le necessarie osservazioni relative al numero delle soluzioni del problema, ai casi che si presentano riguardo ai trapezi ordinari e intrecciati, e ai casi limiti.

Fu anche mandata una risoluzione errata.

C. Ciamberlini.

832. *Dato un cerchio e un quadrilatero inscritto in esso, il quadrato della terza diagonale è uguale alla somma dei quadrati delle tangenti condotte dai suoi estremi, e la diagonale stessa è uguale alla somma delle due tangenti condotte dal suo punto medio.*

C. F. Jodi.

Dimostrazione del sig. **Florian**, R. L. di *Ploesti* (Romania).

Sia ABCD il quadrilatero inscritto e EF la terza diagonale, essendo E il punto comune delle rette AB, DC e F quello delle rette BC, AD. Sieno inoltre EP e FN le tangenti al circolo condotte da E e da F. Costruiamo pel vertice D la antiparallela a CF rispetto all'angolo CEF, e sia M il punto in cui essa incontra la diagonale EF.

Per noti teoremi si ha:

$$\overline{ED \cdot EC} = \overline{EF \cdot EM}$$

$$\overline{FB \cdot FC} = \overline{EF \cdot FM}$$

da cui, sommando, si deduce:

$$\overline{ED \cdot EC} + \overline{FB \cdot FC} = \overline{EF}^2.$$

Ma è $\overline{ED \cdot EC} = \overline{EP}^2$, $\overline{FB \cdot FC} = \overline{FN}^2$: si ha dunque:

$$\overline{EF}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{FN}^2$$

Di più, pel problema 785 (v. *Suppl.* A. X, fasc. III) si ha che il circolo descritto su $\overline{EF}$ come diametro interseca ortogonalmente il circolo ABCD: cosicchè se O è il centro del circolo dato, O' il punto medio della terza diagonale, H, K i punti d'incontro dei due circoli suddetti, si ha che gli angoli O'HO e O'KO sono retti, e perciò O'H e O'K son le tangenti condotte da O' al circolo: ed è evidente che si ha: $\overline{EF} = \overline{O'H} + \overline{O'K} = 2\,\overline{O'H}$.

Dimostrarono in questo modo il teorema i sigg. **Teodorescu** e **J. G. Drosescu-Giondro**, R. L. di *Ploesti* (Romania).

Dimostrazione dei sigg. **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*.

Pel noto teorema: " La somma delle potenze di due punti diagonali d'un quadrilatero inscritto in un circolo rispetto al circolo è equivalente al quadrato della loro distanza ". (V. Baltzer, P. 4ª, pag. 178), si ha

$$\overline{EF}^2 = \overline{EA \cdot EB} + \overline{FD \cdot FA} = \overline{EP}^2 + \overline{FN}^2.$$

Si ha inoltre pel teorema della mediana,

$$\overline{OO'}^2 = \tfrac{1}{4}\{2\,\overline{OE}^2 + 2\,\overline{OF}^2 - \overline{EF}^2\}$$

839. *Risolvere e,* principalmente, *discutere il seguente problema:* " *Due aste* " PA *e* P'A' *si elevano verticalmente sopra uno stesso piano orizzontale: trovare* " *sulla retta* PP', *che passa per i loro piedi, un punto tale che l'angolo di eleva-* " *zione di* A' *sia doppio di quello di* A, *conoscendo* AP, A'P' *e* PP' ".

G. Pesci.

Risoluzione.

Si prenda per origine il punto P, per senso positivo quello che da P va verso P', e si indichi con X il punto cercato; per la natura del problema i due angoli da considerare sono i due angoli acuti PXA e P'XA', per cui, ponendo

$$PA = h, \quad P'A' = h', \quad PP' = d, \quad PXA = \theta,$$

e stabilendo di dire che una soluzione è di I, di II, di III specie, secondo che il corrispondente punto X si trova dalla parte opposta a P' rispetto a P (l'estremo P incluso), fra P e P' (l'estremo P' incluso), dalla parte opposta a P rispetto a P', è evidente che

per le soluz.i di I specie deve essere $\tan\theta = -\dfrac{h}{x}$, $\tan 2\theta = +\dfrac{h'}{d-x}$,

" " di II " " " $\tan\theta = +\dfrac{h}{x}$, $\tan 2\theta = +\dfrac{h'}{d-x}$,

" " di III " " " $\tan\theta = +\dfrac{h}{x}$, $\tan 2\theta = -\dfrac{h'}{d-x}$.

Di qui si ha facilmente che le soluzioni di II specie devono soddisfare alla equazione

$$(h' + 2h)\,x^2 - 2hdx - h'h^2 = 0, \tag{1}$$

le cui radici sono

$$x_1 = +\frac{h}{h'+2h}\left(d - \sqrt{d^2 + h'^2 + 2hh'}\right), \tag{2}$$

$$x_2 = +\frac{h}{h'+2h}\left(d + \sqrt{d^2 + h'^2 + 2hh'}\right); \tag{3}$$

e che le soluzioni di I e di III specie devono soddisfare alla equazione

$$(h' - 2h)\,x^2 + 2hdx - h'h^2 = 0, \tag{4}$$

le cui radici sono

$$x_1' = -\frac{h}{h'-2h}\left(d + \sqrt{d^2 + h'^2 - 2hh'}\right), \tag{5}$$

$$x_2' = -\frac{h}{h'-2h}\left(d - \sqrt{d^2 + h'^2 - 2hh'}\right). \tag{6}$$

Ciò posto, affinchè una radice x della (4) sia una soluzione di I specie bisogna che sia $x \leqslant 0$, affinchè una radice x della (1) sia una soluzione di II specie bisogna che sia $0 < x \leqslant d$, affinchè una radice x della (4) sia una soluzione di III specie bisogna che sia $x > d$; quindi, per avere tutte le soluzioni in ciascuna delle ipotesi che si possono fare relativamente ai dati, sarà opportuno ricorrere al noto metodo di *Tartinville*, [1] tenendo ben presente che, per la natura del problema, i valori di h', h, e d devono ritenersi tutti maggiori di zero, e le radici devono essere finite.

I) Affinchè esista una soluzione di I specie, essendo allora $\alpha = -\infty$ e $\beta = 0$, deve essere $af(\beta) < 0$: ma dalla (4) si ha

$$a = h' - 2h, \quad f(\beta) = -h'h^2,$$

[1] Ci serviremo delle notazioni usate dal Prof. Aussant-Carà nella pregevole esposizione che egli fece di questo metodo (*Supplemento*, 1898, fasc. IV, V e VI).

quindi, deve essere

$$-h'h^2(h'-2h)<0;$$

dunque si ha una soluzione di I specie se $h'<2h$, e questa soluzione si sa essere x_1'.

Non possono poi esistere due soluzioni di I specie, perchè dovrebbe essere $af(\beta)>0$, da cui $h'<2h$, e $\Sigma<\beta$, ossia $\frac{hd}{2h-h'}<0$, da cui $h'>2h$.

E neppure esiste una soluzione limite, non potendo essere $f(\alpha)f(\beta)=0$.

II) Affinchè esista una soluzione di II specie, essendo allora $\alpha=0$ e $\beta=d$, deve essere $f(\alpha)f(\beta)<0$: ma dalla (1) si ha

$$f(\alpha)=-h'h^2, \qquad f(\beta)=h'(d^2-h^2),$$

quindi deve essere

$$-h'^2h^2(d^2-h^2)<0,$$

ossia $d>h$, inoltre $a=h'+2h$ e quindi $af(\alpha)<0$; dunque si ha una soluzione di II specie se $d>h$, e questa soluzione si sa essere x_2.

Non possono poi esistere due soluzioni di II specie, perchè dovrebbe essere $af(\alpha)>0$, e ciò è impossibile.

Resta da esaminare se ci possono essere delle soluzioni limiti. Dovendo essere $f(\alpha)f(\beta)=0$, si potranno avere delle soluzioni limiti solo se $d=h$; e siccome, essendo ora $\Sigma=\frac{dh}{h'+2h}$, si ha $\Sigma<\beta$ e inoltre $af(\alpha)<0$, si ha una soluzione limite di II specie se $d=h$, e questa soluzione è $x_2=h$.

III) Affinchè esista una soluzione di III specie, essendo allora $\alpha=d$ e $\beta=+\infty$, deve essere $af(\alpha)<0$, ma dalla (4) si ha

$$a=h'-2h, \qquad f(\alpha)=h'(d^2-h^2),$$

quindi deve essere

$$(h'-2h)(d^2-h^2)h'<0;$$

dunque si ha una soluzione di III specie se $h'<2h$ e $d>h$, ossia se $h'>2h$ e $d<h$, e questa soluzione è x_2' nella prima ipotesi e x_1' nella seconda.

Affinchè esistano due soluzioni di III specie deve, prima di tutto, essere $af(\alpha)>0$, da cui o $h'>2h$ e $d>h$, o $h'<2h$ e $d<h$. Dovendo poi essere $\Sigma>\alpha$, ossia $\frac{hd}{2h-h'}>d$, ciò è impossibile nella prima ipotesi, e quindi questa va esclusa; e nella seconda ipotesi è possibile se $h'>d$. Oltre a ciò deve anche essere $\Delta>0$ perchè si abbiano due soluzioni distinte, e $\Delta=0$ perchè si abbia una soluzione doppia; ma $\Delta=d^2+h'^2-2hh'$; dunque si hanno le due soluzioni di III sp., x_1', x_2', se si verificano contemporaneamente le tre condizioni $h<h'<2h$, $d<h$, $d^2>(2h-h')h'$, si ha la soluzione doppia di III specie $x_1'=x_2'=\frac{hd}{2h-h'}$ se invece della terza condizione si verifica l'altra $d^2=(2h-h')h'$.

Resta da esaminare se ci possono essere delle soluzioni limiti. Prima di tutto deve essere $f(\alpha)=0$, e quindi $d=h$; confrontando poi Σ con α, si vede che: per $h'<h$ si ha la soluzione limite $x_1'=h$; per $h'=h$ si ha la soluzione limite doppia $x_1'=x_2'=h$; per $h'>h$ si ha la soluzione limite $x_1'=h$ e la soluzione ordinaria $x_2'=\frac{hh'}{2h-h'}$; ed è di questa sola che si dovrà tener conto, essendo la soluzione limite $x=h$ già compresa nelle soluzioni di II specie.

Devesi, finalmente, per la (4), considerare separatamente il caso in cui sia $h'=2h$, nel quale la (4) stessa dà $x=\frac{h^2}{d}$; quindi non si hanno soluzioni di I specie, e affinchè esista una soluzione di III specie deve essere $x>d$, ossia $d<h$.

Raccogliendo e ordinando tutti i risultati della precedente discussione si ha il seguente specchio:

			I sp.	II sp.	III sp.
$h' > 2h$	$d < h$		x_1'	—	x_2'
	$d = h$		x_1'	$x = h$	—
	$d > h$		x_1'	x_2	—
$h' = 2h$	$d < h$		—	—	$x = \frac{h^2}{d}$
	$d = h$		—	$x = h$	—
	$d > h$		—	x_2	—
$h' < 2h$	$d < h$	$h' > h$, $d^2 > (2h - h')h'$	—	—	x_1', x_2'
		$h' > h$, $d^2 = (2h - h')h'$	—	—	$x = \frac{hd}{2h - h'}$
		$h' > h$, $d^2 < (2h - h')h'$	—	—	—
		$h' \leqslant h$	—	—	—
	$d = h$	$h' > h$	—	$x = h$	$x = \frac{hh'}{2h - h'}$
		$h' \leqslant h$	—	$x = h$	—
	$d > h$		—	x_2	x_1'

Esaminiamo ora le *nove* soluzioni pervenute.

Nella risoluzione del sig. **Longo** di *Napoli*, si osserva (giustamente, ma senza dimostrarlo) che ogni punto X deve essere un punto d'intersezione colla PP′ di una tangente al circolo, che ha per centro A e per raggio AP, condotta dal punto A′ o dal suo simmetrico rispetto a PP′; su questa osservazione si basa una discussione geometrica, che conduce a uno specchio analogo a quello dato sopra e che coinciderebbe con esso, se non si fosse prestabilita la condizione $AA' > d$, anche nei casi in cui questa è conseguenza delle ipotesi via via considerate. Questa risoluzione è l'unica (delle *nove*) che sia completa.

Le altre risoluzioni dei sigg. **Florian**, L. di *Ploesti* (Romania), **Costa** e **Bongini**, R. I. T. di *Torino*; **Semenza**, R. I. T. di *Torino*; **Barberino**, **Cutore**, **Maugeri**, R. I. T. di *Catania*; **Cassani**, R. L. di *Roma*; **De Conz**, R. I. T. di *Venezia*; **Mancia**, R. I. T. di *Spoleto*, e del sig. **Salvo**, R. I. T. di *Catania*, sono incomplete, perchè non vi si considerano altro che le radici della (1). Qualcuna lascia anche a desiderare nella discussione.

G. Pesci.

840. *Dimostrare che in un triangolo sferico qualunque, se* a *e* b *sono di specie uguale e* α *e* β *di specie contraria,* c *è acuto, se* a *e* b *sono di specie contraria e* α *e* β *di specie uguale,* c *è ottuso.*

G. Pesci.

Dimostrazione del sig. **A. Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*.

Si ha

$$\cos c = + \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = - \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos c,$$

da cui, sostituendo nella prima a $\cos \alpha$ il valore dato dalla seconda e riducendo:

$$\cos c = \frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos \alpha \cos \beta}{1 - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}.$$

864. Si uniscono fra loro i centri dei quadrati costruiti esternamente sui lati d'un parallelogrammo. Si dimostri che l'area del quadrilatero così ottenuto supera l'area del parallelogrammo della quarta parte della somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati del parallelogrammo.

C. Alasia.

865. Trovare la condizione affinchè l'equazione:

$$(a_0 + b_0 i)\, x^2 + (a_1 + b_1 i)\, x + a_2 + b_2 i = 0$$

abbia una radice reale.

Enrico De Conz.

866. Se n è un numero intero, il numero

$$N = \frac{(n^2 - n + 1)^3 + (3n)^3}{(n+1)^2}$$

è pure intero.

867. Risolvere l'equazione

$$x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0.$$

868. Risolvere l'equazione

$$(x + \lambda)^3 + (\lambda - 1)^3 x = 0$$

ed in particolare l'altra

$$(x + 7)^3 + 216x = 0.$$

E. N. Barisien.

869. In una ellisse data inscrivere un rettangolo di dato perimetro $2p$. Determinare il massimo valore di p e costruire geometricamente in tal caso il rettangolo.

G. Cardoso-Laynes.

870. Dato un triangolo ABC, esistono nel suo piano due punti tali che i loro triangoli podari siano simili a un dato triangolo A'B'C'. Ciò posto, in funzione di elementi di ABC e degli angoli $\widehat{A'}$, $\widehat{B'}$, $\widehat{C'}$, determinare:

1°. L'area dei triangoli podari dei punti suddetti.
2°. Le distanze di essi punti dal circoncentro.
3°. Le loro distanze dai lati e dai vertici del triangolo dato.
Casi particolari.

R. Vercellin.

N. B. — Le risoluzioni di queste quistioni devono essere inviate al prof. G. Lazzeri, Livorno, Via dell'Indipendenza n. 7, non più tardi del 30 settembre 1907.

PICCOLA POSTA

Ancora una volta ricordiamo che le risoluzioni debbono essere scritte in fogli separati, e non di seguito una all'altra, *chè altrimenti non di tutte può essere tenuto conto.*

Preghiamo poi di controllare il peso dei plichi di manoscritto per applicarvi l'esatta affrancazione, onde evitare che, se tassate, vengano respinte.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 24 giugno 1907

Inviarono risoluzioni le sig.ne **Fritzsche** di *Aquila* e **Villani**, R. I. T. di *Pavia*; ed i sigg. **Anau** e **Castiglioni**, R. I. T. di *Firenze*; **Barberino**, **Maugeri** e **Salvo**, R. I. T. di *Catania*; **Bitossi** e **Cellini** di *Forlì*; **Bongini** e **Costa**, R. I. T. di *Torino*; **Borino** di *Palermo*; **Carissimo**, Coll. Nazareno di *Roma*; **Cecere**, L. della Badia di Cava; **Denti L.** e **F.**, R. I. T. di *Messina*; **Ferrari F.** di *Pavia*; **Ferrari V.** e **Magi**, R. I. T. di *Ancona*; **Florian**, L. di *Plosti* (Romania); **Garbelotto** e **Jegna**, R. I. T. e **Levi**, R. L. Polo di *Venezia*; **Gavotti** di *Cremona*; **Gesta**, R. L. di *Cuneo*; **Guerrini**, R. L. di *Pesaro*; **Guglielmi**, R. I. T. di *Bari*; **Lepre**, I. T. di *Spezia*; **Lombardi**, R. L. di *Palermo*; **Lorenz** e **Semenza**, R. I. T e **Prochownick**, Scuola Cavalli e Conti di *Milano*: **Marangio**, R. L. di *Aquila*; **Micheletti**, R. L. di *Verona*; **Saloaia**, L. P. di *Caserta*; **Scarponi**, R. I. T. di *Perugia*. (G. C.-L.)

CURIOSI RESULTATI DI MOLTIPLICAZIONI

$9 \times 9 \quad + 7 = 88$	$9 \quad \times 9 \quad = 81$	$9 \quad \times 7 \quad = 63$
$9 \times 98 \quad + 6 = 888$	$99 \quad \times 99 \quad = 9801$	$99 \quad \times 77 \quad = 7623$
$9 \times 987 \quad + 5 = 8888$	$999 \times 999 \quad 998001$	$999 \times 777 = 776223$
. . . . .	$9999 \times 9999 = 99980001$	$9999 \times 7777 = 77762223$
$9 \times 98765432 + 0 = 88888888$	. . . . .	. . . . .

(dall'*Arithmetique amusante*, di Ed. Lucas.)

S'invitano i lettori a dimostrare in generale le proposizioni dalle quali dipendono i risultati sopra trascritti.

GIUOCHI PROPOSTI.

306. Un mercante ha 60 buoi e tanto fieno da bastare per 90 giorni. Dopo 20 giorni egli vende 20 buoi; ma 15 giorni dopo vuol comprare tanti buoi in modo che il fieno gli basti ancora per 50 giorni. Quanti buoi deve comprare? (*da varie raccolte.*)

307. Un colonnello voleva disporre il suo reggimento in forma di quadrato. In una prima prova avanzavano 88 uomini; mettendo un soldato più per riga, per compiere il quadrato mancavano 57 uomini. Quanti erano i soldati?

308. Trovare due numeri interi e positivi che abbiano per somma un quadrato e tali che la somma dei loro quadrati sia una quarta potenza.

309. Trovare due numeri interi e positivi tali che la somma di uno di essi col quadrato dell'altro sia un quadrato.

310. Trovare tre numeri interi e positivi tali che le somme e le differenze di essi, presi due a due in tutti i modi possibili, siano dei quadrati.

(dall'*Algebra* di Eulero.)

311. A quale altezza giunge il liquido in un vaso conico (altezza h, raggio di base r) se, dopo aver gettato nel vaso stesso un corpo sferico (raggio ϱ) che risulta tangente alle pareti del vaso e tocca la superficie del liquido, questo riempie completamente lo spazio vuoto? (G. C.-L.)

Le risoluzioni si accettano fino al 30 settembre p. v.

Durante le vacanze sarà pubblicato: G. CARDOSO-LAYNES

RICREAZIONI MATEMATICHE

È stato pubblicato:

LAZZERI e PESCI

COMPLEMENTI D'ALGEBRA

per l'ammissione alla R. Accademia Navale

Seconda edizione riveduta e corretta — Lire **3,80.** (*)

(*) Il volume sarà immediatamente spedito, **raccomandato**, a chi farà rimessa di L. **3,80** alla Libreria RAFFAELLO GIUSTI in Livorno.

RAFFAELLO GIUSTI, editore - Livorno

Riassunti per la preparazione agli esami di Fisica, Chimica e Matematica negli Istituti Tecnici e Licei

Andreini A. — *Tavole dei logaritmi con 3 e con 4 decimali* . . . L. — 50

Angeli L. — *Fisica* - Parte I. Meccanica generale e speciale dei solidi e dei fluidi. - Azioni molecolari - Calore e Meteorologia. 3ª edizione. „ — 50

—— *Fisica* - Parte II. Acustica - Ottica. - Elettricità e Magnetismo. 3ª ediz. „ 1 —

Catania S. — *Problemi di matematica dati agli esami di licenza d'istituto tecnico, con le loro risoluzioni* . . . . . „ 1 —

Lazzeri G. — *Manuale di trigonometria piana.* 2ª edizione . . . „ 1 —

—— *Manuale di trigonometria sferica* . . . . . „ 1 —

Martini Zuccagni A. — *Guida per la risoluzione degli esercizi d'algebra.* „ 1 —

—— *Guida pratica per la risoluzione delle equazioni di 1° e 2° grado.* „ 1 —

—— *Guida pratica per la risoluzione degli esercizi di trigonometria* . „ 1 —

—— *Algebra complementare* . . . . . „ 1 —

Ongaro G. — *Chimica docimastica* . . . . . „ 1 —

Ortu Carboni S. — *Sunto di geometria elementare.* Planimetria . . „ 1 —

—— *Sunto di geometria elementare.* Stereometria . . . . . „ 1 —

—— *Esercizi di geometria elementare* . . . . . „ 1 —

Tassinari G. — *Guida ad esercizi pratici di Chimica.* 3ª edizione. . „ — 50

—— *Ripetitorio di Chimica.* Parte I. 4ª edizione . . . . . „ 1 —

—— *Ripetitorio di Chimica.* Parte II. 3ª edizione . . . . . „ — 50

Testi G. M. — *Compendio di aritmetica razionale* . . . . . „ — 50

Visalli P. — *Algebra* . . . . . „ 1 —

G. L. — Repertorio di matematiche e fisica elementari. Vol. in-64° elegantemente legato. Terza edizione . . . . L. 1 —

In questo libretto, di dimensioni piccolissime, si trovano raccolte tutte le formule di aritmetica, geometria, algebra, trigonometria piana e sferica, e fisica che si possono presentare nelle questioni che vengono proposte agli alunni delle scuole secondarie classiche e tecniche e nei complementi per i concorsi alla R. Accademia Militare di Torino e alla R. Accademia Navale di Livorno.

I sigg. associati al Supplemento al Periodico di Matematica, che acquisteranno, in una sola volta, tanti volumetti per l'importo di L. 5, li riceveranno franchi di spesa e avranno gratis un volumetto da L. 1 a loro scelta: quelli che ne acquisteranno per L. 2,50 ano da L. 0,50. Indirizzare le commissioni, accompagnate dal relativo importo, all'Editore RAFFAELLO GIUSTI — Livorno.

3 2044 102 938 610